ESERCIZIO

All'interno di una sfera di raggio $R = 0.384\ m$ è distribuita una carica elettrica con densità volumetrica $\rho = K/r$, dove $K = 7.53\ 10^{-3}\ C$ e r è la distanza dal centro.

Calcolare:

1) La carica elettrica contenuta all'interno della sfera.
2) Il campo E nei punti a distanza $R_1 = R/2$ e $R_2 = 2R$.
3) Il potenziale nel centro della sfera.
4) L'energia elettrostatica della distribuzione di carica.

1) Un guscio sferico di spessore infinitesimo conterrà la carica dq

$$dq = \rho\, dV = \frac{K}{r} 4\pi r^2\, dr = 4K\pi r\, dr$$

quindi

$$q = \int dq = 4\pi K \int_0^R r\, dr = 2K\pi R^2 = 6.98\ 10^{-3}\ C$$

2) Applichiamo Gauss

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV$$

per $R = R/2$

$$4\pi \frac{R^2}{4} E = \frac{4\pi K}{\varepsilon_0} \int_0^{R/2} r\, dr = \frac{4\pi K}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{4} \longrightarrow \vec{E} = \frac{K}{2\varepsilon_0} \hat{r}$$

$E(R/2) = 4.25 \cdot 10^8$ V/m

Calcoliamo ora analogamente $E(2R)$

$$4\pi (4R^2)\, E = \frac{4\pi k}{\varepsilon_0} \int_0^R r\, dr$$

$$E(2R) = \frac{k}{8\varepsilon_0} = 1.06 \text{ V/m}$$

NB: $E(r>R)$ non è costante ma vale

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{TOT} = \frac{1}{\varepsilon_0} 2k\pi R^2$$

$\Rightarrow$

$$E(r>R) = \frac{k}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

3) Calcoliamo il potenziale in zero considerando il campo dentro e fuori dalla sfera

$$V_0 = -\int_{\infty}^{R=0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_R^0 E\, dr - \int_{\infty}^{R} E\, dr$$

$$= \frac{kR}{2\varepsilon_0} + \left. \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r} \right|_{\infty}^{R} = \frac{kR}{\varepsilon_0} = 3.27 \cdot 10^8 \text{ V}$$

4) L'energia elettrostatica e' data da

$$U = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \, d\tau$$

integrato su tutto il volume in cui $E \neq 0$

avremo quindi 2 contributi:

Dentro la sfera $\rightarrow E^{(IN)} = \dfrac{k}{2\varepsilon_0}$

Fuori dalla sfera $\rightarrow E^{(OUT)} = \dfrac{k}{2\varepsilon_0} \dfrac{R^2}{r^2}$

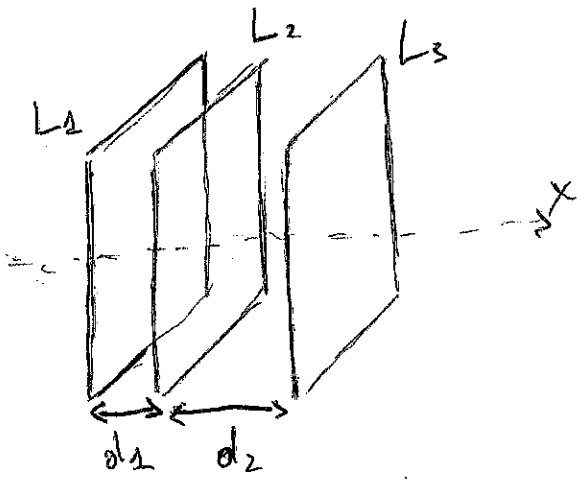
$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^{(IN)\,2} V_{sfera} + \int_R^\infty \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{k^2 R^4}{4 \varepsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{k^2}{4\varepsilon_0^2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_R^\infty \frac{k^2 R^4 \pi}{2\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{k^2 \pi R^3}{6 \varepsilon_0} + \frac{k^2 \pi R^3}{2\varepsilon_0} = \frac{2}{3} \frac{k^2 \pi R^3}{\varepsilon_0} = 7.59 \; 10^5 \, J$$

ESERCIZIO

Tre lastre quadrate di lato $l = 30$ cm, cariche con densità di carica σ_1, σ_2 e σ_3, sono disposte parallelamente come in figura. I loro potenziali elettrostatici valgono $V_1 = 100V$, $V_2 = 200V$ e $V_3 = 400V$. La distanza L_1L_2 è $d_1 = 2$ mm mentre quella tra L_2 e L_3 è $d_2 = 3$ mm. Trovare la forza che si deve esercitare su L_2 perché essa non si muova



Usiamo Gauss e il principio di sovrapposizione per trovare il campo ~~tra~~ in funzione di x

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x} \qquad x < 0$$

$$\vec{E}_2 = +\frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x} \qquad 0 < x < d_1$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x} \qquad d_1 < x < d_2$$

$$\vec{E}_4 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{x} \qquad x > d_2$$

dato che tra due lamine il campo è costante

$$\begin{cases} V_2 - V_1 = -E_2 d_1 \\ V_3 - V_2 = -E_3 d_2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1 = 2\varepsilon_0 \dfrac{V_2 - V_1}{d_1} \\ \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 = 2\varepsilon_0 \dfrac{V_3 - V_2}{d_2} \end{cases}$$

sottraggo membro a membro:

$$\cancel{2}\sigma_2 = \cancel{2}\varepsilon_0 \left[\frac{V_2 - V_1}{d_1} - \frac{V_3 - V_2}{d_2} \right] = -\frac{1}{6} 10^5 \varepsilon_0$$

sommando invece ottengo:

$$\cancel{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \cancel{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V_2 - V_1}{d_1} + \frac{V_3 - V_2}{d_2} \right)$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{7}{6} 10^5 \varepsilon_0$$

Il campo generato da L_1 e L_3 nello spazio tra loro compreso vale

$$\bar{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\varepsilon_0}$$

La forza che questo campo esercita su L_2 vale perciò

$$F = q_2 \bar{E} = \sigma_2 \ell^2 \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_0} = 7.74 \; 10^4 N$$

quindi per tenerla ferma occorrerà una forza uguale e opposta

ESERCIZIO

Una sfera di raggio $r_1 = 5cm$ è uniformemente carica con carica $q = 7\,10^{-9}C$.
Su un guscio sferico concentrico di spessore trascurabile e raggio $r_2 = 10\,cm$ è distribuita una carica $-q$.
Trovare:
1) La differenza di potenziale tra un punto sulla superficie della sfera e un punto sulla superficie del guscio.
2) L'energia elettrostatica del sistema

Calcoliamo il campo tra la sfera e il guscio con il teorema di Gauss

$r_1 < r < r_2$

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} q \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\Delta V = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_2}^{r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] =$$

$$= 629\,V$$

Per trovare l'energia elettrostatica del sistema occorre conoscere il campo in tutto lo spazio. Quello fuori dal guscio e' nullo per il teorema di Gauss, quindi resta da determinare quello all'interno della sfera

$r < r_1$

$$4\pi E r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho \, dr' \qquad \text{con} \quad \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}$$

$$E = \frac{4\pi}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \rho \int_0^r r'^2 \, dr' = \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0}$$

calcoliamo l'energia

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 \, dV$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^{r_1} \frac{\rho^2 r^2}{9 \varepsilon_0^2} 4\pi r^2 \, dr + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[\frac{4\pi\rho^2}{9 \varepsilon_0^2} \int_0^{r_1} r^4 \, dr + \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[\frac{4\pi\rho^2}{9 \varepsilon_0^2} \frac{r_1^5}{5} + \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right] =$$

sostituiamo

$$\rho^2 = \frac{q^2}{\frac{16}{9}\pi^2 r_1^6}$$

$$U = \frac{2\pi}{45\varepsilon_0}\left(\frac{9q^2}{16\pi^2 r_1^6}\right) r_1^5 + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{q^2}{40\varepsilon_0\pi r_1} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= 3.09\ 10^{-6}\ J$$

ESERCIZIO

Una sfera uniformemente carica con densità di carica $\rho = 17.7\ 10^{-8}\ C/m^3$ ha raggio $R_0 = 0.1\ m$.
Un elettrone è posto a distanza $r = 2r_0$ dal centro della sfera. Calcolare:

1) Il potenziale prodotto dalla carica positiva nel centro della sfera

2) La velocità con cui l'elettrone arriva nel centro della sfera

3) I valori massimo e minimo dell'accelerazione $a(r)$ e per quale r vengono raggiunti

4) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ nel centro della sfera

1) Il potenziale nel centro vale

$$V(r=0) = -\int_{\infty}^{0} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V(r=0) = -\int_{\infty}^{r_0} E_{ext}\, dr - \int_{r_0}^{0} E_{int}\, dr$$

usiamo gauss

$$\int \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dV$$

$$4\pi r^2 \, E_{int}(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E_{int}(r) = \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0}$$

$$E_{ext} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \qquad \text{con} \qquad q = \rho \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

$$V(r=0) = -\int_{\infty}^{r_0} \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \, dr - \int_{r_0}^{0} \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \, r \, dr$$

$$= \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r} \Bigg|_{\infty}^{r_0} - \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} r^2 \Bigg|_{r_0}^{0} =$$

$$= \frac{\rho \cancel{(4\pi)} r_0^3}{3 \cancel{(4\pi)} \varepsilon_0 r_0} + \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} r_0^2 = \frac{\rho r_0^2}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\rho r_0^2}{2 \varepsilon_0} = 100 V$$

2) Conservazione dell'energia

$$K(r=0) + U(r=0) = K(r=2r_0) + U(r=2r_0)$$

$$\frac{1}{2} m_e v^2 + eV(r=0) = 0 + e\,V(r=2r_0)$$

$$V(r=2r_0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (2r_0)} = \frac{\rho r_0^2}{6\varepsilon_0} = 33.3\,V$$

$\Rightarrow$

$$v^2 = \frac{2e}{m_e}\left[V(r=2r) - V(r=0)\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e = \cdot 1.602\ 10^{-19}\,C \\ m_e = 9.91\ 10^{-31}\,Kg \end{array}}$$

$$v = 4.84\ 10^{6}\ m/s$$

3) Dalla legge di Newton

$$\vec{F} = e\vec{E} = m_e\vec{a}$$

$$a(r) = \frac{e}{m_e} E(r)$$

i minimi di $E(r)$ valgono 0 e si hanno per $r=0$ e $r=\infty$

il massimo si ha per $r=r_0$

e vale $E(r=r_0) = \dfrac{\rho r_0}{3\varepsilon_0}$

4) Per la I eq di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

infatti

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{1}{r^2} \rho \frac{r^2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$