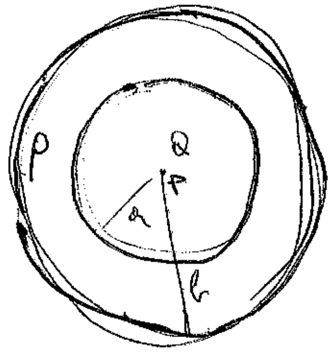
ESERCIZIO

Considero una carica puntiforme Q contenuta all'interno di una calotta sferica come mostrato in figura. Sapendo che la carica sulla calotta sferica è distribuita secondo la legge

$\rho(r) = \frac{K}{r}$ trovare K tale che il campo in $a < r < b$ sia costante.



Considero i seguenti casi

$\boxed{r < a}$

Sfruttiamo il Teorema di Gauss scegliendo una superficie consona alla simmetria del problema: una sfera centrata in P.

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma_i Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_S E \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E \int_S dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r<a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$\boxed{r>b}$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{Q + Q_{\text{CALOTTA SFERICA}}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r>b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{TOT}}{r^2} \hat{r}$$

$\boxed{a<r<b}$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q + q(r)\right)$$

dove $\quad q(r) = \int_V \rho \, dV = \int_a^r \frac{k}{r'} \, 4\pi r'^2 \, dr' =$

$$= 4k\pi \int_a^r r' \, dr' = 2\pi\left(r^2 - a^2\right)k$$

$\Longrightarrow$

$$E(a<r<b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} + \frac{K}{2\varepsilon_0} - \frac{2\pi K a^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} =$$

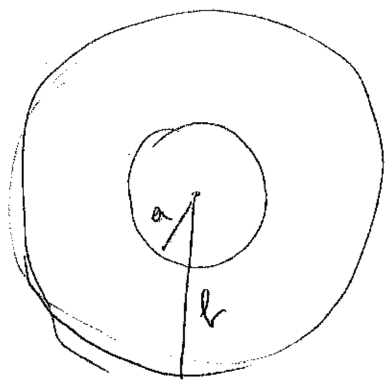
$$= \frac{K}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q - 2\pi K a^2}{r^2}$$

Quindi $E = \text{cost}$ se

$Q - 2\pi K a^2 = 0$ ovvia $K = \dfrac{Q}{2\pi a^2}$

ESERCIZIO

Si consideri un guscio sferico di raggio interno $a = 5\,cm$ e raggio esterno $b = 10\,cm$. Sul guscio e' distribuita uniformemente una carica $q = 5\,10^{-8}\,C$. Calcolare la differenza di potenziale tra un punto sulla superficie interna e un punto sulla superficie esterna



ricordiamo che:

$$\Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Devo trovare il campo $\vec{E}$

Usiamo Gauss

$\boxed{r < a}$ $\quad \vec{E} = 0$

$\boxed{r > b}$ $\quad 4\pi r^2 E = \dfrac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_{TOT}}{r^2} \hat{r}$

$a < r < b \quad 4\pi r^2 E = \dfrac{q(r)}{\varepsilon_0}$

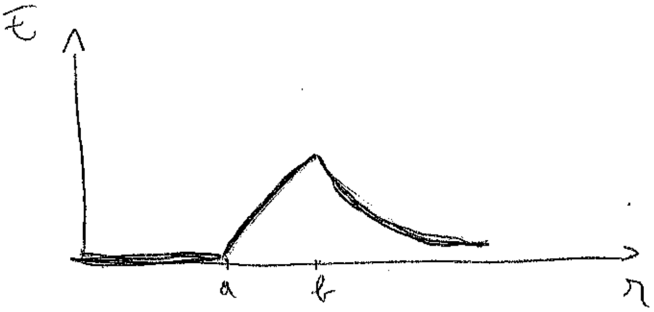
$$q(r) = \int_{a}^{r} \rho \, 4\pi r'^2 \, dr' = 4\pi\rho \int_{a}^{r} r'^2 \, dr' =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - a^3\right)\rho$$

quindi

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \rho \, \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - a^3\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Schematicamente quindi



Integriamo per trovare la differenza di potenziale

$$\Delta V = -\int_{a}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{a}^{b}\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}\right) dr =$$

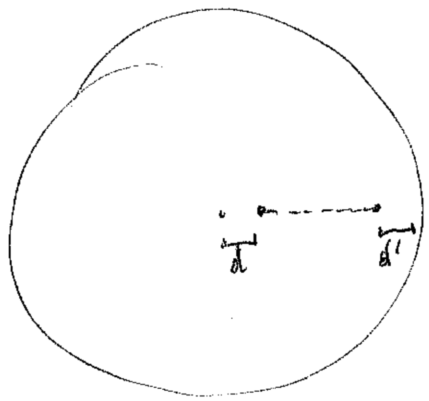
$$= -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Sapendo che $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\left(b^3 - a^3\right)} = 1.36 \, 10^{-5} \, C/m^3$

si ottiene $\Delta V = -1280 \, V$

ESERCIZIO

Una carica $q = -10^{-8}C$ è distribuita uniformemente su una sfera di raggio $R = 10$ cm. Un elettrone parte da fermo a distanza $d = 1$ cm dal centro e giunge ad una distanza $d' = 1$ cm dalla superficie. Trovare la velocità finale dell'elettrone



Usiamo la conservazione dell'energia

$$\Delta K = -q\Delta V$$

$$-\Delta V = V(d) - V(R-d')$$

Dal teorema di Gauss

$$4\pi r^2 E = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \; q\,\frac{4/3\,\pi r^3}{4/3\,\pi R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\hat{r}$$

Ricaviamo quindi la differenza di potenziale tra la posizione iniziale e finale

$$-\Delta V = V(d) - V(R-d') = -\int_{R-d'}^{d} \vec{E}\, d\vec{l} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \int_{R-d'}^{d} r\, dr = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[d^2 - (R-d')^2\right]$$

quindi dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[(R-d')^2 - d^2\right]$$

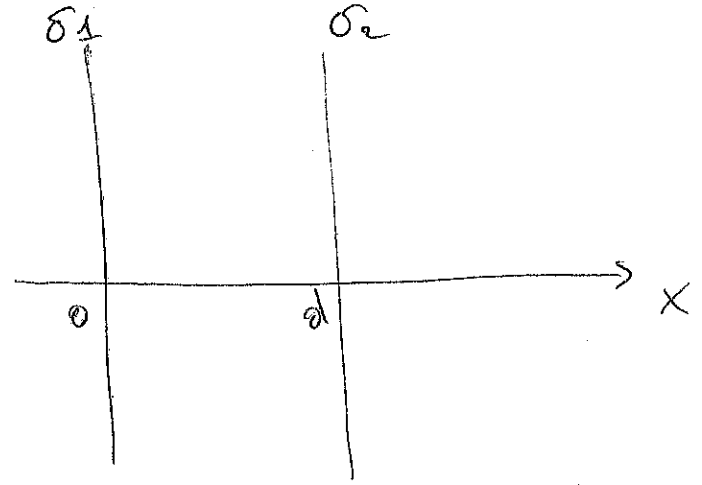
$$v = \sqrt{\frac{e\, q\, \left[(R-d')^2 - d^2\right]}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m_e}} = 1.12\ 10^7\ m/s$$

$m_e = 9.11\ 10^{-31}$

$e = -1.6\ 10^{-19}\ C$

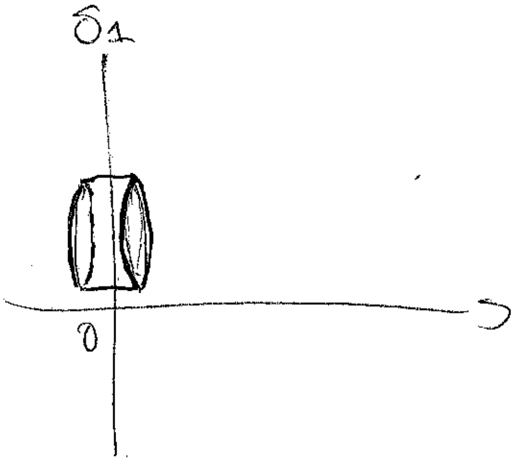
ESERCIZIO

Una carica elettrica e' distribuita con densità superficiale σ_1 e σ_2 sui piani $x=0$ e $x=d$, rispettivamente. Si calcolino il campo elettrico e il potenziale in tutto lo spazio assumendo nullo il potenziale in $x=0$



Applichiamo il principio di sovrapposizione. Cominciamo calcolando il campo generato da σ_1.

Per questioni di simmetria il campo sarà $\perp$ al piano. Conviene quindi scegliere per Gauss una superficie cilindrica $\perp$ al piano con basi di area A



$$\phi_S(\vec{E}_1) = \int_S \vec{E}_1 \cdot \vec{dS} = E_1 2A = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 A}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{x} \quad x > 0$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{x} \quad x < 0$$

analogamente per il piano $x=d$ avremo

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \qquad x > d$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \qquad x < d$$

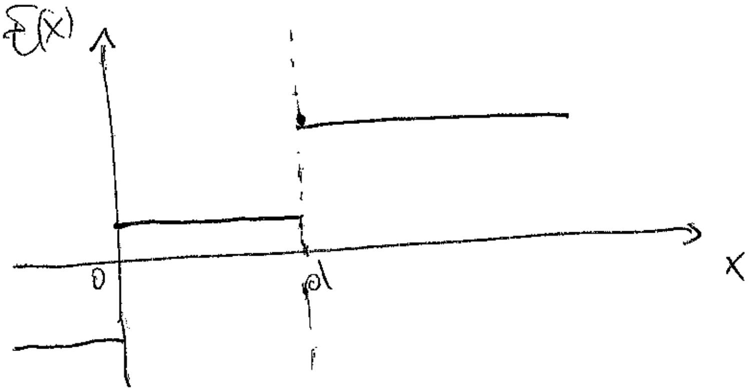
quindi per il principio di sovrapposizione

$x<0$ $\quad \vec{E} = -\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$

$0<x<d$ $\quad \vec{E} = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$

$x>d$ $\quad \vec{E} = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x}$

vediamo l'andamento di $E(x)$ nel caso ad esempio $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$



Si noti che E è una funzione discontinua di x

Calcoliamo ora il potenziale $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$

per $x<0$: $$V(x) - V(0) = \int_0^x \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right) dx = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\, x$$

per $0 < x < d$: $$V(x) - V(0) = \int_0^x -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right) dx = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right) x$$

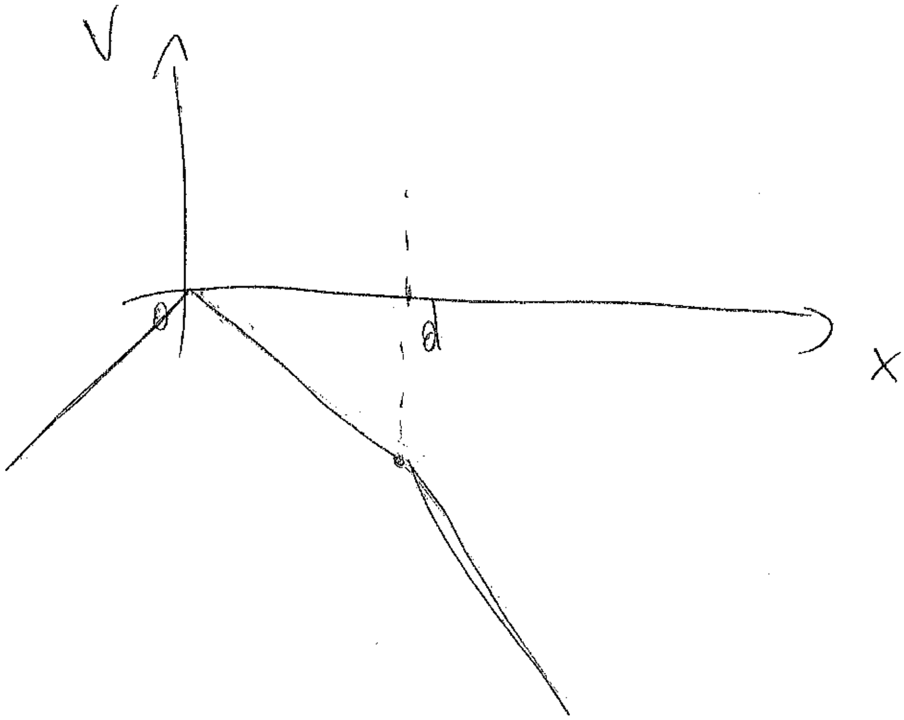
per $x > d$: $$V(x) - V(d) = \int_d^x -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\, dx = -\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)(x-d)$$

prendo da sopra l'espressione di $V(d)$ e sostituisco

$$V(x) = -\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)(x-d) - \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)d$$

$$= -\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)x + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d.$$

vediamo l'andamento di $V(x)$ sempre nel caso $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$



Si discuta anche il caso $\sigma_2 = -\sigma_1$