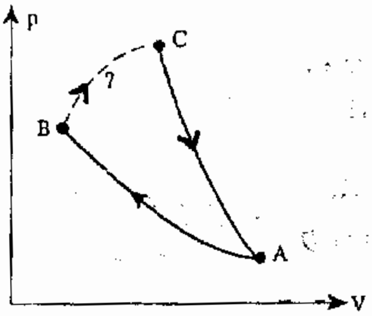
ESERCIZIO

10.41. *Un gas ideale biatomico si trova in equilibrio termodinamico nello stato A ($p_A = 1\,bar$, $V_A = 20\cdot10^{-3}\,m^3$, $T_A = 288K$). Con una compressione isoterma reversibile il volume viene ridotto a $V_B = 5\cdot10^{-3}\,m^3$; dallo stato B il gas passa successivamente allo stato C ed infine ritorna allo stato A tramite una espansione adiabatica reversibile. Il gas assorbe nella trasformazione BC la quantità di calore $Q_{BC} = 4560J$; la variazione di entropia dell'ambiente nella stessa trasformazione è $\Delta S_{amb} = -9.63J/K$.*

Calcolare il calore scambiato in un ciclo ed il rendimento. Ricavare inoltre se la trasformazione BC è reversibile o irreversibile.



Dall'eq di stato dei gas perfetti trovo:

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 0.835$$

AB è isoterma → $\Delta U = 0$

$$Q_{AB} = W_{AB} = \int_A^B P\,dV = \int_A^B nRT_A \frac{dV}{V} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = -2771.7\ J$$

Inoltre essendo un ciclo $\Delta U = 0$

$$Q = W = Q_{AB} + Q_{BC} + \underbrace{Q_{CA}}_{\substack{\parallel \\ 0\ \text{ADIABATICA}}} = 1788.3\ J$$

Il rendimento è

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{W}{Q_{BC}} = 0.392$$

Se la trasformazione BC è reversibile deve valere che

$$\left(\Delta S_{AMB} + \Delta S_{GAS}\right)^{BC}_{REV} = 0 \implies -\Delta S^{BC}_{GAS} = \Delta S^{BC}_{AMB}$$

In un ciclo inoltre $\Delta S = 0$

$$\Delta S^{GAS}_{AB} + \Delta S^{GAS}_{BC} + \underbrace{\Delta S^{GAS}_{CA}}_{0} = 0$$

Adiabatica reversibile $\longrightarrow$ isoentropica

$$\implies \Delta S^{GAS}_{AB} = -\Delta S^{GAS}_{BC}$$

Quindi la trasformazione BC è reversibile se è verificato che

$$\Delta S^{AMB}_{BC} = \Delta S^{GAS}_{AB}$$

$$\Delta S^{GAS}_{AB} = nR \log \frac{V_B}{V_A} = -9.69\ J/K = \Delta S^{AMB}_{BC}$$

$\implies$ BC è reversibile

ESERCIZIO

10.47. *Un motore termico, utilizzando 2 moli di un gas ideale compie un ciclo irreversibile che comporta le seguenti trasformazioni:*

a) una compressione isoterma reversibile che porta il gas dalla pressione $p_A = 1$bar alla pressione $p_B = 2.7$bar; sia $T_A = 300$K la temperatura iniziale;

b) un riscaldamento isocoro irreversibile BC con assorbimento della quantità di calore $Q_{BC} = 13.4$kJ,

c) una espansione adiabatica irreversibile CD, al termine della quale il gas ritorna alla pressione iniziale ed a un volume $V_D = 64 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$,

d) un raffreddamento isobaro reversibile DA, che riporta il gas allo stato iniziale.

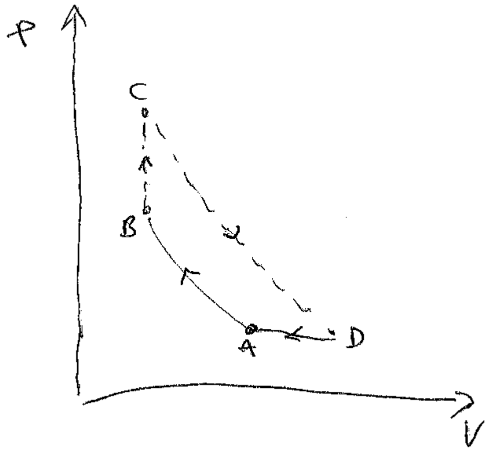
Sia $c_p = 25$J/mole K, il calore specifico molare a pressione costante.

Si determini:

a) il rendimento del ciclo,

b) il lavoro ottenuto,

c) la variazione di entropia nelle trasformazioni BC e CD.



a) Calcolo il calore scambiato nelle varie trasformazioni

$\boxed{AB}$ Isoterma reversibile $\quad W = Q \quad (\Delta U = 0)$

$$Q = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \qquad V_B = \frac{nRT_B}{P_B} \qquad T_B = T_A$$

$$Q = nRT_A \log \frac{P_A}{P_b} = -4954,7 \text{ J}$$

$\boxed{BC}$ Isocora irreversibile

$$Q_{BC} = \Delta U = 13.4 \text{ KJ}$$

$\boxed{CD}$ Adiabatica irreversibile

$$Q_{CD} = 0$$

$\boxed{DA}$ Isobara reversibile

$$Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) = -4244.6 \text{ J}$$

$$T_D = \frac{P_A V_D}{nR} = 384.9 \text{ K}$$

Il calore assorbito è quindi:

$$Q_A = Q_{BC} = 13.4 \; 10^3 \text{ J}$$

quello ceduto

$$Q_C = Q_{AB} + Q_{DA} = -9.2 \; 10^3 \text{ J}$$

$\Longrightarrow$

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 0.313$$

b) Lavoro durante il ciclo:

$$W = Q = Q_A + Q_C = 4.2 \text{ KJ}$$

c) Troviamo la temperatura T_C

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) \Longrightarrow T_C = T_B + \frac{Q_{BC}}{nc_v} = 701.2 \text{K}$$

La variazione di entropia lungo la trasformazione BC sarà data da

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{dQ_{BC}}{T} = \int_B^C \frac{n c_v \, dT}{T} = n c_v \log \frac{T_C}{T_B} = 28.3 \text{ J/K}$$

$\Delta S_{CD} \neq 0$ perché la trasf è adiabatica irreversibile

Sfrutto il fatto che è un gas ideale e calcolo ΔS lungo una trasf reversibile avente gli stessi estremi

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{n c_v \, dT}{T} + \frac{P dV}{T} =$$

$$\Delta S = n c_v \log \frac{T_D}{T_C} + \int_C^D \frac{nRT}{VT} dV =$$

$$= n c_v \log \frac{T_D}{T_C} + nR \log \frac{V_D}{V_C}$$

V_D è noto

$V_C = V_B = \frac{n R T_A}{P_B}$

T_C e T_D li abbiamo calcolati

$\Rightarrow$

$\Delta S_{CD} = 0.65 \text{ J/K}$

ESERCIZIO

Una macchina termica ~~reversibile~~ compie un ciclo reversibile scambiando calore con 3 sorgenti da temperature $T_1 = 400K$, $T_2 = 300K$ e $T_3 = 200K$. Prima lavora tra le sorgenti T_1 e T_2 e poi tra T_1 e T_3. Complessivamente assorbe una quantità di calore $Q_1 = 1200 J$ dalla ~~Ta~~ sorgente T_1 e compie un lavoro $W = 400 J$. Trovare:

a) la quantità di calore Q_2 e Q_3 scambiate con le due sorgenti

b) la variazione di entropia di ciascuna sorgente

c) la variazione di entropia dell'universo

Il rendimento della prima parte della macchina, quando lavora tra T_1 e T_2 è dato da (Teorema di Carnot)

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{W_1}{Q_0} \longrightarrow W_1 = \frac{1}{4} Q_0$$

dove Q_0 è il calore assorbito dalla sorgente a temperatura T_1

Quando lavora tra T_1 e T_3

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_3}{T_1} = \frac{W_2}{Q_0'} \rightarrow W_2 = \frac{1}{2} Q_0'$$

Quindi in totale le mie condizioni sono

$$W_1 = \frac{1}{4} Q_0 \qquad W_2 = \frac{1}{2} Q_0'$$

$$W = W_1 + W_2 \qquad Q_1 = Q_0 + Q_0'$$

4 eq e 4 incognite

si ottiene:

$Q_0 = 800\,J \quad Q_0' = 400\,J \quad W_1 = 200\,J \quad W_2 = 200\,J$

inoltre $W = Q_A + Q_C$ quindi

$$W_1 = Q_0 + Q_2 \quad e \quad W_2 = Q_0' + Q_3$$

da cui

$$Q_2 = -600\,J \qquad Q_3 = -200\,J$$

Visto che le sorgenti sono a temperatura costante

$$\Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1} = -3\,J/K$$

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_2}{T_2} = +2\,J/K$$

$$\Delta S_3 = -\frac{Q_3}{T_3} = 1\,J/K$$

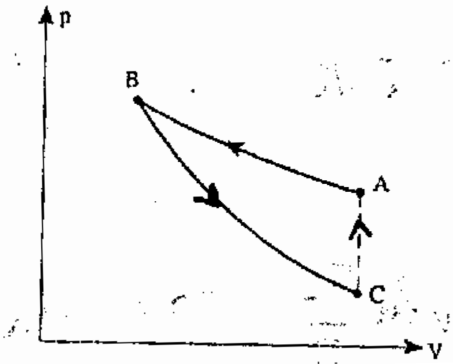
Dato che il processo è reversibile la variazione di entropia dell'universo $\Delta S_U = 0$

ESERCIZIO

Un cilindro, chiuso da un pistone scorrevole senza attrito e contenente 3 moli di gas ideale biatomico, si trova in equilibrio termico con una massa $m = 1\text{kg}$ d'acqua a $T_0 = 373.2\text{K}$. Il gas viene compresso in modo isotermo reversibile, sempre a contatto con l'acqua, in modo che il suo volume si riduca a 1/3 del volume iniziale. Una adiabatica reversibile riporta il gas al suo volume iniziale e infine anche la temperatura viene riportata a T_0, ponendo nuovamente il cilindro in contatto termico con l'acqua, mantenendo costante il volume. Sia $\lambda_E = 22.6 \cdot 10^5\ \text{J/kg}$ il calore latente di evaporazione dell'acqua.

Si determini

a) il lavoro richiesto per ogni ciclo
b) quanti cicli sono necessari per far evaporare tutta l'acqua
c) le variazioni di entropia del gas e dell'acqua durante l'isocora
d) l'energia inutilizzabile in un ciclo



Calcolo la temperatura T_c usando il fatto che per una trasf adiabatica vale:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1}$$

$V_B = \frac{V_c}{3}$ $\quad T_B = T_0 \quad$ $T_c = 240.5\ K$

Nell' isoterma reversibile AB $\quad \Delta U = 0 \quad Q = W$

$$Q_{AB} = \int_A^B P\,dV = nRT \log \frac{V_B}{V_A} = -10226\ J$$

ceduto all' acqua

$W_{AB} = Q_{AB}$ $\quad$ lavoro subito dal gas

Nell' isocoro irreversibile CA $Q = \Delta U$

$$Q_{CA} = n c_V (T_A - T_C) = 8275 \text{ J}$$

Il lavoro nel ciclo vale quindi

$$W = Q_{AB} + Q_{CA} = -1951 \text{ J}$$

per fare evaporare tutta l'acqua abbisognamo un numero N di cicli

$$N = \frac{\lambda_F m}{|W|} = 1198$$

Durante l'isocoro irreversibile l'acqua evapora e pertanto la sua temperatura resta costante $\Rightarrow$

$$\Delta S_{H_2O} = -\frac{Q_{CA}}{T_0} = -22.2 \text{ J/K}$$

mentre quello del gas

$$\Delta S_{GAS} = \int_{T_0}^{T_A} n c_V \frac{dT}{T} = n c_V \log \frac{T_A}{T_C} = 27.4 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{GAS} + \Delta S_{H_2O} = 5.2 \text{ J/K} > 0$$

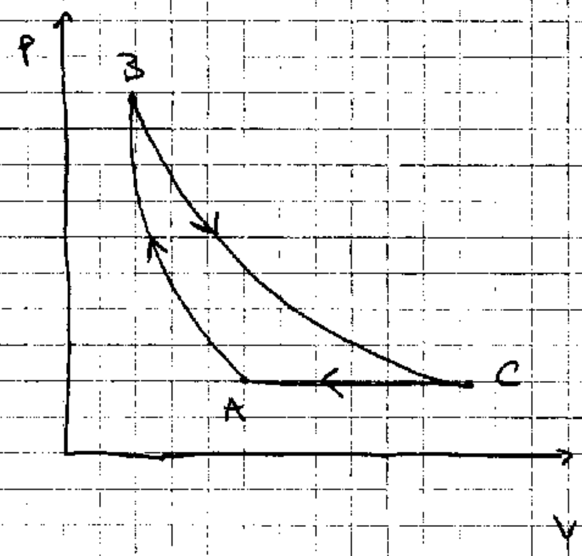
L'energia inutilizzabile vale

$$E_{IN} = T_0 \Delta S_U = 1941 \text{ J}$$

2. Una mole di gas perfetto biatomico inizialmente nelle condizioni $T_0 = 400\,K,\ V_0 = 0.02\,\mathrm{m}^3,\ P_0$, subisce una trasformazione ciclica composta da: 1) una compressione adiabatica reversibile fino a raggiungere la temperatura $2T_0$, 2) una espansione isoterma reversibile fino a P_0; 3) una compressione isobara reversibile che lo riporta alle condizioni iniziali. Trovare

   - Il rendimento del ciclo
   - La variazione di entropia della sorgente a temperatura $2T_0$.

ESERCIZIO 2.



Calcolo il lavoro:

AB: Adiabatica $\quad Q = 0 \quad L = -\Delta U$

$$L = -C_v \Delta T = -\frac{5}{2} R \Delta T = -\frac{5}{2} R(2T_0 - T_0) = -\frac{5}{2} R T_0 = -8{,}3 \cdot 10^3 \, J$$

BC: Trasformazione isoterma $\quad \Delta U = 0 \quad Q = L$

$$L = \int_{V_B}^{V_C} p \, dV$$

Devo determinare V_B e V_C.

V_B: Uso le eq. delle adiabatiche:

$$T_0 V_0^{\gamma - 1} = 2 T_0 V_B^{\gamma - 1} \qquad V_B = V_0 \, 2^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$V_B = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \, m^3$$

V_C: Eq. di stato.

$$V_C P_0 = 2 R T_0 \Rightarrow V_C = 2 V_0$$

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} P\,dV = \int_{V_B}^{V_C} 2RT_0 \frac{dV}{V} = 2RT_0 \ln \frac{V_C}{V_B} =$$

$$= 2RT_0 \ln \frac{2V_0}{V_0\, 2^{\frac{1}{\gamma-1}}} = 2RT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln 2 = 16{,}6 \cdot 10^3\ J$$

CA = Isobara

$$L_{CA} = P_0 \Delta V = -P_0 V_0 = -RT_0 = -3{,}32 \cdot 10^3\ J$$

Il lavoro Totale è quindi

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 4{,}98 \cdot 10^3\ J$$

Il calore è assorbito solo nell'isoterma

$$Q_{BC} = L_{BC} = 16{,}6 \cdot 10^3\ J$$

$$\eta = \frac{L_{TOT}}{Q_{ASS}} = 0{,}3 = 30\ \%$$

Nell'isoterma, dato che la trasformazione è rev.

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{serb} = 0$$

$$\Delta S_{serb} = -\Delta S_{gas}$$

$$\Delta S_{serb} = -\frac{Q_{BC}}{2T_0} = -20{,}7\ J/K$$