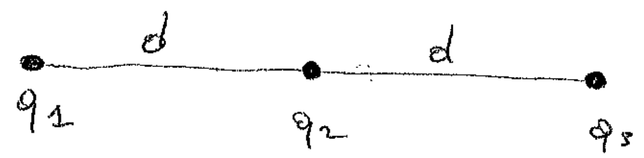
ESERCIZIO

Tre cariche sono disposte come in figura e separate da una distanza d. Le cariche q_1 e q_2 sono vincolate mentre q_3, libera di muoversi, è in equilibrio. Trovare il valore di q_1 sapendo che $q_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ C



Dato che q_3 è in equilibrio la risultante delle forze agenti su di essa deve essere nulla

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(2d)^2} \qquad F_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d^2}$$

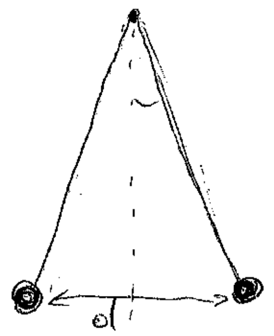
da cui segue

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{4d^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d^2} = 0$$

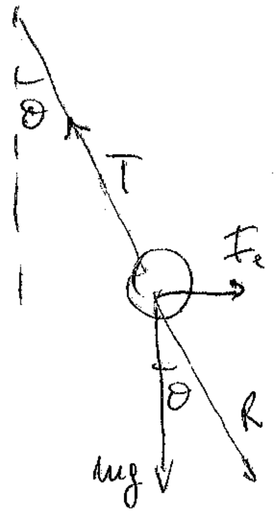
$$q_1 = -4 q_2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

ESERCIZIO

Due sferette di massa $m = 0.1$ kg, cariche rispettivamente con carica $q_1 = 0.4\,\mu C$ e $q_2 = 0.6\,\mu C$ sono legate a due fili di lunghezza 1 m come in figura. Il sistema è in equilibrio. Calcolare l'angolo che il filo forma con la verticale (assumendo il limite di piccoli angoli)



All'equilibrio la risultante tra la forza elettrostatica e la forza peso è bilanciata dalla tensione T



Dovrà quindi valere:

$$R \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

$$R \cos\theta = mg$$

$$\Longrightarrow$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg}$$

③

La distanza tra le due sferette sarà legata a θ dalla relazione

$$d = 2l \,\mathrm{sen}\,\theta$$

Quindi avremo

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (2l\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\, mg}$$

Nel limite di piccoli θ

$\mathrm{tg}\,\theta \sim \theta$
$\mathrm{sen}^2\theta \sim \theta^2$

Pertanto

$$\theta^3 = \frac{q_1 q_2}{16\pi\varepsilon_0 l^2 mg}$$

ANALISI DIM.

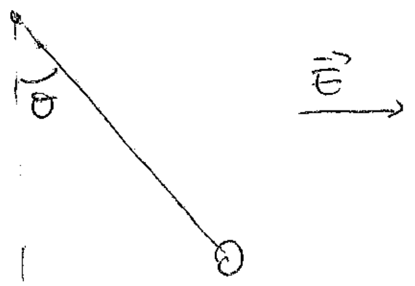
$$\theta = \frac{N m^2}{C^2}\,\frac{C^2}{m^2 N}$$ è adimensionale OK

$$\theta = \left(\frac{9\,10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\, \cancel{4}\, 10^{-7} C \; 6\cdot 10^{-7} C}{\cancel{4}\cdot 1 m^2 \quad 9.8\cdot 10^{-1} N} \right)^{1/3} = \left(\frac{54}{9.8}\, 10^{-4} \right)^{1/3} = 0.082 \text{ rad}$$

$\simeq 4.7^\circ$

ESERCIZIO

Un corpo puntiforme di massa m e carica $q = 9.8\ 10^{-7} C$ è appeso ad un filo inestensibile. Un campo elettrostatico uniforme di modulo $E = 1\ V/m$ e diretto orizzontalmente è presente nello spazio. Sapendo che il corpo raggiunge l'equilibrio per $\theta = 45°$ trovare la massa m.



$$\vec{F}_p + \vec{F}_e + \vec{T} = 0$$

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

$$-T \sin\theta + qE = 0$$

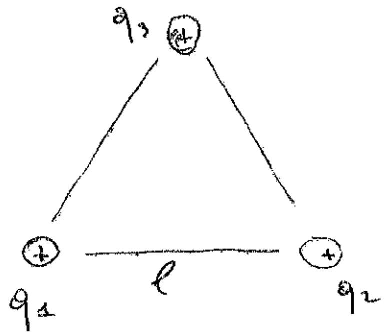
$$-mg + T\cos\theta = 0$$

$$\frac{qE}{mg} = tg\theta = 1$$

$$m = \frac{qE}{g} = 10^{-7} Kg$$

ESERCIZIO

Tre cariche positive uguali $q_1 = q_2 = q_3 = q = 5\,\mu C$ sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 0.5\,m$.
Calcolare la forza elettrica agente su ogni carica e il campo elettrico al centro del triangolo



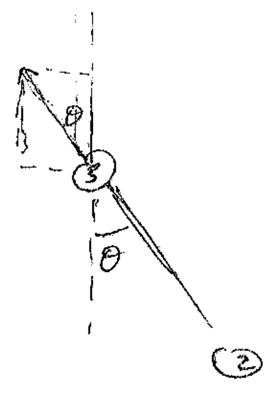
Il campo elettrico che agisce su q_3 vale $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

In modulo avremo

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

Per ragioni di simmetria e' chiaro che le componenti lungo x di $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ si annulleranno a vicenda

Scriviamo esplicitamente le componenti



$$\vec{E}_2 = (E_{2x}, E_{2y}) = (-E_2 \operatorname{sen}\theta, E_2 \cos\theta) =$$

$$= \left(\frac{-q \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 l^2}, \frac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \right)$$

$$\vec{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}) = (E_1 \operatorname{sen}\theta, E_1 \cos\theta) =$$

$$= \left(\frac{q \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 l^2}, \frac{q \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\vec{E} = \left(0, \frac{2q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \right) = \left(0, \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \right)$$

La forza sarà quindi data da

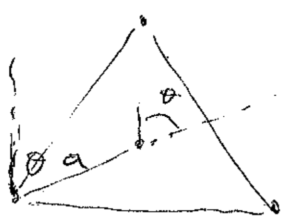
$$\vec{F} = q_3 \vec{E}$$

$$F = \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{9\,10^9 \frac{N m^2}{C^2} \; 0.25\,10^{-10} C^2 \; \sqrt{3}}{(0.5\,m)^2} = 0.9\sqrt{3}\,N$$

$$F = 1.56\,N$$

Nel centro invece per ragioni di simmetria avremo $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$

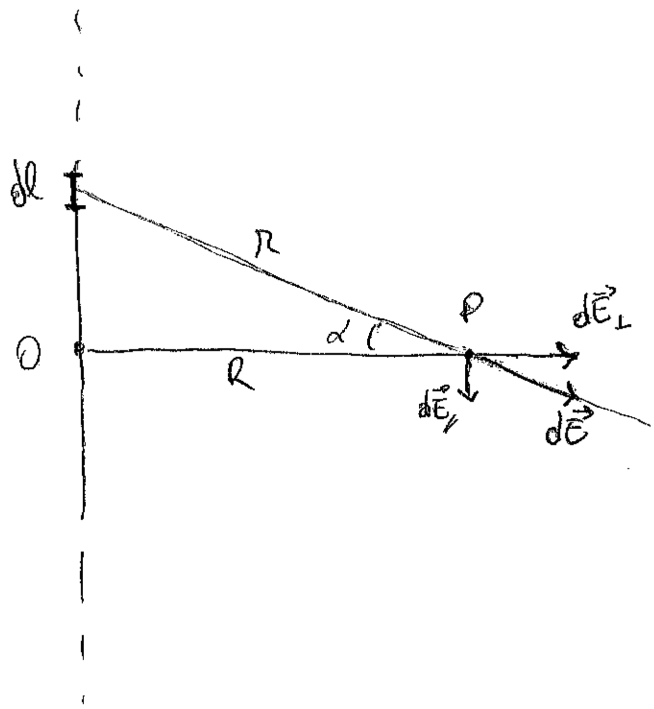
vediamolo ad esempio considerando, nel centro, la somma $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$



$$E = \frac{2q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \overset{\theta = 60^\circ}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = -\vec{E}_3$$

ESERCIZIO

Si calcoli il campo elettrico prodotto da un filo rettilineo uniformemente carico con densità λ nel punto P a distanza R.



consideriamo segmentini infinitesimi del filo di lunghezza dl, ciascun segmentino dl contiene una carica $dq = \lambda\, dl$ e pertanto genera in P un campo elettrico dE di intensità pari a

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}$$

Sfruttare la simmetria del problema!
Per ogni segmentino dl ne esisterà un altro simmetrico rispetto ad O che produce in P un campo elettrico di pari intensità ma diretto in modo tale che nella risultante si annulla la componente parallela al filo

La risultante può essere ottenuta sommando tutti i contributi infinitesimi perpendicolari al filo

$$dE_\perp = dE \cos\alpha$$

$$E = \int dE_\perp = \int dE \cos\alpha = \int \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\alpha}{r^2}$$

si noti che

$$R = r\cos\alpha \quad \longrightarrow \quad r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$\frac{l}{R} = \operatorname{tg}\alpha \;\rightarrow\; l = R\operatorname{tg}\alpha \;\rightarrow\; dl = R\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\Longrightarrow$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\cancel{R}}{\cancel{\cos^2\alpha}} \cos\alpha \frac{\cancel{\cos^2\alpha}}{R^{\cancel{2}}}\, d\alpha$$

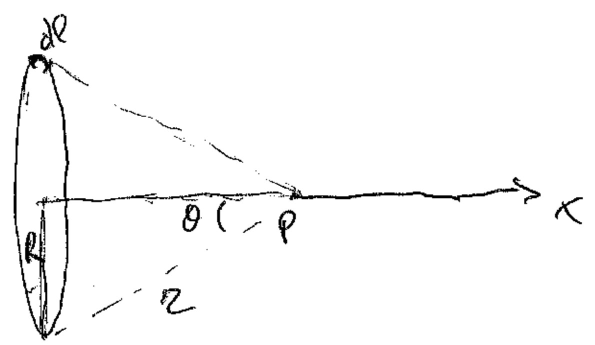
facciamo variare α tra 0 e $\pi/2$ per considerare il semiasse positivo y e poi moltiplichiamo per 2 per considerare il semiasse negativo

$$E_{TOT} = 2\left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \operatorname{sen}\alpha\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

ESERCIZIO

Una carica q è distribuita uniformemente su un anello sottile di raggio R. Calcolare il campo elettrico sull'asse dell'anello.



considero due elementi dl diametralmente opposti. ciascuno di essi contiene una carica $dq = \lambda dl$

con $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$

le componenti perpendicolari all'asse dell'anello si annullano fra loro. Contano solo le componenti lungo x

$$dE_x = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int dl = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 2\pi R$$

dato che

$$r^2 = R^2 + x^2$$

e che

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

sostituendo abbiamo

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \hat{u}_x =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

Passiamo ora a un disco

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi r\, dr \times \sigma}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{2\pi \sigma x}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} =$$

notiamo che

$$\frac{d}{dr}\left(x^2 + r^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{\cancel{2}}\left(x^2 + r^2\right)^{-3/2} \cancel{2} r$$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[-\left(x^2 - r^2\right)^{-1/2}\right]_0^R$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right]\hat{x}$$

per $R \to \infty$ otteniamo il campo generato da un piano infinito con densità di carica σ

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$