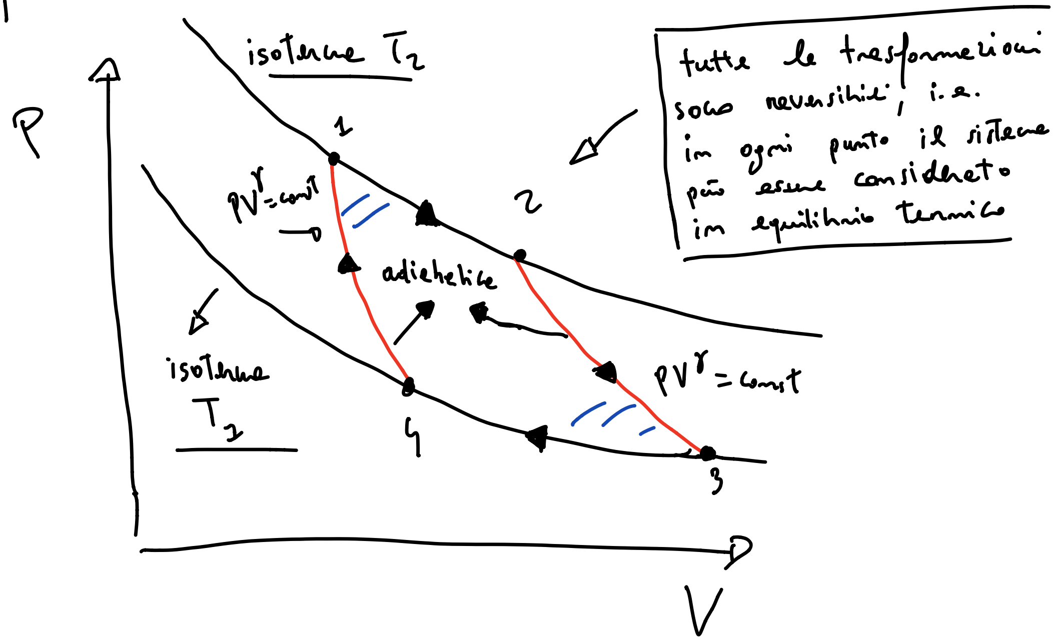
Esercizio

Ciclo di Carnot

Si lavora tra due sorgenti di calore a temperature T_1 e T_2 con $T_1 < T_2$.



1-2 isoterma a temperatura T_2

2-3 adiabatica $pV^\gamma = const$

3-4 isoterma a temperatura T_1

4-1 adiabatica $pV^\gamma = const$

1-2: il gas assorbe una certa quantità di calore Q_A dalla sorgente più calda. La pressione del gas scende, il volume aumenta,

2-3: dopo aver assorbito il calore Q_A, il gas viene isolato termicamente. Non scambia più calore e l'espansione continua adiabaticamente. La temperatura del gas diminuisce.

3-4: arrivato a temperatura T_1 il gas viene messo in contatto con la sorgente più fredda. La compressione del gas è accompagnata da una cessione di calore $|Q_C|$ alla sorgente fredda.

4-1: il gas viene isolato termicamente. La compressione è accompagnata da un aumento della temperatura del gas che ritorna nella condizione iniziale.

Il lavoro totale compiuto dal gas è dato da

$$W = Q_A - |Q_C|$$

in un ciclo termodinamico la variazione di energia interna $\Delta U = 0$. U è una funzione di stato, e lo stato iniziale e finale in un ciclo sono identici.

se $W > 0$ macchina termica

mentre il rendimento del ciclo è definito da

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Il lavoro totale fatto dal gas è dato dall' area del ciclo nella precedente figura.

Calcoliamo Q_A assumendo che il gas sia un gas perfetto e che i volumi iniziali e finali nella isoterma 1-2 siano V_1 e V_2.
In un gas perfetto l' energia interna è unicamente funzione della temperatura pertanto nella isoterma 1-2, utilizzando il 1° principio si ha

perché $dU = 0$

$$Q_A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = nRT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Allo stesso modo il calore $|Q_C|$ ceduto nella isoterma 3-4 è dato da (indichiamo di nuovo con V_3 e V_4 il volume iniziale e finale nella isoterma 3-4)

$$Q_C = \int_{V_3}^{V_4} p\,dV = nRT_1 \log \frac{V_4}{V_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Q_C| = nRT_1 \log \frac{V_3}{V_4}$$

Abbiamo pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{nRT_1 \log \frac{V_3}{V_4}}{nRT_2 \log \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\log \frac{V_3}{V_4}}{\log \frac{V_2}{V_1}}$$

Per calcolare il rendimento dobbiamo dunque valutare:

$$\frac{\log \frac{V_3}{V_4}}{\log \frac{V_2}{V_1}}$$

Per farlo utilizziamo il fatto che nelle trasformazioni adiabatiche

$PV^\gamma = \text{const}$ o equivalentemente $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$

$\left[p \propto \frac{T}{V}\right]$

Nella trasformazione 2-3 abbiamo:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1}$$

mentre nella trasformazione 4-1 abbiamo:

$$T_1 V_4^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1}$$

pertanto

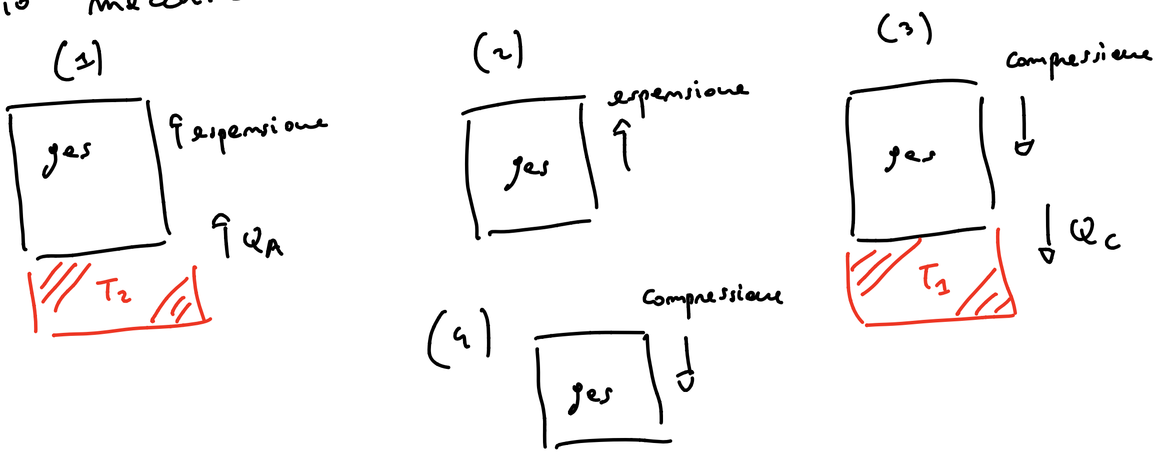
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{\log \frac{V_3}{V_4}}{\log \frac{V_2}{V_1}} = 1$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Il rendimento in un ciclo di Carnot dipende unicamente dal rapporto delle temperature T_1 e T_2 con cui si lavora.

Esempio macchina Carnot:



Commenti:

1) il rendimento del ciclo di Carnot, che abbiamo rigorosamente calcolato per un gas perfetto, non dipende in realtà dal tipo di gas considerato.

2) il rendimento di qualsiasi altro ciclo termodinamico che lavora con sorgenti a temperature T_1 e T_2 è sempre $\leq$ del rendimento del corrispondente Ciclo di Carnot.

(1) + (2) sono conseguenze del teorema di Clausius:

In una trasformazione ciclica in cui il sistema scambia calore con n sorgenti si ha:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0}$$

dove ΔQ_i è il calore scambiato con la sorgente i-esima e T_i la sua temperatura.

Se tutte le trasformazioni sono reversibili allora

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$$

variazione di entropia

In un ciclo in cui si scambia calore soltanto con due sorgenti a temperature T_1 e T_2 si ha pertanto (assumiamo $T_2 > T_1$)

$$\frac{Q_A}{T_2} + \frac{Q_C}{T_1} = \frac{Q_A}{T_2} - \frac{|Q_C|}{T_1} \leq 0$$

Q_A = calore assorbito dalla sorgente a temperatura T_2

$|Q_C| > 0$ = calore ceduto alla sorgente a temperatura T_1

In un generico ciclo di questo tipo, in cui possono esserci sia trasformazioni reversibili che irreversibili, si ha:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

ma

$$\frac{Q_A}{T_2} \leq \frac{|Q_C|}{T_1} \Rightarrow \frac{|Q_C|}{Q_A} \geq \frac{T_1}{T_2}$$

pertanto

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

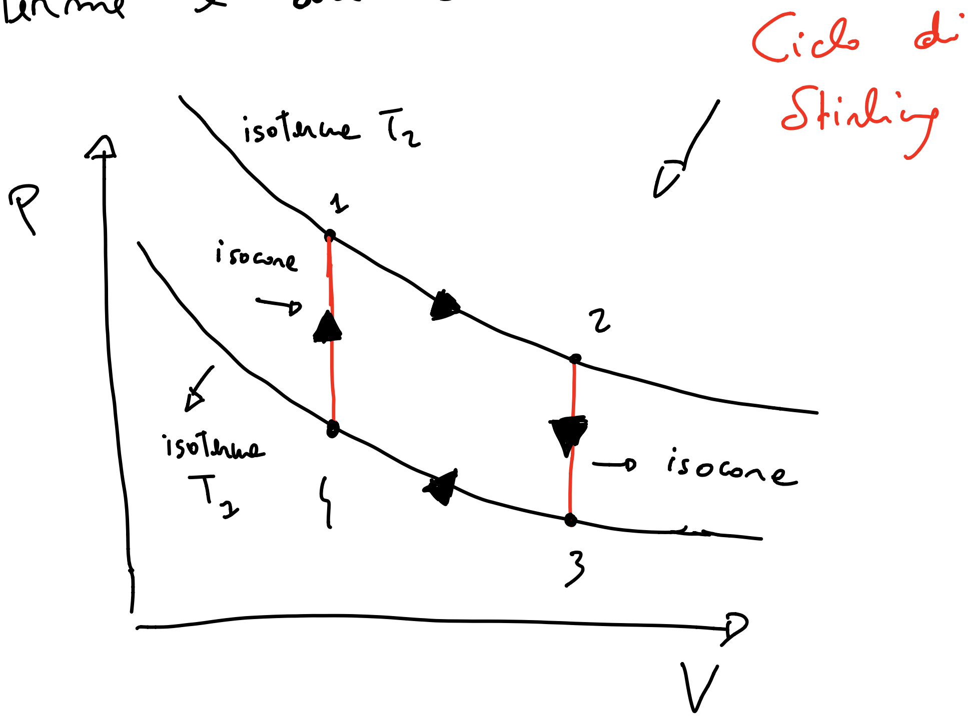
L'uguaglianza dipende unicamente dalla presenza o meno di trasformazioni irreversibili.

Pertanto il rendimento nel ciclo di Carnot non dipende dal gas utilizzato.

Esercizio.

Ciclo di Stirling.

Il ciclo di Stirling è un ciclo termodinamico formato da 4 trasformazioni reversibili, due isoterme e due isocore.



1-2 e 3-4 sono le stesse trasformazioni isoterme già viste nella discussione del ciclo di Carnot.

2-3 : trasformazione a volume costante.
La pressione e la temperatura del gas diminuiscono. Essendo $dV = 0$ si ha:

$$dU = dQ \quad (1^{\circ} \text{ principio})$$

e il gas cede calore ad infinite sorgenti con temperature T_2, $T_2 - dt$, $T_2 - 2dt$, ...
... T_1

4-1 : trasformazione a volume costante.
La pressione e la temperatura del gas aumentano. Essendo $dV = 0$ si ha:

$$dU = dQ \quad (1^{\circ} \text{ principio})$$

il gas in questo caso assorbe calore dalle infinite sorgenti introdotte nella trasformazione 2-3

Vogliamo di nuovo calcolare il rendimento del ciclo.

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Assumiamo che il gas si comporti come un gas perfetto.

A differenza del ciclo di Carnot, il gas assorbe calore sia in 1-2 che in 4-1, mentre cede calore sia in 3-4 che in 2-3.

Indichiamo con:

Q_{12} il calore assorbito in 1-2

Q_{23} il calore ceduto in 2-3

Q_{34} il calore ceduto in 3-4

Q_{41} il calore assorbito in 4-1.

Dal precedente esercizio sappiamo che

$$Q_{12} = nRT_2 \log \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_{34} = nRT_1 \log \frac{V_1}{V_2} \qquad \left[\begin{array}{c}\text{in questo caso} \\ V_3 = V_2 \, , \; V_4 = V_1\end{array}\right]$$

il calore ceduto durante la 2-3 si ricava facilmente da

$$Q_{23} = \Delta U = n c_v (T_1 - T_2) \qquad (\Delta V = 0)$$

mentre il calore assorbito durante la 4-1 è dato da:

$$Q_{41} = \Delta U = n c_v (T_2 - T_1)$$

$$\boxed{c_v = \text{calore specifico molare a volume costante.}}$$

Notiamo che $Q_{34} = - Q_{41}$ quindi il calore scambiato tra il gas e le infinite sorgenti è complessivamente nullo.

Si ha pertanto: $Q_A = Q_{12} = nRT_2 \log \frac{V_2}{V_1}$

$$|Q_c| = -Q_{34} = nRT_1 \log \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

stesso rendimento del ciclo di Carnot.

Esercizio

Ciclo frigorifero

Si definisce ciclo frigorifero, un ciclo termodinamico in cui complessivamente il sistema assorbe lavoro e cede calore

$$\left[Q = W < 0 \right]$$

Tipicamente il sistema assorbe un calore Q_0 dalla sorgente più fredda, cede un calore Q_c alla sorgente più calda e subisce un lavoro

$$W = Q_0 + Q_c < 0$$

$$\Rightarrow |Q_c| > Q_0$$

Il calore ceduto è sempre in modulo più grande di quello assorbito.

Si definisce (analogamente al rendimento delle macchine termiche) l'efficienza ξ

$$\xi = \frac{Q_0}{|W|}$$

Il ciclo di Carnot percorso in senso inverso è un esempio di ciclo frigorifero.

Il sistema assorbe calore in 3-4 e lo cede in 1-2.

dal momento che il ciclo è percorso in senso inverso, cambia segno l'integrale $\int pdV$ ed il lavoro W viene subito dal gas e non compiuto.

Pertanto

$$Q_0 = nRT_1 \log \frac{V_3}{V_4}$$

$$Q_C = nRT_2 \log \frac{V_1}{V_2}$$

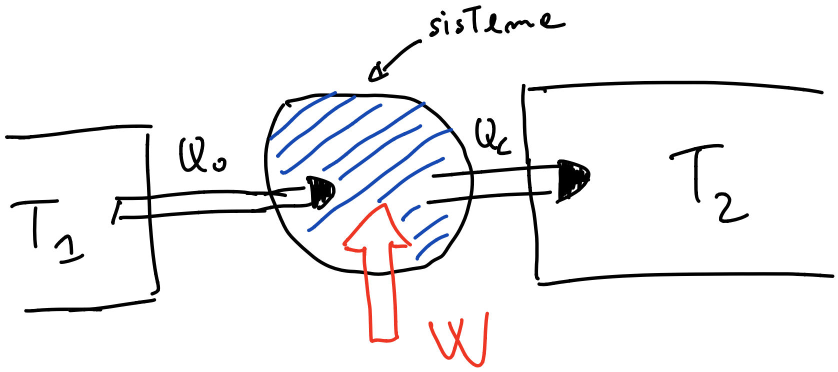
da cui

$$\zeta = \frac{Q_0}{W} = \frac{Q_0}{|Q_C + Q_0|} = \frac{\cancel{n}RT_1 \log \frac{V_3}{V_4}}{\cancel{n}RT_2 \log \frac{V_2}{V_1} - \cancel{n}RT_1 \log \frac{V_3}{V_4}}$$

$$= \frac{T_1 \log \frac{V_3}{V_4}}{T_2 \log \frac{V_2}{V_1} - T_1 \log \frac{V_3}{V_4}}$$

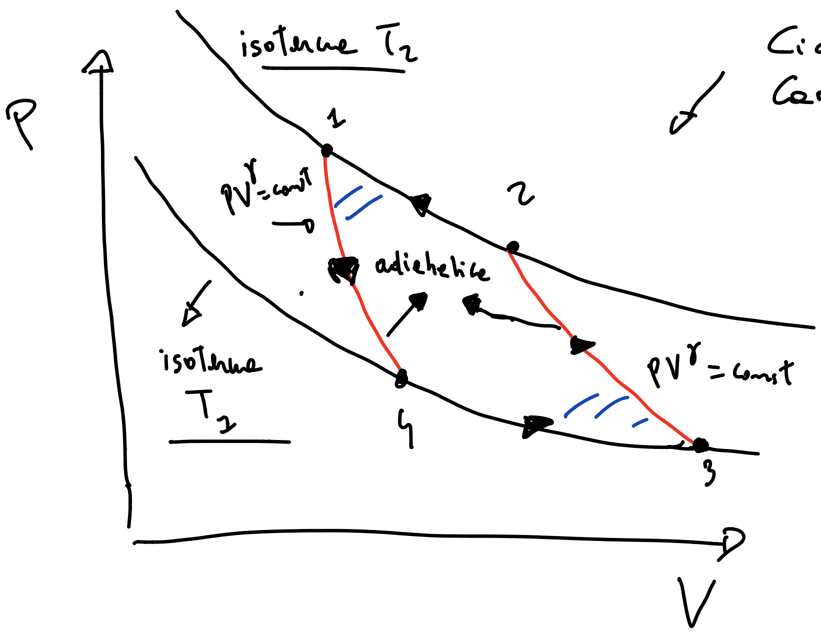
ricordandoci che $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$ si ha

$$\zeta = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$



$T_1 < T_2$

schematizzazione ciclo frigorifero.



Ciclo di Carnot inverso