Brevissima introduzione al concetto di derivata e integrale

Alessio Mattia Leonardi[1]

17 Marzo 2021

[1] a.m.leonardi@hotmail.it

Indice

1 Funzione di una variabile: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.1 La retta secante

Supponiamo di avere una funzione $f(x)$ come quella rappresentata nel grafico sottostante e vogliamo calcolare la retta s passante per due suoi punti A e B: tale retta è la *retta secante*[1] ed è rappresentata in blu nel grafico.

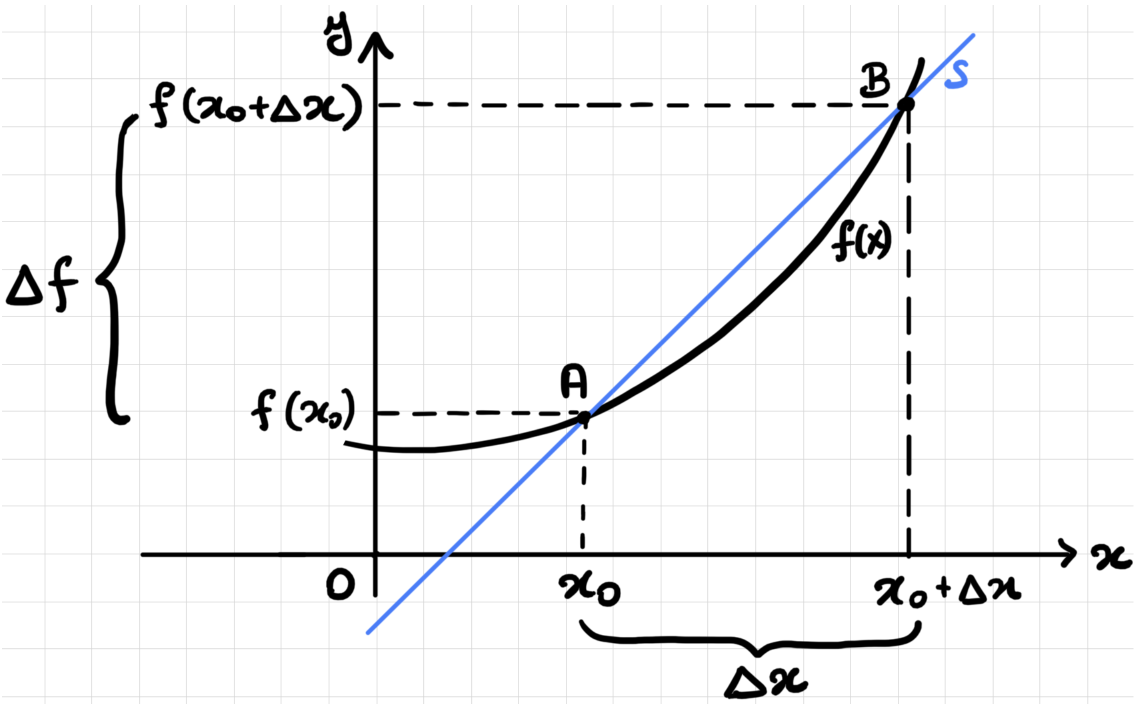


Figura 1: Retta secante tra due punti A e B di una funzione $f(x)$

Supponiamo che le coordinate del punto A siano:

$$A = (x_0, f(x_0)) \tag{1}$$

ovvero la coordinata x_A è un valore fisso x_0 mentre la sua coordinata y_A sarà il valore della funzione $f(x)$ calcolato in quel punto $y_A = f(x_A) = f(x_0)$.
Le coordinate del punto B saranno invece:

$$B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \tag{2}$$

ovvero la coordinata x_B è pari alla coordinata x_A aumentata di un incremento Δx mentre la coordinata y_B sarà il valore della funzione $f(x)$ calcolato in quel punto $y_B = f(x_B) = f(x_0 + \Delta x)$.

Di conseguenza l'incremento della variabile indipendente Δx tra il punto A e il punto B sarà pari alla differenza tra x_B e x_A:

$$\Delta x = x_B - x_A = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x \tag{3}$$

In modo analogo, l'incremento della funzione Δf tra il punto A e il punto B sarà pari alla differenza tra $f(x_B)$ e $f(x_A)$:

$$\Delta f = f(x_B) - f(x_A) = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) \tag{4}$$

[1] dal latino *secare* cioè tagliare in due: la retta secante passa per due punti, interseca la funzione in due suoi punti

Possiamo allora andare a calcolare l'equazione della retta secante s passante per i punti A e B che sarà del tipo:

$$y - y_A = m_s(x - x_A) \tag{5}$$

dove con m_s abbiamo indicato il coefficiente angolare della retta s.
Ora il coefficiente angolare è definito dall'incremento lungo l'asse y rispetto a quello lungo l'asse y:

$$m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{6}$$

Ricordandoci come abbiamo espresso le coordinate dei punti A (eq. 1) e B (eq. 2):

$$m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} \tag{7}$$

Tenendo infine presenti le definizioni degli incrementi lungo l'asse x (eq. 3) e y (eq. 4):

$$m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{8}$$

A prescindere ora dall'espressione che la retta secante avrà una volta sostituito il valore di m_s nell'eq. 5, ciò che ci interessa è l'espressione di m_s: il coefficiente angolare della retta secante è pari al rapporto tra l'incremento della funzione Δf tra i punti x_0 e $x_0 + \Delta x_0$ e l'incremento della variabile indipendente Δx.
Infine possiamo vedere che si può legare il coefficiente angolare all'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse.

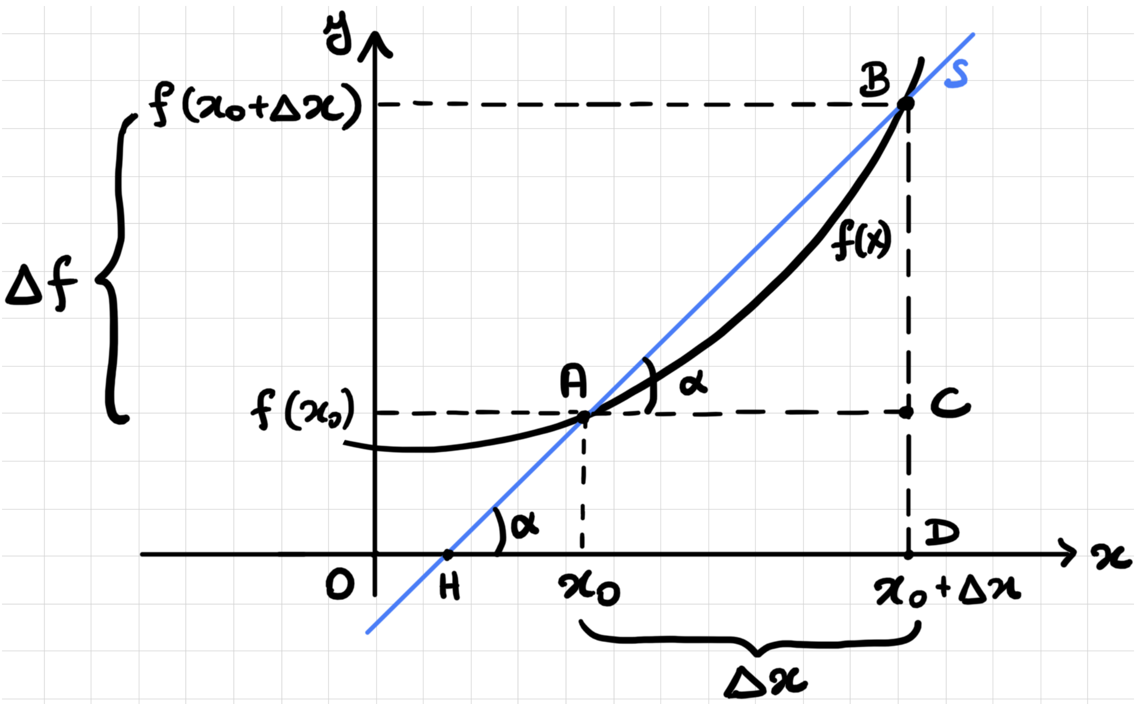


Figura 2: Si può determinare l'angolo che la retta secante forma con l'asse delle ascisse

Notiamo che l'angolo $B\widehat{A}C$ è uguale all'angolo $B\widehat{H}D$ in quanto generati da una retta tagliata da due parallele (angoli *corrispondenti*).
Ora:

$$\tan B\widehat{A}C = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{9}$$

Per la congruenza degli angoli, allora anche la tangente dell'angolo $B\widehat{H}D$ sarà uguale alla tangente dell'angolo $B\widehat{A}C$.
Quindi:

$$B\widehat{H}D = B\widehat{A}C \rightarrow \tan B\widehat{H}D = \tan B\widehat{A}C \tag{10}$$

L'angolo $B\widehat{H}D$ è proprio l'angolo che la retta secante s forma con l'asse delle x; detto α tale angolo, allora avremo che:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = m_s \tag{11}$$

Quindi il coefficiente angolare della retta secante (ed in generale di una qualsiasi retta) ci dà un'ulteriore informazione: l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse.

1.1.1 Esempio

Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = x^2$, il punto $A = (x_0, f(x_0)) = (3, f(3)) = (3, 9)$ e un incremento $\Delta x = 2$: di conseguenza il punto B avrà coordinate $B = (x_0, f(x_0 + \Delta x)) = (3 + 2, f(3 + 2)) = (5, 25)$.

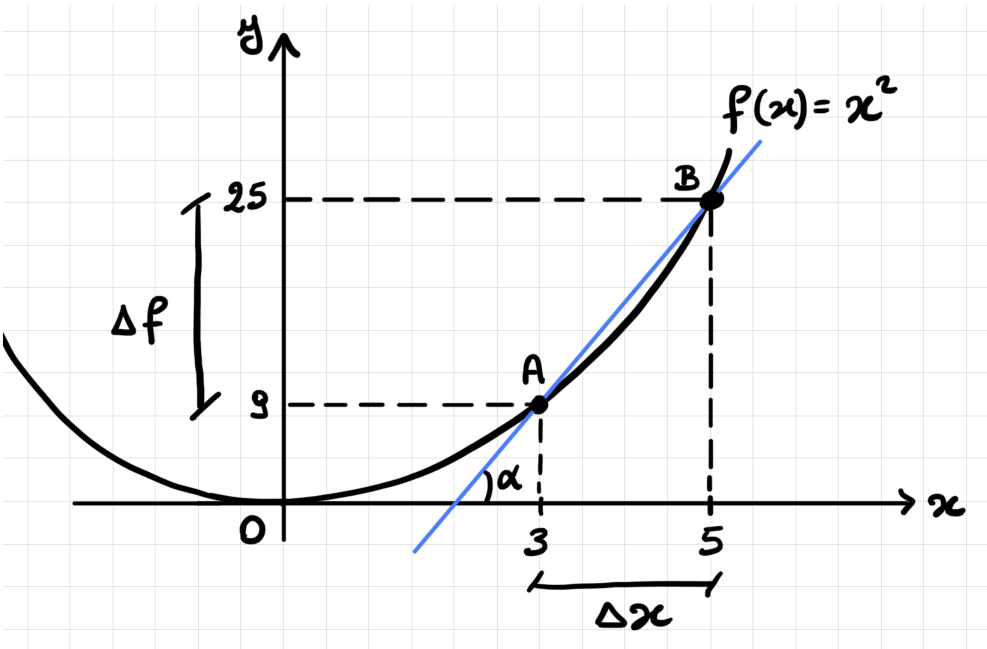


Figura 3: Retta secante per A e B alla funzione $f(x) = x^2$

Allora il coefficiente angolare della retta secante per A e B sarà (eq. 7):

$$m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(3+2) - f(3)}{(3+2) - 3} = \frac{25 - 9}{2} = 8 \tag{12}$$

Quindi la retta secante ha equazione:

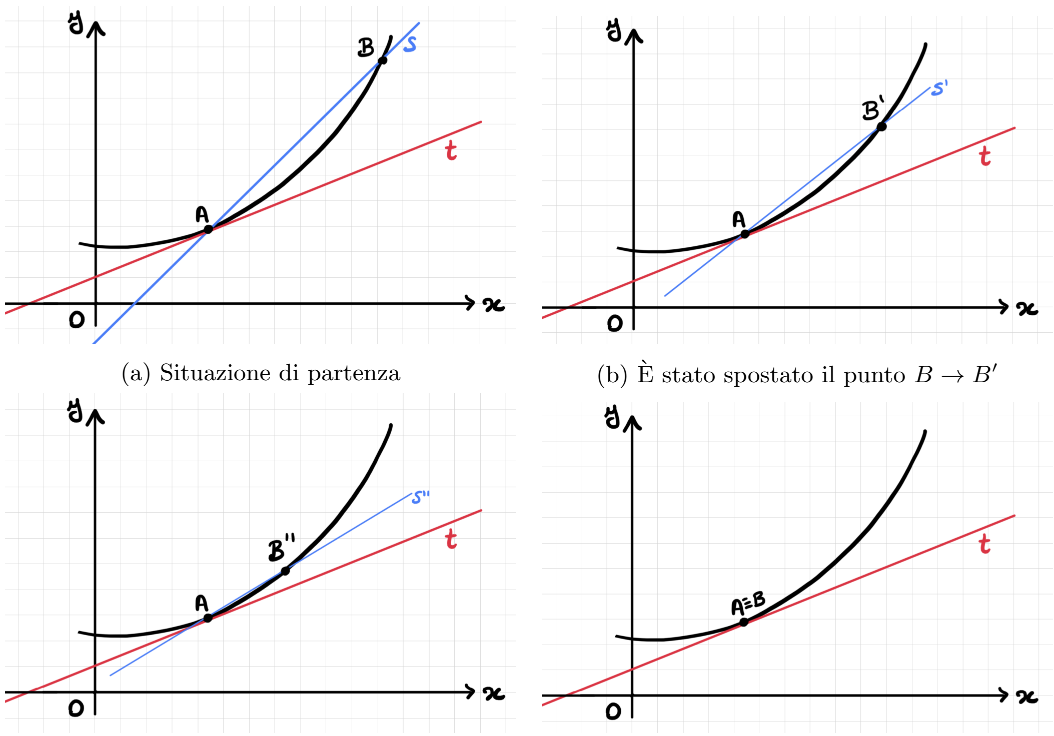
$$y - y_A = m_s(x - x_A) \rightarrow y - 9 = 8(x - 3) \rightarrow y = 8x - 15 \tag{13}$$

Inoltre l'angolo che la retta forma con l'asse delle x varrà:

$$\tan\alpha = m_s \rightarrow \tan\alpha = 8 \rightarrow \alpha \simeq 82.87° \tag{14}$$

1.2 La retta tangente

Fino ad ora abbiamo pensato quindi di fissare un punto x_0 e di incrementarlo di una quantità Δx. Poi abbiamo calcolato il valore della funzione $f(x)$ in questi due punti e, rapportando il valore di Δf a quello di Δx, abbiamo determinato il coefficiente angolare della retta secante.
Vogliamo ora determinare non più la retta secante per A e B ma quella tangente[2] ad $f(x)$ in A. Per farlo allora possiamo pensare a quanto fatto nel precedente paragrafo ma in un modo più dinamico. Possiamo cioè prendere il punto B e cominciare a spostarlo lungo la curva $f(x)$ fino a farlo coincidere con il punto A.



(a) Situazione di partenza

(b) È stato spostato il punto $B \to B'$

(c) È stato spostato il punto $B' \to B''$

(d) $B \equiv A$: la secante coincide con la tangente

Figura 4: Spostamento del punto $B \to A$: la retta secante blu approssima sempre meglio la retta tangente rossa fino a coincidere con essa quando $B \equiv A$

Così facendo, notiamo che nel mentre il punto B si sposta verso il punto A, la retta secante s cambia di inclinazione avvicinandosi sempre più a quella della retta tangente t. Quando il punto B coincide con il punto A, la retta secante coinciderà con quella tangente e quindi i due coefficienti angolari saranno uguali.
Come si esprime tutto ciò in modo analitico?
Dobbiamo intanto ricordarci che il punto A ha coordinate:

$$A = (x_0, f(x_0)) \tag{15}$$

Mentre il punto B ha coordinate:

$$B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \tag{16}$$

Infine la retta secante ha equazione:

$$y - y_A = m_s(x - x_A) \qquad \text{con} \qquad m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{17}$$

[2]dal latino *tangere* cioè toccare: la retta tangente interseca, tocca la curva in un solo punto

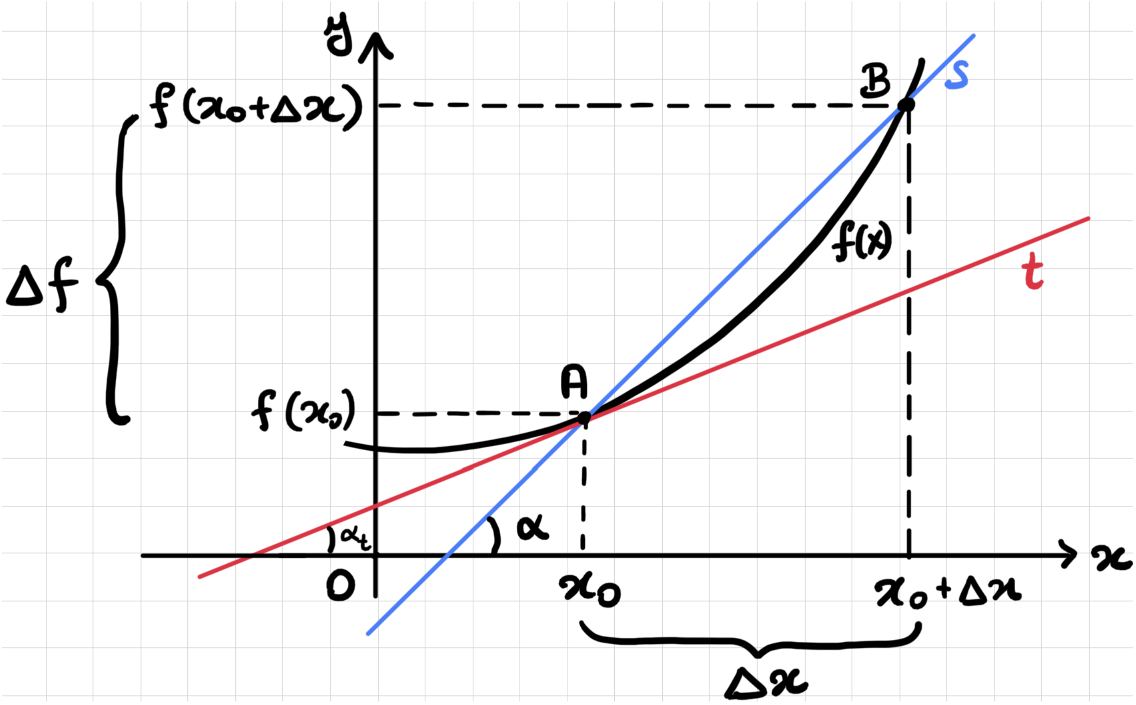


Figura 5: Retta secante (blu) tra due punti A e B di una funzione $f(x)$ e la retta tangente (rosso) in A

Allora quello che possiamo osservare è che, via via che B si avvicina ad A, $x_B \to x_A$ e anche $y_B \to x_B$ cioè entrambe le coordinate del punto B tenderanno a essere quelle del punto A.

$$B \to A \implies \begin{cases} x_0 + \Delta x \to x_0 \\ \\ f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0) \end{cases} \tag{18}$$

La condizione di retta tangenza si ottiene quando $\Delta x = 0$ in quanto così facendo:

$$x_B|_{\Delta x=0} = (x_0 + \Delta x)|_{\Delta x=0} = x_0 \equiv x_A \tag{19}$$

$$y_B|_{\Delta x=0} = f(x_0 + \Delta x)|_{\Delta x=0} = f(x_0) \equiv y_A \tag{20}$$

E quindi il punto B coincide definitivamente con A.

Dal punto di vista dell'equazione della retta, via via che B si muove cioè che Δx diventa sempre più prossimo a 0, sta cambiando soltanto il suo coefficiente angolare in quanto nell'eq. 17 x_A e y_A sono fissati mentre m_s sta variando (come si vede anche dai Grafici 4).
Quando $\Delta x = 0$ il coefficiente angolare della retta secante m_s coinciderà con quello della retta tangente m_t.
Ricordando come è definito m_s, allora si scrive che:

Definizione 1 (Derivata)

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{21}$$

Il valore quindi del coefficiente angolare della retta tangente ad una funzione $f(x)$ in un suo punto A, che si indica con $f'(x_0)$, è il limite del coefficiente angolare della retta secante quando $\Delta x \to 0$. La quantità $f'(x_0)$ prende il nome di *derivata* della funzione $f(x)$ nel punto x_0 e, per esprimere sinteticamente l'espressione nell'eq. 21, si indica come:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \tag{22}$$

Nel paragrafo 1.3 discuteremo un po' meglio il significato dei simboli Δf e df.
Poiché inoltre abbiamo visto che il coefficiente angolare è legato al valore della tangente dell'angolo α che la retta forma con l'asse delle ascisse, avremo anche in questo caso che:

$$\tan \alpha_t = m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{23}$$

A partire quindi da questa definizione di derivata è possibile definire la *funzione derivata* come l'applicazione che associa ad ogni punto x il valore della derivata della funzione in quel punto $f'(x)$.

$$f'(x): \quad \forall x \in \mathbb{R} \to \frac{df}{dx}(x) \tag{24}$$

1.2.1 Esempio

Riprendiamo sempre l'esempio 1.1.1 dove abbiamo preso in esame la funzione $f(x) = x^2$ ed il punto $A = (3, 9)$.

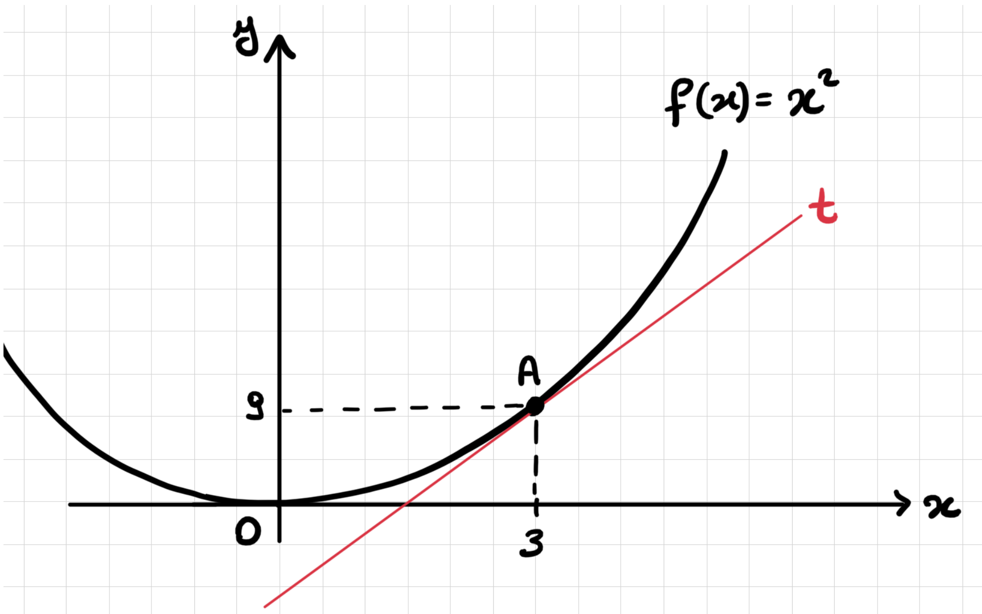


Figura 6: Retta tangente in A alla funzione $f(x) = x^2$

Vogliamo ora calcolare la retta tangente: il primo modo che possiamo fare è una procedura molto classica: prendo la funzione $f(x)$, prendo una generica retta passante per il punto A: $y - y_A = m(x - x_A)$, calcolo l'intersezione tra $f(x)$ e la generica retta e impongo che il sistema abbia una sola soluzione. Questa procedura consiste proprio nel calcolare la retta tangente in quanto impongo che l'intersezione tra la generica retta e la funzione sia costituita da un solo punto.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = m(x-3) + 9 \end{cases} \tag{25}$$

Allora risolvendo il sistema si ha:

$$x^2 - mx - 9 + 3m = 0 \tag{26}$$

Chiedere che il sistema abbia una sola soluzione significa dire che la precedente equazione deve avere una e una sola soluzione ovvero che il determinante di quest'equazione deve essere pari a 0:

$$\Delta = 0 \longrightarrow m^2 - 12m + 36 = 0 \longrightarrow (m-6)^2 = 0 \longrightarrow m = 6 \tag{27}$$

Quindi la retta tangente ha coefficiente angolare $m = 6$.

Vediamo ora utilizzando il concetto di derivata come si può operare.
Procediamo similmente a quanto fatto nell'esempio 1.1.1 ma ora, anziché fissare l'incremento Δx, lo lasciamo variabile (perché dovrà tendere a 0 per restituirci il coefficiente angolare della retta tangente).
Allora il coefficiente angolare della retta secante si scriverà come:

$$\begin{aligned} m_s =& \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0} = \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{(3+\Delta x)-3} = && (28) \\ =& \frac{(3+\Delta x)^2-9}{\Delta x} = \frac{9+\Delta x^2+6\Delta x-9}{\Delta x} = && (29) \\ =& \frac{\Delta x^2+6\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x+6)}{\Delta x} = && (30) \\ =& \Delta x+6 && (31) \end{aligned}$$

Quest'espressione rappresenta quindi il coefficiente angolare della retta secante per i punti $A = (3, 9)$ e $B = (3 + \Delta x, f(3 + \Delta x))$ per un generico incremento Δx della variabile indipendente.
Infatti possiamo vedere che se mettiamo $\Delta x = 2$ come nell'esempio 1.1.1, riotteniamo $m_s = 8$ (come nell'eq. 12).
Noi sappiamo già in questo caso che la retta tangente deve avere coefficiente angolare (eq. 27) $m_t = 6$: infatti se portiamo Δx verso valori sempre più piccoli:

$$\begin{aligned} &\Delta x = 2 \longrightarrow m = 8 \\ &\Delta x = 1 \longrightarrow m = 7 \\ &\Delta x = 0.5 \longrightarrow m = 6.5 \\ &\Delta x = 0.1 \longrightarrow m = 6.1 \\ &\Delta x = 0.01 \longrightarrow m = 6.01 \\ &\Delta x = 0.001 \longrightarrow m = 6.001 \end{aligned}$$

È evidente che proseguendo questo decremento fino a che $\Delta x = 0$ si ha un coefficiente angolare sempre più prossimo a $m_t = 6$. Per $\Delta x = 0$ (che corrisponde proprio a portare, facendo riferimento al Grafico 4, il punto B in quello A), si ha proprio $m = m_t = 6$.
Sfruttando quindi proprio la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si vede quindi che, riprendendo l'eq. 28:

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + 6 = 6 \qquad (32)$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0$ cioè se porto $\Delta x \to 0$ allora $\Delta x = 0$.
L'utilizzo della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale ci consente di poter determinare con più semplicità il valore del coefficiente angolare della retta tangente, specialmente nel caso in cui la funzione $f(x)$ è più complessa e non si può utilizzare la prima strategia mostrata in quest'esempio.
La retta tangente avrà in definitiva equazione:

$$t: \quad y = 6x - 9 \qquad (33)$$

Si può poi verificare facilmente che se al posto del punto $A = (3, 9)$ si fosse scelto un punto generico $(x, f(x))$, allora $m_t = 2x$.
Ciò ci permette di definire la funzione derivata $f'(x)$ della funzione $f(x) = x^2$ come:

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x \qquad (34)$$

1.3 Il differenziale

Abbiamo quindi definito la derivata $f'(x_0)$ di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 come il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $A = (x_0, f(x_0))$ che si ottiene come limite del rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{35}$$

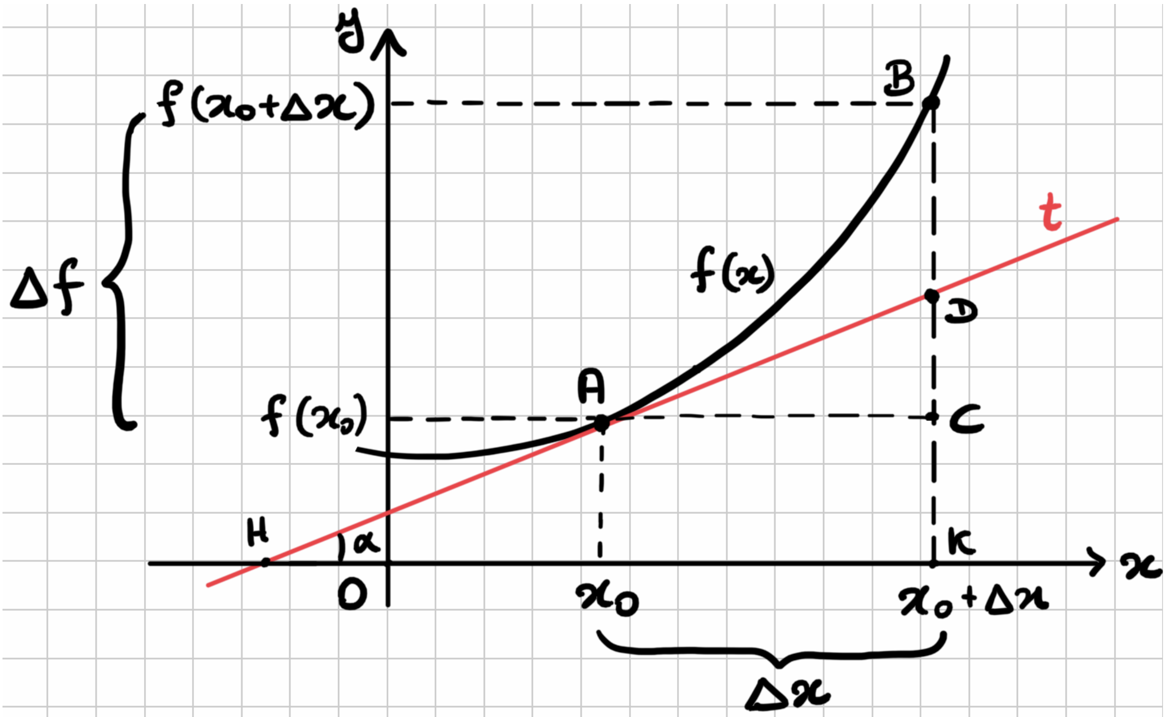


Figura 7: Grafico della funzione $f(x)$ con la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$

Osservando questa figura, possiamo vedere che la definizione di derivata (eq. 35) ci dice che per calcolare la derivata di una funzione in un punto occorre fare sostanzialmente il rapporto tra due segmenti[3] $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, mandando $\overline{AC} \to 0$:

$$m(x_0) = \lim_{\overline{AC} \to 0} \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = f'(x_0) \tag{36}$$

Questo perché:

- il segmento $\overline{BC}$ è pari proprio alla differenza $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ cioè è pari all'incremento della funzione: $\overline{BC} = \Delta f$
- il segmento $\overline{AC}$ è pari proprio alla differenza $(x_0 + \Delta x) - x_0$ ovvero all'incremento della variabile indipendente: $\overline{AC} = \Delta x$

Per ora non abbiamo fatto altro che riscrivere il concetto di derivata utilizzando la lunghezza dei segmenti del grafico.
Ora osserviamo un'altra cosa: prendiamo in considerazione il triangolo ACD per il quale si ha che:

$$\tan D\widehat{A}C = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \tag{37}$$

[3] la divisione tra le due quantità deriva dal fatto che stiamo calcolando un coefficiente angolare, quindi un $\Delta y/\Delta x$

Ma l'angolo $D\widehat{A}C$ è uguale all'angolo $D\widehat{H}K = \alpha$ ovvero all'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse:

$$\tan D\widehat{A}C = \tan D\widehat{H}K = \tan\alpha = f'(x_0) \tag{38}$$

L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che da definizione il valore della derivata di una funzione in un punto è pari al coefficiente angolare della retta tangente in quel punto ovvero al valore della tangente dell'angolo che forma con l'asse delle x (eq. 23).
Allora combinando quest'ultima informazione con l'eq. 37 si ha che

$$f'(x_0) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \tag{39}$$

Quindi abbiamo due definizioni diverse per la derivata di una funzione in un punto:

$$f'(x_0) = \lim_{\overline{AC}\to 0} \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \qquad\qquad f'(x_0) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \tag{40}$$

La prima definizione coinvolge un processo al limite mentre la seconda no; oltre a ciò, coinvolgono due segmenti diversi: $\overline{BC}$ da una parte e $\overline{DC}$ dall'altra.
Ma stiamo considerando lo stesso oggetto matematico: quindi le due definizioni devono coincidere!
Vediamo perché: riferendoci al Grafico 7, possiamo vedere che:

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} \tag{41}$$

Allora possiamo provare a dividere questa relazione per $\overline{AC}$ e avremo che:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \tag{42}$$

Utilizzando la seconda relazione nell'eq. 40 (questa è una relazione di tipo geometrico quindi è sempre valida):

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} + \frac{f'(x_0)\cdot\overline{AC}}{\overline{AC}} \tag{43}$$

Passiamo ora al limite per $\overline{AC} \to 0$:

$$\lim_{\overline{AC}\to 0} \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \lim_{\overline{AC}\to 0} \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} + \lim_{\overline{AC}\to 0} f'(x_0) \tag{44}$$

Tenendo presente ora la prima relazione dell'eq. 40 (la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale):

$$\lim_{\overline{AC}\to 0} \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = f'(x_0) \tag{45}$$

Mentre:

$$\lim_{\overline{AC}\to 0} f'(x_0) = f'(x_0) \tag{46}$$

in quanto $f'(x_0)$ non dipende da $\overline{AC}$ e quindi l'operazione di limite non ha un alcun effetto sull'argomento del limite che rimane invariato.
Abbiamo quindi che:

$$f'(x_0) = \lim_{\overline{AC}\to 0} \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} + f'(x_0) \tag{47}$$

Ovvero:

$$\lim_{\overline{AC}\to 0} \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = 0 \tag{48}$$

Questa relazione ci dice che, per poter far 0 il limite, $\overline{BD}$ deve andare a 0 più velocemente di $\overline{AC}$ quando questi va a 0[4]: formalmente si dice che è un *infinitesimo di ordine superiore* ad $\overline{AC}$.

[4] altrimenti il limite farebbe $+\infty$ ("$\overline{BD}/0 = \infty$")

Che cosa significa questo? Sostanzialmente ci sta dicendo che quando $\overline{AC}$ ovvero Δx è molto piccolo, l'incremento della funzione:

$$\Delta f = \overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} \simeq \overline{DC} \tag{49}$$

cioè se Δx è molto piccolo, il contributo che il segmento $\overline{BD}$ apporta alla somma $\overline{BD} + \overline{DC}$ (che definisce l'incremento della funzione) è trascurabile.
Di conseguenza in un processo al limite, solo il segmento $\overline{DC}$ è rilevante per determinare l'incremento della funzione e quindi il valore della sua derivata.
Questo ci consente anche di riconoscere che in sostanza le due definizioni date precedentemente:

$$f'(x_0) = \lim_{\overline{AC}\to 0} \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \qquad\qquad f'(x_0) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \tag{50}$$

sono equivalenti in quanto nel limite di $\overline{AC} \to 0$ il segmento $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$ è uguale al segmento $\overline{DC}$.
È quindi vero che per determinare la derivata di una funzione è sufficiente considerare il rapporto tra il segmento $\overline{DC}$ e $\overline{AC}$ e questo è equivalente a considerare un rapporto tra tutto l'incremento della funzione $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ (nel limite di $\overline{AC} \to 0$).
Poiché quindi questo segmento $\overline{DC}$ ha un ruolo molto importante nell'ambito della definizione di derivata, gli viene dato nome di *differenziale* della funzione $f(x)$ nel punto x_0.

Definizione 2 (Differenziale di una funzione di una variabile (1))

$$\overline{DC} = f'(x_0) \cdot \overline{AC} \tag{51}$$

Il differenziale è quindi definito dal prodotto del valore della derivata in un punto per l'incremento della variabile indipendente $\overline{AC}$ (Grafico 7)
Notiamo che il differenziale di una funzione può essere determinato per un qualsiasi incremento $\overline{AC}$ e il suo valore approssimerà tanto meglio quello della lunghezza di $\overline{BC}$ quanto più piccolo sarà l'incremento $\overline{AC}$ (l'esempio 1.3.1 mostra questa proprietà).

Cerchiamo ora di dare una definizione utilizzando un linguaggio più formale: consideriamo il seguente grafico che è analogo al Grafico 7 ma viene utilizzato un incremento infinitesimo dx della variabile indipendente.

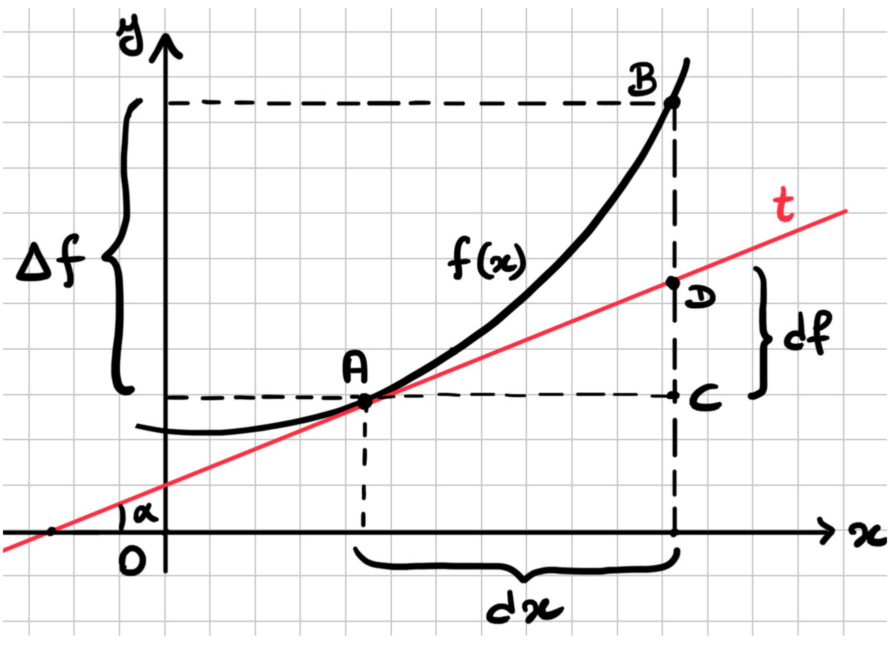


Figura 8: Grafico della funzione $f(x)$ con la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$

Nel limite di $\Delta x \to 0$, la funzione derivata è pari a:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{52}$$

Definendo allora dx l'incremento infinitesimo della variabile indipendente, abbiamo visto che questa definizione coincide nel determinare il rapporto tra la lunghezza del differenziale della funzione ($\overline{DC}$) e l'incremento della variabile indipendente dx ($\overline{AC}$).
Si definisce allora il *differenziale df* ($\overline{DC}$) della funzione nel punto x_0, il prodotto:

Definizione 3 (Differenziale di una funzione di una variabile (2))

$$df = f'(x_0) \cdot dx \tag{53}$$

di modo tale che la derivata di una funzione $f'(x_0)$ coincida esattamente con il calcolo del rapporto:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} \tag{54}$$

proprio come abbiamo visto nell'eq, 39.
Ancora una volta, a rigor di logica, dal punto di vista geometrico, se dobbiamo definire il rapporto incrementale, dovremmo calcolare $\Delta f/\Delta x$ e non df/dx perché a df manca il contributo che apporta il segmento $\overline{BD}$ ($\Delta f = df + \overline{BD}$).
Tuttavia poiché abbiamo visto che $\overline{BD} \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ [5], allora ciò significa che il contributo di $\overline{BD}$ rispetto a df è trascurabile perché va a 0 molto velocemente. Quindi la definizione di derivata coincide proprio con il rapporto tra il segmento df e dx: la quantità df/dx non è solo un simbolo, qualcosa che ci sere per indicare la derivata ma esprime proprio il rapporto tra queste due quantità.
Per questo motivo si definisce la derivata come:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} \tag{55}$$

cioè come rapporto[6] tra il differenziale df e dx.
Molto spesso si perde il senso geometrico della derivata e quindi sostanzialmente si dice che quando $\Delta x \to 0$ allora $\Delta x \to dx$ e $\Delta f \to df$ e quindi si ottiene la 55 come se fosse solo una specie di gioco di simboli, nel quale alla differenza finita Δ si sostituisce quella infinitesima d.
Ciò è vero nella misura in cui ci si ricorda che il divenire di Δx infinitesimo dx ha come conseguenza che l'incremento Δf è sempre più simile al differenziale df in quanto il contributo di $\overline{BD}$ diventa via via sempre più trascurabile.
Oltre a definire il senso geometrico del differenziale, cerchiamo di capire qual è anche il suo significato.
Consideriamo l'eq. 49 riscrivendola come (per dx infinitesimo):

$$\Delta f = df + \overline{BD} \simeq df = f'(x_0)\, dx \tag{56}$$

Ma poiché $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$, allora:

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) \simeq df = f'(x_0)dx \tag{57}$$

Quindi per dx sufficientemente piccoli:

Definizione 4 (Sviluppo di una funzione $f(x)$ al primo ordine)

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0)dx \tag{58}$$

[5] cioè quando Δx è infinitesimo: $\Delta x = dx$
[6] la divisione tra le due quantità deriva dal fatto che stiamo calcolando un coefficiente angolare, quindi un $\Delta y/\Delta x$

Sostanzialmente il differenziale ci sta dicendo qual è il discostamento che la funzione ha in un punto $x_0 + dx$ dal proprio andamento rettilineo definito dalla retta tangente. Ovvero qual è la differenza tra il valore della funzione $f(x + dx)$ nel punto $x + dx$ rispetto al valore che avrebbe avuto se nel tratto $x + dx$ avesse mantenuto l'andamento rettilineo definito dalla retta tangente.
La relazione contenuta all'interno della definizione 4 è detta *sviluppo di una funzione al primo ordine* in quanto ci consente di sviluppare cioè approssimare il valore che la funzione $f(x)$ assume nel punto $x_0 + dx$ che è tanto più buona quanto più piccolo è il valore di dx.
Quest'approssimazione è detta al primo ordine in quanto il valore di $f(x+dx)$ dipende dalla prima potenza dell'incremento dx: infatti lo sviluppo del valore di una funzione può essere fatto anche a potenze superiori di dx, tali per cui lo sviluppo all'n-esimo ordine contiene la potenza n-esima dx^n dell'incremento dx.
Più è alto l'ordine dello sviluppo, maggiore è la precisione con la quale si definisce il valore della funzione nel punto $x_0 + dx$.
Ricordando che $dx = x - x_0$, allora lo sviluppo al primo ordine può esser scritto come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{59}$$

In questo modo abbiamo una formula del tutto generale che ci permette di calcolare il valore approssimato di una funzione $f(x)$, in un qualsiasi punto x del dominio della funzione $f(x)$.
Il differenziale e la precedente approssimazione sono molto importanti in quanto spesso una funzione può essere approssimata per intervalli molto piccoli proprio dal suo andamento lineare.

1.3.1 Esempio

Riprendiamo sempre l'esempio 1.1.1 dove abbiamo preso in esame la funzione $f(x) = x^2$ ed il punto $A = (3, 9)$. Abbiamo determinato la retta t tangente al punto A essere $y = 6x - 9$. Ci chiediamo ora il senso del differenziale df.

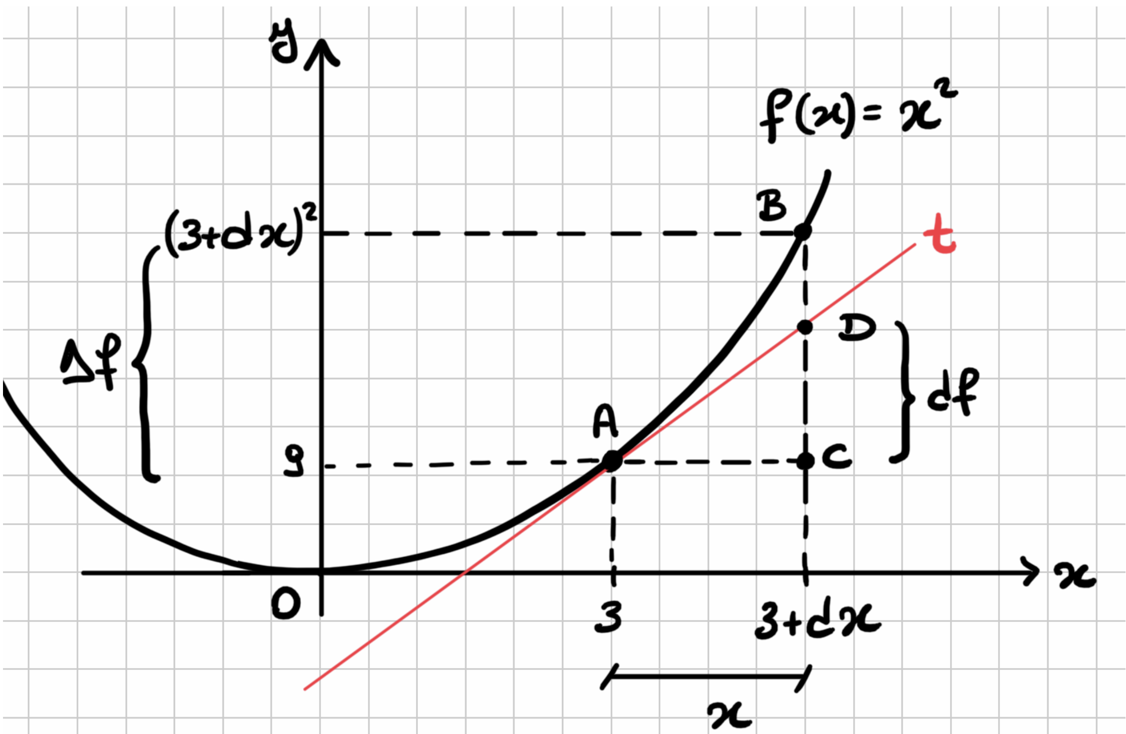


Figura 9: Calcolo del differenziale della funzione $f(x) = x^2$ tra 3 e $3 + dx$

Consideriamo sempre un incremento dx della variabile indipendente.
Allora i punti mostrati in figura avranno coordinate:

$$
\begin{aligned}
C =&(3 + dx, (3)^2) && (60)\\
D =&(3 + dx, 3(3 + 2\,dx)) && (61)\\
B =&(3 + dx, (3 + dx)^2) && (62)
\end{aligned}
$$

In quanto tutti e tre i punti hanno la stessa coordinata x definita dal valore della coordinata x del punto A (3) più l'incremento dx (variabile).
Per quanto riguarda le ordinate, il punto C ha la stessa del punto A, il punto D ha il valore che la retta tangente assume in x_D mentre infine il punto B ha il valore che la funzione assume in x_D.
Quindi il differenziale df della funzione $f(x)$ nel punto $x_A = 3$ con incremento dx, che è rappresentato dal segmento $\overline{CD}$, è pari a:

$$df = \overline{CD} = 3(3 + 2\,dx)) - 9 = 6\,dx \tag{63}$$

Al contrario il segmento $\overline{BD}$ è lungo:

$$\overline{BD} = (3 + dx)^2 - 3(3 + 2\,dx) = dx^2 \tag{64}$$

Allora vediamo che l'incremento Δf della funzione tra il punto x_0 e $x_0 + dx$ è definito da:

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) = \overline{CD} = \overline{BD} + df = d\,x^2 + 6\,dx \tag{65}$$

Abbiamo già visto (es. 1.2.1) che la derivata della funzione in $x_0 = x_A$ è pari a:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 6 = 6 \tag{66}$$

Ma come si è visto nel paragrafo precedente, questo stesso limite coincide con il calcolare il rapporto tra il differenziale della funzione e l'incremento nella variabile x:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{6\,dx}{dx} = 6 \tag{67}$$

Il risultato di quest'ultima espressione è lo stesso della 66.
E questo è sempre vero, a prescindere dall'incremento della variabile indipendente e dalla funzione scelta, proprio perché:

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) \simeq df \tag{68}$$

Infatti nel nostro caso:

$$\Delta f = dx^2 + 6\,dx \simeq 6\,dx \tag{69}$$

L'ultima approssimazione ha senso per dx piccoli (ossia per $\Delta x \to 0$) in quanto la potenza del quadrato va a 0 più rapidamente della funzione lineare.
Infatti ad esempio:

dx	dx^2	Δf
2	4	8
1	1	7
10^{-1}	10^{-2}	0.61
10^{-2}	10^{-4}	0.0601
10^{-3}	10^{-6}	0.006001
10^{-4}	10^{-8}	0.00060001
10^{-5}	10^{-10}	0.0000600001

Tabella 1: Confronto tra la rapidità di decrescita di dx e dx^2 per dx che assume valori sempre più piccoli insieme al valore che assume l'incremento $\Delta f = 6dx + dx^2$

Quello che si può vedere dalla precedente tabella è che al diminuire di dx il contributo che apporta dx^2 al valore di Δf è via via sempre più trascurabile.
Per esempio quando $dx = 10^{-5}$, $dx^2 = 10^{-10}$: quindi quando vado a calcolare il valore di Δf, possiamo abbondantemente trascurare il fattore dx^2:

$$\Delta f = dx^2 + 6\,dx = 10^{-10} + 6 \cdot 10^{-5} = 0.0000600001 \simeq 0.00006 = 6 \cdot 10^{-5} = df \tag{70}$$

Ciò illustra con un esempio il perché si può scrivere che:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} \tag{71}$$

La definizione quindi di derivata come df/dx non è solo un simbolismo ma rispecchia l'interpretazione geometrica della derivata.

2 Regole di derivazione

Abbiamo visto il significato della derivata di una funzione, come si calcola e cos'è il differenziale di una funzione.
Come si possono derivare funzioni più complesse, come ad esempio un rapporto di due funzioni? Ci sono alcune regole importanti da tener a mente:

2.1 Somma di due funzioni

La derivata è un cosiddetto *operatore lineare* nel senso che è un'applicazione che gode della seguente proprietà:

$$\frac{d\,(a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x))}{dx} = a \cdot \frac{d\,f(x)}{dx} \pm b \cdot \frac{d\,g(x)}{dx} \tag{72}$$

Quindi:

- la derivata di una somma (o differenza) può essere spezzata nella somma (o differenza) di due o più derivate

- quando una costante moltiplica una funzione $a \cdot f(x)$, la costante può essere portata fuori dal segno di derivazione e la derivata della funzione $a \cdot f(x)$ è pari alla costante a moltiplicata per la derivata della funzione $f(x)$

2.2 Prodotto di due funzioni

Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) \cdot g(x)$; la derivata della funzione $h(x)$ è:

$$\frac{d\,(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d\,g(x)}{dx} \tag{73}$$

Ad esempio se abbiamo $h(x) = 3x \cdot \sin x$ allora:

$$h'(x) = \frac{d\,(3x)}{dx} \cdot \sin x + 3x \cdot \frac{d\,\sin x}{dx} = 3 \cdot \sin x + 3x \cdot \cos x \tag{74}$$

2.3 Rapporto di due funzioni

Consideriamo la funzione $h(x) = f(x)/g(x)$; la derivata della funzione $h(x)$ è:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{75}$$

Ad esempio se abbiamo $h(x) = 3x/\sin x$ allora:

$$h'(x) = \frac{(3x)' \cdot \sin x - 3x \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{3 \cdot \sin x - 3x \cos x}{\sin^2 x} \tag{76}$$

Poi nel caso specifico in cui $f(x) = 1$ ovvero si sta considerando la derivata del reciproco di una funzione $h(x) = 1/g(x)$, si ha che:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \tag{77}$$

2.4 Regola della funzione composta o *regola della catena*

Consideriamo una funzione composta $h(x) = f(g(x))$; la derivata della funzione $h(x)$ è:

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \underbrace{\frac{df(u)}{du}}_{u=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \tag{78}$$

Sostanzialmente si tratta di effettuare un cambio di variabile $u = g(x)$, considerare la funzione $g(x)$ come se fosse una variabile u, derivare $f(u)$ rispetto a questa variabile u, quindi moltiplicare per la derivata della variabile u cioè della funzione $g(x)$ rispetto a quella di partenza x.
Per capire meglio questa regola consideriamo ad esempio la funzione $h(x) = \sin x^3$ ottenuta componendo la funzione $g(x) = x^3$ con la funzione $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned}\frac{d(\sin x^3)}{dx} \underbrace{=}_{u=x^3} &\frac{d\sin u}{du} \cdot \frac{dx^3}{dx} = \\ &= \cos u \cdot 3x^2 = \\ &= \cos x^3 \cdot 3x^2\end{aligned} \tag{79}$$

Allora il primo passo è considerare la funzione $g(x) = x^3$ come se fosse una variabile u e quindi derivare la funzione $\sin u$ rispetto ad u ottenendo $\cos u$ che riportata nella variabile iniziale è $\cos x^3$.
Questa funzione viene poi moltiplicata per la derivata della funzione u cioè di $g(x)$ fatta rispetto ad x ovvero $3x^2$.
Sostanzialmente la "catena" corrisponde ad un prodotto successivo di tutte le derivate delle funzioni annidate che costituiscono l'$h(x)$. Infatti la regola può essere utilizzata anche per funzioni più complesse costituite da più funzioni annidate.
Ad esempio consideriamo la derivata della funzione $h(x) = \ln\cos e^{2x}$:

$$\begin{aligned}\frac{d(\ln\cos e^{2x})}{dx} &\underbrace{=}_{u=\cos e^{2x}} \frac{d\ln u}{du} \cdot \frac{d(\cos e^{2x})}{dx} = \\ &= \frac{1}{u} \cdot \frac{d(\cos e^{2x})}{dx} = \\ &\underbrace{=}_{y=e^{2x}} \frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \frac{d(\cos y)}{dy} \cdot \frac{d(e^{2x})}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin y \cdot \frac{d(e^{2x})}{dx} = \\ &\underbrace{=}_{w=2x} -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin e^{2x} \cdot \frac{d(e^w)}{dw} \cdot \frac{d(2x)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin e^{2x} \cdot e^w \cdot \frac{d(2x)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2\end{aligned} \tag{80}$$

3 Funzione a più variabili: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Consideriamo ora il caso di funzioni a più variabili cioè applicazioni che associano n-uple di valori indipendenti di $\mathbb{R}^n$ ad un solo valore di $\mathbb{R}$.
Per semplificare il lavoro ci limiteremo a considerare solo funzioni da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che quindi associano coppie di valori (x, y) ad un solo valore $z = f(x, y)$: la generalizzazione di quanto diremo al caso a più variabili sarà poi immediata.
Ad esempio possiamo pensare ad un'applicazione f che associa ad una coppia di valori $(x,\ y)$, un valore di $\mathbb{R}$, $z = f(x, y) = x^2 \cdot \sqrt{y}$.

3.1 La derivata in $\mathbb{R}^2$

Il concetto di derivata per funzioni a più variabili è analogo a quella per le funzioni di singola variabile affrontato nel paragrafo 1.2.
C'è però una differenza che consiste nel fatto che ci sono più variabili che possono essere incrementate e che quindi occorre scegliere qual è la variabile lungo la quale viene effettuato l'incremento.
Supponiamo infatti di avere una funzione a due variabili $f(x, y)$ e di volerne calcolare la derivata in un suo punto (x_0, y_0).
Possiamo avere due casi:

1. Viene incrementata la sola variabile x tenendo fissa la y:

   Definizione 5 (Derivata parziale rispetto ad x)

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{81}$$

2. Viene incrementata la sola variabile y tenendo fissa la x:

   Definizione 6 (Derivata parziale rispetto ad y)

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{82}$$

La differenza sostanziale tra le due derivate consiste nel fatto che nell'eq. 81 il punto y_0 viene mantenuto fisso e la variazione viene fatta solo nella coordinata x. Al contrario nell'eq. 82 è il punto x_0 che viene mantenuto fisso mentre la variazione viene fatta solo nella coordinata y.
Nonostante l'apparente difficoltà della definizione, alla fine si riduce tutto al calcolo di un limite ad una sola variabile.
Come nel caso della derivata di una funzione di una sola variabile, anche le derivate parziali hanno un'interpretazione geometrica, solo leggermente più complessa.
La derivata parziale rispetto ad x o ad y è legata alla variazione istantanea di quota z della funzione $f(x, y)$ rispetto alla variabile x o y.
In che modo?
Se consideriamo la derivata parziale rispetto ad x, dalla definizione che ne abbiamo dato, risulta che la variabile y rimane costante mentre viene incrementata la variabile x.
La condizione $y = y_0$ (cioè che la variabile y non varia mentre viene incrementata la variabile x) definisce un piano nello spazio tridimensionale. Quindi quando calcoliamo la derivata parziale rispetto ad x, stiamo prendendo in esame la funzione $f(x, y)$ sul piano $y = y_0$.
Stiamo cioè sezionando il grafico della funzione $f(x, y)$ con il piano $y = y_0$, il cui risultato è una curva lungo quel piano. Da una funzione a due variabili ci siamo ridotti ad una funzione ad una sola variabile[7] e di conseguenza il grafico della funzione limitata al solo piano $y = y_0$ sarà una

[7] x varia, y costante, $f(x, y_0)$ è il valore che la funzione assume lungo questo piano

curva ad una sola variabile.
Allora la derivata parziale $\partial f/\partial x$ ci indica la pendenza (il coefficiente angolare) della retta tangente alla curva che si ottiene intersecando la funzione $f(x, y)$ con il piano $y = y_0$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
Analiticamente questo significa che la derivata parziale della funzione $f(x, y)$ rispetto ad x coincide con la derivata della funzione ad una sola variabile $f(x, y_0)$ (cioè la funzione originaria ristretta al piano $y = y_0$) calcolata rispetto ad x.
Allo stesso modo, simmetricamente, la derivata parziale $\partial f/\partial y$ ci dice qual è la pendenza della retta tangente alla curva ottenuta intersecando la funzione $f(x, y)$ con il piano $x = x_0$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
Nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ le due rette tangenti si intersecano.
Come nel caso della derivata di una funzione di una sola variabile, si può definire la *funzione derivata parziale* come l'applicazione che associa ad un punto (x, y) il valore della derivata parziale della funzione in quel punto $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y): \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \tag{83}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y): \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \tag{84}$$

Si definisce infine il *gradiente* $\vec{\nabla} f$ di una funzione scalare $f(x, y)$ il vettore avente coordinate:

Definizione 7 (Gradiente di una funzione scalare)

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \tag{85}$$

Il gradiente consente di individuare le direzioni di massima crescita e di minima crescita (o di massima discesa) di una funzione $f(x, y)$.

3.1.1 Esempio

Supponiamo di voler calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = x^2 \cdot \sqrt{y}$ nel punto $(3, 4, f(3, 4)) = (3, 4, 18)$:

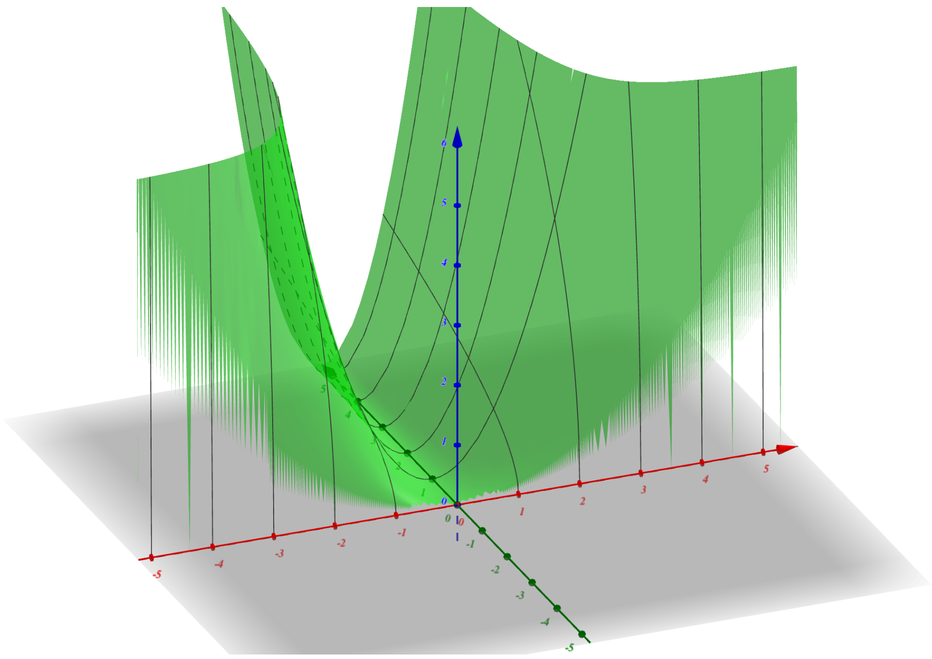


Figura 10: Grafico della funzione $f(x, y) = x^2 \cdot \sqrt{(y)}$: in rosso l'asse x, in verde l'asse y e in blu l'asse z

Vogliamo calcolare la derivata parziale $\partial f/\partial x$, nel punto $(3, 4, f(3, 4)) = (3, 4, 18)$.
L'interpretazione geometrica che ne abbiamo dato consiste in primis nell'intersecare la funzione con il piano $y = 4$. Essa allora si riduce ad essere $f(x, 4) = 2 \cdot x^2$: cioè sezionando la curva tridimensionale con il piano $y = 4$, otteniamo la curva bidimensionale $f(x, 4) = 2 \cdot x^2$ che sappiamo trattare.

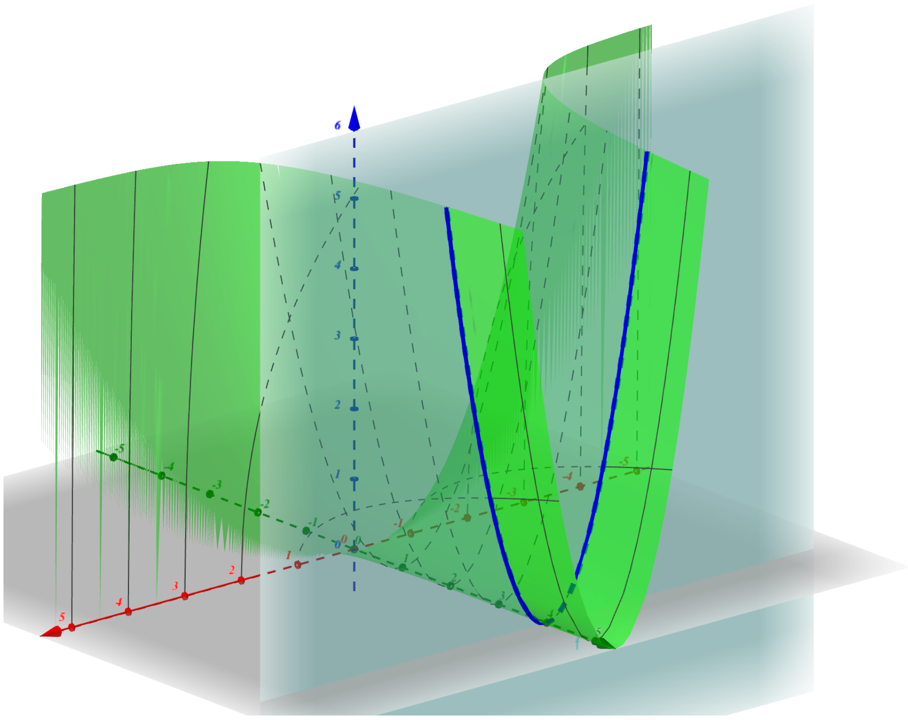


Figura 11: Grafico (in blu) della funzione $f(x, 4) = 2 \cdot x^2$ ottenuta sezionando la funzione $f(x, y) = x^2 \cdot \sqrt{y}$ (in verde) con il piano $y = 4$

Nel Grafico 11 si vede proprio quanto abbiamo detto: il piano opaco blu verticale è il piano $y = y_0 = 4$ che intersecato con la funzione $f(x, y) = x^2 \cdot \sqrt{y}$ genera la parabola $f(x, 4) = 2 \cdot x^2$ (in blu) che giace sul medesimo piano.
La difficoltà concettuale è quest'interpretazione geometrica perché arrivati a questo punto si ottiene una semplice funzione ad una sola variabile, la si deriva e se ne calcola il valore nel punto $x = 3$. Avremo infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) = \frac{df(x, y_0)}{dx} = \frac{d\, 2 \cdot x^2}{dx}\bigg|_{x=3} = 4x\big|_{x=3} = 12 \tag{86}$$

Se invece ricorriamo alla definizione data nell'eq. 81, avremo che:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x, 4) - f(3, 4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 \cdot \sqrt{4} - 3^2 \cdot \sqrt{4}}{\Delta x} \tag{87}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4}((3 + \Delta x)^2 - 3^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4}(9 + \Delta x^2 + 6\Delta x - 9)}{\Delta x} \tag{88}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4}(\Delta x^2 + 6\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{4}(\Delta x + 6) = 6 \cdot \sqrt{4} = 12 \tag{89}$$

Quindi in generale la funzione derivata parziale lungo x sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x \tag{90}$$

In modo analogo possiamo trattare la derivata parziale rispetto ad y: nel Grafico 12 è raffigurata in verde la funzione $f(x, y)$ con in blu opaco il piano di equazione $x = 3$.

Dall'intersezione di questi due si genera una curva in rosso che è $f(3,y) = 9\sqrt{y}$: nuovamente derivando quest'ultima e calcolandone il valore in $y = 4$ si ottiene quello della derivata parziale rispetto ad y in $(3,4)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{df(x_0,y)}{dy} = \frac{d\,9\cdot\sqrt{y}}{dy}\Big|_{y=4} = \frac{9}{2\sqrt{y}}\Big|_{y=4} = \frac{9}{4} \tag{91}$$

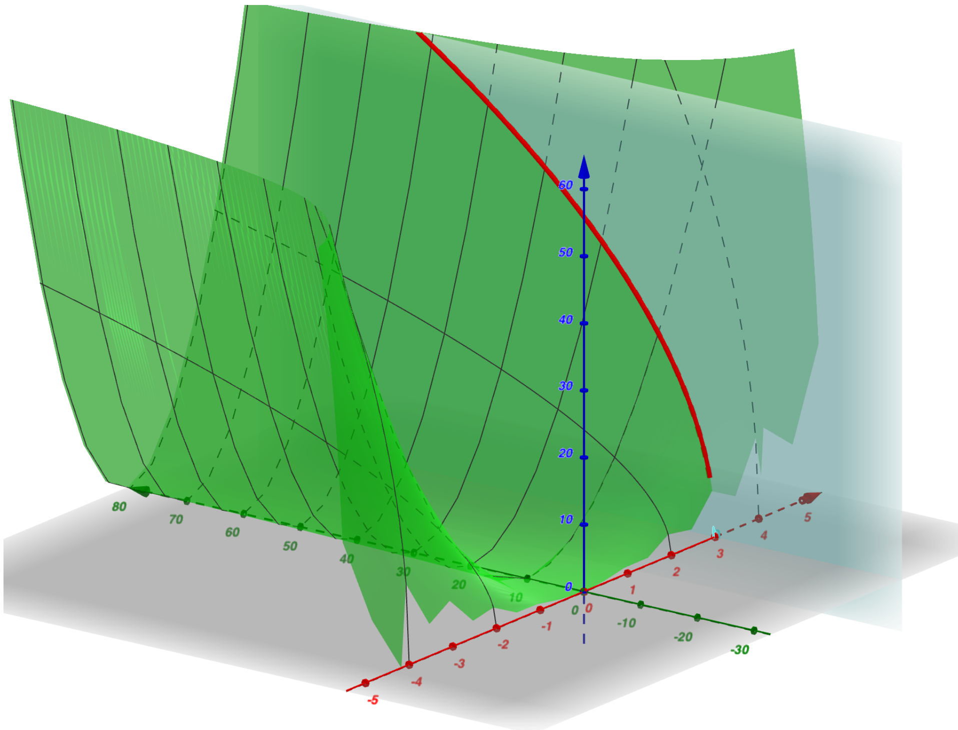


Figura 12: Grafico (in rosso) della funzione $f(3,y) = 9\cdot\sqrt{y}$ ottenuta sezionando la funzione $f(x,y) = x^2\cdot\sqrt{y}$ (in verde) con il piano $x = 3$

Allo stesso modo infatti, calcolando per la derivata parziale lungo y riferendoci all'eq. 82, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(3,4+\Delta y)-f(3,4)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3^2\cdot\sqrt{4+\Delta y}-3^2\cdot\sqrt{4}}{\Delta y} \tag{92}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3^2(\sqrt{4+\Delta y}-\sqrt{4})}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3^2(\sqrt{4+\Delta y}-\sqrt{4})}{\Delta y}\cdot\frac{(\sqrt{4+\Delta y}+\sqrt{4})}{(\sqrt{4+\Delta y}+\sqrt{4})} \tag{93}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3^2(4+\Delta y-4)}{\Delta y(\sqrt{4+\Delta y}+\sqrt{4})} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3^2\Delta y}{\Delta y(\sqrt{4+\Delta y}+\sqrt{4})} \tag{94}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3^2}{\sqrt{4+\Delta y}+\sqrt{4}} = \frac{3^2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{9}{2\cdot\sqrt{4}} = \frac{9}{4} \tag{95}$$

Quindi in generale la funzione derivata parziale lungo y sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{9}{2\sqrt{y}} \tag{96}$$

Il gradiente sarà perciò:

$$\vec{\nabla} f = \left(4x, \frac{9}{2\sqrt{y}}\right) \tag{97}$$

3.2 Il differenziale in $\mathbb{R}^2$

In modo del tutto analogo a quanto fatto nel paragrafo 1.3, anche per le funzioni a più variabili è possibile definire un differenziale df.
Consideriamo una funzione a due variabili $z = f(x, y)$ e due incrementi finiti Δx e Δy delle variabili indipendenti x e y. Sia poi π il piano tangente alla funzione $f(x, y)$ nel punto $E = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ come mostrato nel Grafico 13:

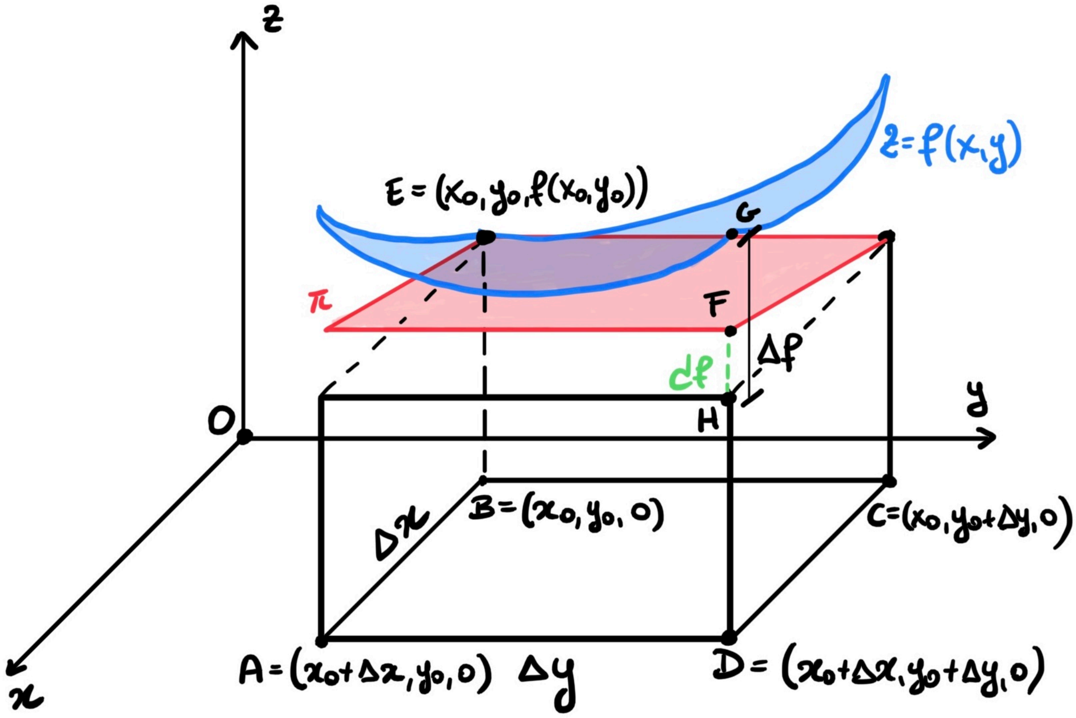


Figura 13: In blu la funzione $z = f(x, y)$ ed in rosso il piano π tangente ad essa nel punto $E = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

In primis il piano tangente per un punto (x_0, y_0) ad una funzione $f(x, y)$ è definito da:

$$\pi : z = f(x_0 + y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \tag{98}$$

È quindi legato al valore che le derivate parziali $\partial_x f$ e $\partial_y f$ assumono nel punto (x_0, y_0).
Tenendo presente che il punto H ha la stessa quota del punto E, similmente a quanto fatto nel Paragrafo 1.3, possiamo legare il valore del differenziale della funzione alla variazione della quota z sul piano tangente:

$$df = \overline{FH} = \pi(F) - z_H \tag{99}$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \tag{100}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \tag{101}$$

Quindi il differenziale di una funzione a due variabili può essere scritta come (generalizzando ad un punto qualsiasi di coordinate (x, y):

Definizione 8 (Differenziale (totale) di una funzione a due variabili)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \tag{102}$$

dove abbiamo sostituito $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$, ricordando il fatto che i differenziali delle variabili indipendenti sono uguali agli incrementi finiti.
Il differenziale df ci dice quant'è la variazione della funzione $f(x, y)$ rispetto all'andamento definito dal piano a lei tangente nel punto E.
Similmente poi a quanto fatto per le funzioni di una sola variabile, si può dimostrare che in realtà anche per le funzioni a due variabili si può scrivere che l'incremento finito Δf della funzione $f(x, y)$ è pari a:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \overline{GH} = \overline{GF} + \overline{FH} \tag{103}$$

Ora:

$$\overline{FH} = df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \tag{104}$$

Mentre per quanto riguarda $\overline{GF}$, esso si dimostra va a 0 quando $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.
Quindi per $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ si ha $\Delta f \to df$.
Inoltre osservando la definizione data nell'eq. 102 si può vedere che il differenziale della funzione può essere anche scritto come:

$$df = \vec{\nabla} f \cdot \vec{dx} \tag{105}$$

ovvero come prodotto scalare tra il gradiente $\vec{\nabla} f$ della funzione e il vettore di differenziali che contiene tutti gli incrementi infinitesimi $\vec{dx} = (dx, dy)$.

3.3 Il caso di $\mathbb{R}^n$

Nel caso considerassimo funzioni di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che associano n-uple di $\mathbb{R}^n$ $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$ ad un solo valore di $\mathbb{R}$ $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ...x_n)$ allora esisteranno n derivate parziali nel punto $\vec{x}_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_n})$.
Il valore della i-esima derivata parziale, cioè della derivata parziale rispetto alla i-esima componente, nel punto $\vec{x_0}$ sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = f_{x_i}(\vec{x}_0) = \partial_{x_i} f(\vec{x}_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(\vec{x}_0)}{\Delta x_i} \tag{106}$$

Viene quindi incrementata la sola variabile x_i della quantità Δx_i mentre tutte le altre rimangano fisse, ovvero calcolate nel punto $\vec{x}_0$.
Quando poi si generalizza, considerando un generico punto $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$, si ha la *funzione derivata parziale* che associa ad ogni n-upla di $\mathbb{R}^n$ il valore della derivata calcolata in quel punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}): \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \tag{107}$$

Infine anche per le funzioni di $\mathbb{R}^n$ si può definire un *gradiente* $\vec{\nabla} f$ come il vettore avente per componenti le derivate parziali della funzione f:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{108}$$

Infine il differenziale totale df di una funzione $f(\vec{x})$ sarà definito come:

$$df = \vec{\nabla} \cdot \vec{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{109}$$

4 Integrazione indefinita

Data quindi una funzione $f(x)$, abbiamo definito la funzione derivata $f'(x) = df/dx$ e abbiamo interpretato il senso geometrico tanto della derivata quanto del differenziale.
Ora proviamo a porci il problema inverso: data una funzione $f(x)$ che sappiamo essere la derivata di un'altra funzione $F(x)$, come si può risalire a questa funzione $F(x)$? Cioè data la funzione derivata $f(x)$, come si può risalire alla funzione $F(x)$ tale per cui la sua derivata $F'(x)$ sia proprio uguale a $f(x)$?
Questo processo, che è propriamente l'operazione inversa del calcolare la derivata di una funzione, è detta *integrazione indefinita* e la funzione $F(x)$ *primitiva* o *integrale indefinito.*
Ad esempio consideriamo la funzione $f(x) = 2x$: poiché sappiamo che la derivata della funzione x^2 è proprio $2x$, possiamo dire che la primitiva della funzione $f(x) = 2x$ è proprio $F(x) = x^2$:

$$f(x) = 2x \longrightarrow F(x) = x^2 \tag{110}$$

Infatti:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 2x = f(x) \tag{111}$$

Notiamo tuttavia che anche la funzione $F(x) = x^2 + 3$ è una primitiva della funzione $f(x) = 2x$ in quanto:

$$\frac{d(x^2+3)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(3)}{dx} = 2x + 0 = f(x) \tag{112}$$

in quanto la derivata di una funzione costante è sempre nulla.
È quindi evidente che la funzione primitiva è sempre definita a meno di una costante arbitraria reale: quindi ad esempio x^2+2, $x^2+\sqrt{34}$, $x^2+\pi$, $x^2-15/4$ etc. sono tutti integrali della funzione x^2.
Perciò l'integrazione definisce un insieme di funzioni che differiscono tutte per una costante arbitraria c in quanto la derivata di una costante è 0. Di conseguenza se $F(x)$ è una funzione primitiva della funzione $f(x)$, allora lo è anche $F(x) + c$ con $c \in R$.
Si utilizza il simbolo $\int$ per definire l'insieme di tutte le primitive di una funzione:

Definizione 9 (Integrale indefinito)

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad \textit{tale per cui} \qquad \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x) \tag{113}$$

Il fatto che l'integrale indefinito determina un insieme di funzioni che differiscono per una costante ha un significato geometrico: abbiamo visto che la derivata di una funzione indica la pendenza cioè il coefficiente angolare della retta tangente in un punto.

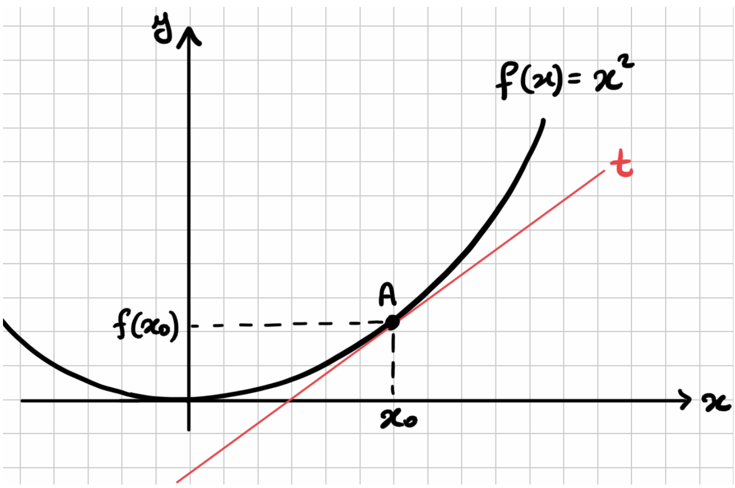


Figura 14: Grafico della funzione $f(x) = x^2$ e della retta tangente in un suo punto $(x_0, f(x_0))$

Poiché sia la funzione x^2 che la funzione $x^2 + 3$ piuttosto che la funzione $x^2 + \pi$ sono tutte delle primitive della funzione $2x$, ci sta dicendo che (utilizzando quindi la definizione di integrale) la loro derivata è sempre $f(x) = 2x$. Cioè la pendenza, il coefficiente angolare della retta tangente in ogni punto x è sempre lo stesso sia per la funzione x^2 che per la funzione $x^2 + 3$ piuttosto che per la funzione $x^2 + \pi$.

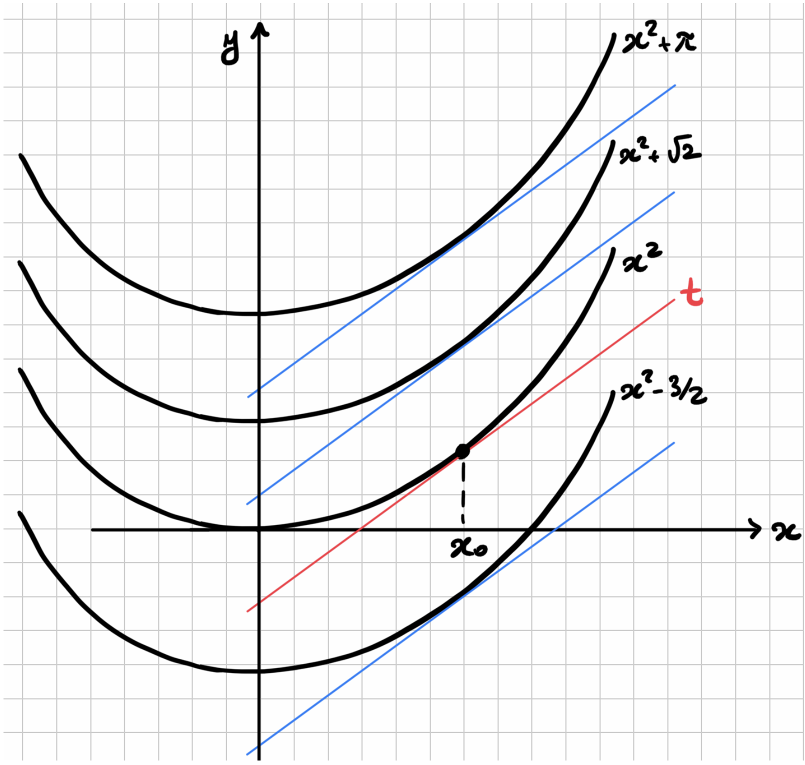


Figura 15: Grafico di alcune primitive della funzione $f(x) = 2x$ e della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$

Come vediamo da questo grafico, la costante additiva arbitraria c dal punto di vista geometrico non fa altro che effettuare una traslazione verso l'alto o verso il basso la funzione $f(x) = x^2$ ma ciò non altera la pendenza della curva. Infatti le varie rette tangenti nel punto x_0 alle curve $x^2 + c$, disegnate nel grafico con una retta blu, sono tutte parallele alla retta rossa che è la retta tangente alla funzione $f(x) = x^2$.

Questo ci dice che poiché le rette sono tutte tra loro parallele, avranno tutte lo stesso coefficiente angolare ovvero la derivata di quella funzione sarà la stessa. Di conseguenza ogni funzione $x^2 + c$ avrà come derivata $2x$ e a ritroso l'insieme delle funzioni che hanno come derivata $2x$ saranno del tipo $x^2 + c$.

Il calcolo dell'integrale in molti casi è immediato in quanto si può ragionare rispetto alla funzione derivata: se ad esempio so che la derivata della funzione $f(x) = \sin x$ è $f'(x) = \cos x$ allora al contrario saprò che l'integrale della funzione $\cos x$ sarà $F(x) = \sin x + c$.

Ma non sempre è possibile procedere in questi termini: per questo motivo sono molto importanti le tecniche di integrazione.

4.1 Tecniche di integrazione

L'integrale è un cosiddetto *operatore lineare* nel senso che è un'applicazione che gode della seguente proprietà:

$$\int [a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)]\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx \pm b \cdot \int g(x)\, dx \tag{114}$$

Quindi:

- l'integrale di una somma (o differenza) può essere spezzato nella somma (o differenza) di due o più integrali
- quando una costante moltiplica una funzione $a \cdot f(x)$, la costante può essere portata fuori dal segno di integrazione e la primitiva della funzione $a \cdot f(x)$ è pari alla costante a moltiplicata per l'integrale della funzione $f(x)$

A parte questa semplice regola, ve ne sono altre due più utili nel calcolo degli integrali.

4.1.1 Integrali per parti

Supponiamo infatti di voler integrare il prodotto di due funzioni $f(x) \cdot g(x)$ ovvero di voler calcolare:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx \tag{115}$$

La tecnica corrisponde a pensare a $g(x)$ come ad una $g'(x)$ cioè come alla derivata di un'opportuna funzione.

$$g(x) \to g'(x) \tag{116}$$

Con delle trasformazioni di differenziali si può dimostrare che vale la seguente regola di integrazione:

Definizione 10 (Integrazione per parti)

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{117}$$

Questa tecnica per poter essere efficiente presuppone di (ri)conoscere qualche integrale fondamentale perché bisogna passare dalla funzione $g'(x)$ alla funzione $g(x)$ che è appunto la primitiva di $g'(x)$.
Chiariamo con un esempio questa regola: supponiamo di voler integrare la funzione $h(x) = x \cdot \sin x$. Allora posso considerare $\sin x$ come la derivata di $-\cos x$. Quindi $g'(x) = \sin x \to g(x) = -\cos x$ mentre $f(x) = x \to f'(x) = 1$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x\, dx &= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx = \\ &= -\cos x \cdot x + \int \cos x\, dx = \\ &= -\cos x \cdot x + \sin x + c \end{aligned} \tag{118}$$

Notiamo che se avessimo invertito i ruoli delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non avremmo avuto un risultato di grande aiuto, in quanto si sarebbe ottenuto:

$$\int x \cdot \sin x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \cos x\, dx \tag{119}$$

che tuttavia non ha facilitato il calcolo degli integrali in quanto l'integrale di $\cos x \cdot x^2/2$ non è di nuovo facilmente risolvibile.

4.1.2 Integrali per sostituzione (1)

Supponiamo di avere una funzione che sia composta, del tipo $f(g(x))$ e di voler calcolare:

$$\int f(g(x))\,dx \tag{120}$$

Allora possiamo effettuare un cambio di variabile $t = g(x)$ e trasformare il differenziale come $dt = g'(x)dx$ da cui $dx = dt/g'(x)$. Dopo aver calcolato l'integrale si ri-effettua il cambio di variabile al contrario, ritornando a quella originale x.
Avremo allora che:

Definizione 11 (Integrazione per sostituzione (1))

$$\int f(g(x))\,dx \underbrace{=}_{t=g(x)} \int f(t)\cdot\frac{dt}{g'(t)} \tag{121}$$

Vediamo un esempio: supponiamo di voler integrare la funzione $h(x) = \sin 3x$. Allora effettuiamo la sostituzione $g(x) = 3x = t$ e $dx = dt/3$:

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\,dx &= \int \sin t\frac{dt}{3} = \\ &= \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = \\ &= -\frac{1}{3}\cos t + c = -\frac{1}{3}\cos 3x + c\end{aligned} \tag{122}$$

Notiamo che, quando si usa la tecnica dell'integrazione per sostituzione calcolando la derivata $g'(x)$, spesso si riottiene una funzione di x che quindi deve essere ricondotta alla variabile t.
Ad esempio, supponiamo di voler calcolare:

$$\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\,dx \tag{123}$$

Allora possiamo effettuare il cambio di variabile $t = e^x$; di conseguenza $dt = e^x\,dx$.
<u>Non</u> si può quindi scrivere:

$$\int \frac{3t}{1+t^2}\,\frac{dt}{e^x} \tag{124}$$

in quanto c'è ancora un termine che dipende da x che deve essere riportato alla variabile t: in questo caso è piuttosto semplice in quanto nuovamente $t = e^x$ ma più in generale occorre invertire la relazione $g(x) = t \to x = g^{-1}(t)$ e sostituirlo in $g'(x)$ qualora dovesse dipendere esplicitamente ancora da x.
L'integrale diventa:

$$\int \frac{3t}{1+t^2}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{3}{1+t^2}\,dt = 3\arctan e^x + c \tag{125}$$

4.1.3 Integrazione per sostituzione (2)

C'è un altro caso che rientra nell'integrazione per sostituzione che è quello che si ha quando la funzione da integrare è una funzione composta del tipo $f(g(x)) \cdot g'(x)$, cioè un prodotto tra una funzione composta e la derivata della funzione annidata.
Allora ponendo $t = g(x)$ e ricordando che $dt = g'(x)dx$:

Definizione 12 (Integrazione per sostituzione (2))

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \underbrace{=}_{t\,=\,g(x)} \int f(t)\, dt \tag{126}$$

Vediamo un esempio:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \tag{127}$$

Effettuando la sostituzione $t = g(x) = \cos x$, allora $dt = -\sin x\, dx$:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + c = -\ln |\cos x| + c \tag{128}$$

In modo analogo ad esempio:

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \tag{129}$$

Possiamo effettuare la sostituzione $\tan x = t$ da cui $dt = dx/\cos^2 x$:

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{\tan x} + c \tag{130}$$

5 Integrazione definita

Abbiamo visto che l'integrale di una funzione $f(x)$ definisce una classe di funzioni $F(x)$ che differiscono tutte per una costante arbitraria c:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \tag{131}$$

Supponiamo allora di avere il seguente problema: sappiamo che un corpo si muove con una certa velocità $v(t)$ di cui abbiamo l'espressione analitica ad esempio $v(t) = t^2$ e vogliamo chiederci qual è lo spazio s che il corpo percorre tra l'istante $t = 1$ s e l'istante $t = 2$ s.
La velocità è definita come la variazione della posizione del corpo in funzione del tempo ovvero:

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \tag{132}$$

Per poter sapere qual è lo spazio percorso s dobbiamo poter prima risalire a qual è la legge oraria $x(t)$ del corpo cioè alla funzione che ci dice qual è la posizione (rispetto ad uno zero) che il corpo assume al trascorrere del tempo.
Ma chiedersi qual è la legge oraria significa proprio risalire da definizione alla funzione primitiva della funzione $v(t)$, cioè a quella funzione $x(t)$ che ha come derivata $v(t)$:

$$x(t) = \int v(t)\,dt \tag{133}$$

In questo caso:

$$x(t) = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + c \tag{134}$$

Allora lo spazio s percorso tra l'istante $t = 1$ s e l'istante $t = 2$ s corrisponde a calcolare la differenza:

$$s = x(2) - x(1) \tag{135}$$

dove $x(t)$ è definita dall'eq. 133.
Nel caso specifico:

$$s = x(2) - x(1) = \frac{2^3}{3} + c - \left(\frac{1^3}{3} + c\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \simeq 2.3 \text{ m} \tag{136}$$

Notiamo una cosa molto importante a livello fisico: la costante c non influisce sulla determinazione dello spazio percorso dal corpo in quanto i due termini in c si elidono quando si va a calcolare la differenza. Questo fatto ci dice che in realtà non è tanto importante un termine costante perché in fisica si è sempre interessati alla differenza tra due grandezze, non al loro valore assoluto. Così sarà importante la differenza di due posizioni per conoscere lo spazio percorso, la differenza tra due velocità per conoscere l'accelerazione etc.
Per esprimere poi in modo più sintetico il doppio passaggio di calcolare prima la primitiva (eq. 133), poi la differenza di due suoi valori (eq. 135), si utilizza la notazione:

$$s = \int_1^2 v(t)\,dt \tag{137}$$

Intendendo con questo:

$$s = \int_1^2 v(t)\,dt = x(t)\Big|_1^2 = x(2) - x(1) \tag{138}$$

Si chiama quindi *integrale definito* la quantità:

Definizione 13 (Integrale definito)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{139}$$

6 Il problema delle aree

Strettamente connesso con il problema di determinare la primitiva di una funzione è il vecchio problema dell'analisi del calcolo delle aree delle funzioni: consideriamo ad esempio la parabola mostrata in figura.

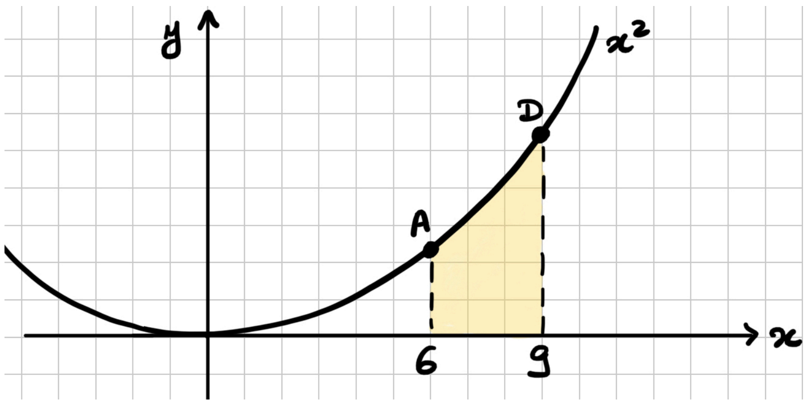
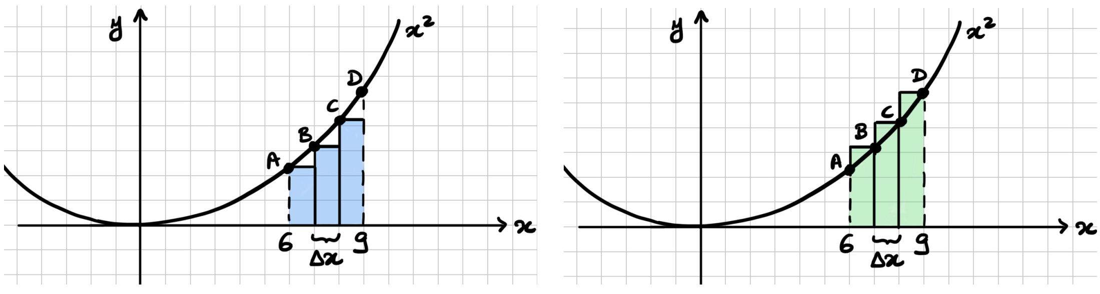


Figura 16: Il problema del calcolo dell'area sottesa dalla funzione $f(x) = x^2$ tra l'asse delle ascisse e i punti $x_1 = 6$ e $x_2 = 9$

Ci chiediamo, quanto vale l'area gialla cioè l'area $\mathcal{S}$ sottesa dal grafico della funzione $f(x) = x^2$ e delimitata dall'asse delle ascisse e i punti (o meglio le rette) $x_1 = 6$ e $x_2 = 9$?
L'idea più semplice è quella di approssimare l'area $\mathcal{S}$ con quella S_{inf} totale dei rettangoli blu mostrati nel Grafico 17a: è evidente che è un'approssimazione in difetto perché l'area $\mathcal{S}$ è più grande di questa.
Ma allo stesso modo possiamo costruire i rettangoli verdi mostrati nel Grafico 17b la cui area totale S_{sup} approssima per eccesso l'area $\mathcal{S}$, in quanto questa è più piccola dell'altra.



(a) Approssimazione per difetto di $\mathcal{S}$ con S_{inf} (b) Approssimazione per eccesso di $\mathcal{S}$ con S_{sup}

Figura 17: Le possibili approssimazioni dell'area $\mathcal{S}$ con i rettangoli

Ciò che possiamo dire che certamente:

$$S_{inf} < \mathcal{S} < S_{sup} \tag{140}$$

Proviamo a determinare le due aree: dividiamo l'intervallo $[6, 9]$ in 3 parti:

- $A = (6, 36)$
- $B = (7, 49)$
- $C = (8, 64)$
- $D = (9, 81)$

Di conseguenza per l'area dei rettangoli blu:

- Primo rettangolo blu: $a_1 = 1 \cdot 36 = 36$
- Secondo rettangolo blu: $a_2 = 1 \cdot 49 = 49$
- Terzo rettangolo blu: $a_3 = 1 \cdot 64 = 64$

Quindi:

$$S_{inf} = a_1 + a_2 + a_3 = 36 + 49 + 64 = 149 \tag{141}$$

In modo del tutto analogo per l'area dei rettangoli verdi:

- Primo rettangolo verde: $A_1 = 1 \cdot 49 = 49$
- Secondo rettangolo verde: $A_2 = 1 \cdot 64 = 64$
- Terzo rettangolo verde: $A_3 = 1 \cdot 81 = 81$

Quindi:

$$S_{sup} = A_1 + A_2 + A_3 = 49 + 64 + 81 = 194 \tag{142}$$

In realtà l'area vera $\mathcal{S} = 171$ e quindi la disequazione 140 risulta ben verificata.
Vogliamo però ottenere un'approssimazione migliore di queste due aree e vedere come e se esse possano fornirci l'area vera $\mathcal{S}$.
Quello allora che possiamo fare è cercare di generalizzare il processo, considerando una generica funzione $f(x)$, un intervallo $[a, b]$ e dividerlo in N parti, ciascuna di lunghezza pari a $\Delta x = (b-a)/N$.
Se considero allora l'i-esimo punto all'interno dell'intervallo $[a, b]$ e il rettangolo avente come base i punti x_i e $x_i + \Delta x$ ovvero lunghezza Δx.
Di conseguenza:

- per il rettangolo blu, l'area sarà:
$$a_i = f(x_i) \cdot \Delta x \tag{143}$$
Quindi l'area totale S_{inf} sarà data dalla somma di tutte queste singole aree:
$$S_{inf} = \sum_{i=0}^{N} a_i = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x \tag{144}$$
- per il rettangolo verde, l'area sarà:
$$A_i = f(x_i + \Delta x) \cdot \Delta x \tag{145}$$
Quindi l'area totale S_{sup} sarà data dalla somma di tutte queste singole aree:
$$S_{sup} = \sum_{i=0}^{N} A_i = \sum_{i=0}^{N} f(x_i + \Delta x) \cdot \Delta x \tag{146}$$

Quindi riscrivendo la disequazione 140 si ha che:

$$\sum_{i=0}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x < \mathcal{S} < \sum_{i=0}^{N} f(x_i + \Delta x) \cdot \Delta x \tag{147}$$

Quello che si può dimostrare è che riducendo la larghezza dell'intervallo Δx cioè al tendere di $\Delta x \to 0$ ovvero aumentando in numero N di punti che dividono l'intervallo $[6, 9]$ si ha che entrambe le somme non vanno a 0 ma convergono esattamente ad $\mathcal{S}$:

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x = \mathcal{S} \tag{148}$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} f(x_i + \Delta x) \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{N} f(x_i + \Delta x) \cdot \Delta x = \mathcal{S} \tag{149}$$

In particolare questa somma si indica con la notazione dell'integrale definito:

$$\mathcal{S} = \int_a^b f(x)\,dx \tag{150}$$

Il simbolo dell'integrale infatti ricorda la Σ della somma e il prodotto $f(x)\,dx$ proprio il fatto che si vanno a sommare l'area di rettangoli infinitesimi di base dx e altezza $f(x)$.
Ma c'è qualcosa di più profondo nell'uso di questa notazione perché c'è un importante teorema chiamato *Teorema fondamentale del calcolo integrale* che lega il valore dell'area $\mathcal{S}$ proprio alla primitiva della funzione $f(x)$:

Definizione 14 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$\mathcal{S} = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{151}$$

L'area $\mathcal{S}$ di una funzione $f(x)$ è legata proprio alla differenza dei valori che la primitiva della funzione $f(x)$ assume negli estremi dell'intervallo considerato.

7 Equazioni differenziali

Le *equazioni differenziali* sono equazioni nelle quali le incognite non sono delle variabili ma delle funzioni: sono delle equazioni che coinvolgono le derivate di una funzione fino ad un certo ordine (derivata prima, seconda etc).
Ad esempio l'equazione:

$$y'(x) = x^2 \tag{152}$$

è un'equazione differenziale che lega la derivata della funzione $y(x)$ con la funzione x^2.
In forma del tutto generale un'equazione differenziale si scrive come:

$$g(y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = f(x) \tag{153}$$

intendendo dire con ciò che la funzione $y(x)$ e tutte le sue derivate fino all'n-esima[8] vengono combinate tra di loro tramite una funzione g qualsiasi.
In particolare:

- si chiama ***ordine*** di un'equazione differenziale l'ordine n della derivata più alta presente nell'equazione;
- un'equazione differenziale si dice ***lineare*** se tutte le tutte le derivate considerate di $y(x)$ sono combinate linearmente tra di loro (sulle derivate di y di ogni ordine non è applicata alcuna funzione);
- un'equazione differenziale si dice ***a coefficienti costanti*** se tutti i coefficienti che moltiplicano le derivate della funzione $y(x)$ sono delle costanti reali e non delle funzioni di x;
- un'equazione differenziale si dice ***omogenea*** se $f(x) = 0$.

Ad esempio:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}y'(x) = x^2$$
$$3y''(x) + 2y'''(x) + e^x = 0$$
$$y^{(IV)}(x) + \log y(x) = 0$$
$$x^2 y^{(V)}(x) + (y')^2 = \sin x$$

Allora:

- la prima equazione differenziale ha ordine 1 in quanto compare soltanto la derivata prima di $y(x)$, è lineare in quanto su $y'(x)$ non è applicata alcuna funzione (è elevata alla potenza 1), è a coefficienti costanti ($1/\sqrt{3} \in \mathbb{R}$) e non è omogenea in quanto $f(x) = x^2$;
- la seconda equazione differenziale ha ordine 3 in quanto il grado più alto di derivazione è il terzo ($y'''(x)$), è lineare anch'essa, a coefficienti costanti e non è omogenea in quanto $f(x) = -e^x$;
- la terza equazione differenziale ha ordine 4, non è lineare in quanto la funzione $y(x)$ è composta con il logaritmo che non è una funzione lineare, è a coefficienti costanti ed è omogenea in quanto $f(x) = 0$;
- la quarta equazione differenziale ha ordine 5, non è lineare in quanto la derivata prima di $y(x)$ è elevata alla seconda potenza, non è a coefficienti costanti in quanto la derivata quinta di $y(x)$ è moltiplicata per x^2 che non è costante e non è neanche omogenea in quanto $f(x) = \sin x$.

[8] ovviamente non è che in ogni equazione differenziale compaiono tutte le derivate fino all'ordine n: di volta in volta ce ne saranno qualcuna

7.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Le equazioni differenziali a variabili separabili sono equazioni del primo ordine del tipo:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \tag{154}$$

cioè delle equazioni che possono essere separate in modo tale che:

- a sinistra del segno di uguaglianza ci sta tutto ciò che dipende dalla derivata prima della funzione;
- a destra del segno di uguaglianza ci sta tutto ciò che dipende dalla variabile x e dalla funzione $y(x)$. In particolare questa parte può essere riscritta come il prodotto di una quantità che dipende solo da x (la funzione $f(x)$) e una che dipende solo da y (la funzione $g(y)$).

Vediamo degli esempi[9]:

$$y' = y \cdot x$$
$$y'^2 = (1 + x^2) \cdot \sqrt{y}$$
$$\log y' = (\sin x + e^x) \cdot (4 + y^2)$$

Questi sono tutti esempi di equazioni differenziali a variabili separabili nelle quali appunto si possono identificare un blocco che dipende solo da $y'(x)$, un altro blocco che dipende solo da y e un altro che dipende solo da x.
Per risolverle, riprendendo la 154 e riscrivendola come:

$$\frac{d\,y(x)}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$
$$\frac{d\,y(x)}{g(y)} = f(x)\,dx$$

In questo modo ho riscritto l'equazione differenziale in modo tale che a sinistra del segno di uguaglianza ho tutto ciò che dipende dalla funzione $y(x)$ (differenziale dy e funzione $y(x)$) mentre a destra ho tutto ciò che dipende dalla sola variabile x (differenziale dx e funzione $f(x)$).
Integrando allora:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\,dx \tag{155}$$

Se $F(x)$ e $G(y(x))$ sono rispettivamente le primitive di $f(x)$ e $1/g(y)$, si ha:

$$G(y(x)) = F(x) + k \tag{156}$$

dove k è una costante, con $k \in \mathbb{R}$.
Invertendo la precedente relazione, la soluzione dell'equazione differenziale a variabili separabili è:

$$\boxed{y(x) = G^{-1}(F(x) + k)} \tag{157}$$

7.1.1 Esempio

Vediamo un esempio relativo alla fisica: consideriamo il moto di un corpo di massa m nella gravità, soggetto ad una forza di resistenza viscosa del tipo $\vec{f} = -\beta\vec{v}$.
L'equazione del moto sarà in forma vettoriale:

$$m\vec{g} - \beta\vec{v} = m\vec{a} = m\frac{d\,\vec{v}}{dt} \tag{158}$$

[9] si sottintende che y è una funzione di x cioè $y = y(x)$

Consideriamo un sistema di riferimento come quello mostrato in figura:

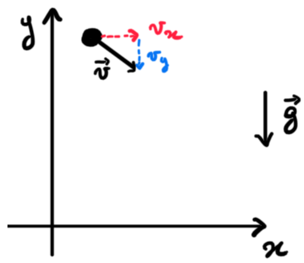


Figura 18: Sistema di riferimento scelto

Allora l'equazione si scompone nelle componenti cartesiane come:

$$\begin{cases} -\beta v_x = m\dfrac{d\,v_x}{dt} \\ \\ -mg - \beta v_y = m\dfrac{d\,v_y}{dt} \end{cases} \tag{159}$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{\beta}{m}v_x = 0 \\ \\ \dfrac{dv_y}{dt} + \dfrac{\beta}{m}v_y = -g \end{cases} \tag{160}$$

Quindi riconosciamo nella prima equazione, un'equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, omogenea mentre nella seconda, un'equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea in quanto c'è un termine noto $-g$.
Entrambe le equazioni sono a variabili separabili.
Per quanto riguarda la prima, riscriviamo come:

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\beta}{m}v_x = 0$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\beta}{m}v_x$$
$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\beta}{m}dt$$

Quindi a destra del segno di uguaglianza ho tutto ciò che dipende da v_x che è la mia funzione del tempo da determinare mentre a destra dell'uguaglianza ho ciò che dipende dal tempo (una costante moltiplicativa del differenziale dt).
Integrando e sfruttando il fatto che β/m è costante:

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{\beta}{m}dt$$
$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\beta}{m}\int dt$$
$$\ln v_x = -\frac{\beta}{m}t + c$$
$$v_x(t) = e^{-\frac{\beta}{m}t+c} = e^{-\frac{\beta}{m}t} \cdot e^c = k \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Dove c è la costante di integrazione da determinare: poiché se c è una costante arbitraria, allora lo è anche e^c, abbiamo chiamato $k = e^c$. L'importante è che ci sia una costante a moltiplicare: che

sia scritta come k o e^c non fa differenza, sono comunque dei fattori costanti.
Supponendo allora che all'istante iniziale ($t = 0$), la velocità lungo x fosse v_{0x}, si ha:

$$v_{0x} = v_x(0) = k \cdot e^{-\frac{\beta}{m}\cdot 0} = k \cdot 1 = k \tag{161}$$

Quindi:

$$v_x(t) = v_{0x} \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \tag{162}$$

In modo analogo procediamo per risolvere la seconda equazione differenziale:

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{\beta}{m}v_y = -g \tag{163}$$

Riscriviamo come:

$$-\frac{dv_y}{dt} = g + \frac{\beta}{m}v_y \tag{164}$$

E dividendo:

$$\frac{dv_y}{g + \dfrac{\beta}{m}v_y} = -dt \tag{165}$$

Integrando:

$$\int \frac{dv_y}{g + \dfrac{\beta}{m}v_y} = -\int dt \tag{166}$$

Per risolvere il primo integrale è conveniente fare un cambio di variabile:

$$f = g + \frac{\beta}{m}v_y \longrightarrow \frac{df}{dv_y} = \frac{\beta}{m} \longrightarrow dv_y = \frac{m}{\beta}df \tag{167}$$

Nel cambio di differenziale si è tenuto conto che la derivata di g rispetto a v_y è 0 in quanto g è un termine costante quindi ha derivata nulla. Al contrario $(\beta/m)\, v_y$ ha derivata β/m.
L'integrale diventa:

$$\begin{gathered}
\frac{m}{\beta}\int \frac{df}{f} = -\int dt \\
\frac{m}{\beta}\ln f = -(t + c) \\
\ln f = -\frac{\beta}{m}(t + c)
\end{gathered}$$

Da cui ri-effettuando il cambio di variabile al contrario $f \to g + \beta/m\, v_y$:

$$\ln\left(g + \frac{\beta}{m}v_y\right) = -\frac{\beta}{m}(t + c) \tag{168}$$

Allora, tenendo a mente le considerazioni fatte precedentemente sulla costante moltiplicativa:

$$g + \frac{\beta}{m}v_y = e^{-\frac{\beta}{m}(t+c)} = e^{-\frac{\beta}{m}c} \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} = a \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \tag{169}$$

Esplicitando v_y:

$$v_y(t) = \frac{m}{\beta}\left(a \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} - g\right) = b \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \tag{170}$$

Se ancora una volta supponiamo che all'istante di tempo iniziale, la velocità iniziale lungo y del corpo sia $v_y(0) = v_{0y}$:

$$v_{0y} = v_y(0) = b \cdot e^{-\frac{\beta}{m}\cdot 0} - \frac{mg}{\beta} = b - \frac{mg}{\beta} \tag{171}$$

Da cui:

$$b = v_{0y} + \frac{mg}{\beta} \tag{172}$$

Allora infine:

$$v_y(t) = \left(\frac{mg}{\beta} + v_{0y}\right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \tag{173}$$

Quindi riassumendo:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x}\, e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ \\ v_y(t) = \left(\frac{mg}{\beta} + v_{0y}\right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \end{cases} \tag{174}$$

7.2 Equazioni differenziali lineari

Un paragrafo a parte è necessario per enunciare un teorema importante per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari ovvero del tipo:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \tag{175}$$

dove cioè tutte le derivate delle funzioni y sono combinate tra di loro linearmente ovvero su di esse non è applicata alcuna funzione. Non ci sarà mai ad esempio un $(y')^2$ o un $\sqrt{y'''}$ e via discorrendo. Ricordiamo poi che in particolare un'equazione differenziale si dice *omogenea* quando $f(x) = 0$:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0 \iff \text{equazione omogenea} \tag{176}$$

Per le equazioni differenziali lineari vale che:

Teorema 1 *La soluzione di un'equazione differenziale lineare generica:*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \tag{177}$$

si può scrivere nella forma:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

dove $y_0(x)$ è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea che possiamo associare all'equazione differenziale 177 di partenza mentre $y_p(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale 177.

Questo significa che ogniqualvolta abbiamo in esame un'equazione differenziale lineare, possiamo sempre andare a considerare prima l'omogenea associata, ovvero la stessa equazione differenziale di partenza ma con il termine $f(x) = 0$. Risolta questa, se sappiamo già che una soluzione particolare dell'equazione differenziale è una certa $y_p(x)$, allora sommandola a quella precedentemente trovata si determina la soluzione dell'equazione di partenza.

7.2.1 Esempio

Ad esempio se consideriamo:

$$y'''(x) = k \cdot x^3 \tag{178}$$

L'equazione omogenea associata è:

$$y'''(x) = 0 \tag{179}$$

che si risolve integrando tre volte consecutive la relazione precedente per passare da $y'''(x) \to y''(x)$, da $y''(x) \to y'(x)$ e da $y'(x) \to y(x)$:

$$\begin{aligned} y''' = \frac{d(y'')}{dx} &\longrightarrow y''(x) = \int y'''(x)\,dx = \int 0\,dx = c_1 \\ y'' = \frac{d(y')}{dx} &\longrightarrow y'(x) = \int y''(x)\,dx = \int c_1\,dx = c_1x + c_2 \\ y' = \frac{d\,y}{dx} &\longrightarrow y(x) = \int y'(x)\,dx = \int c_1x + c_2\,dx = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3 \end{aligned}$$

L'uguaglianza nel primo integrale è dovuta al fatto che l'equazione omogenea è proprio $y'''(x) = 0$ e quindi nell'integrale al posto di $y'''(x)$, ci si mette 0. Poi a cascata tutti gli altri integrali si risolvono sfruttando quanto si ricava dalla riga precedente: nella prima riga si ricava che $y''(x) = c_1$ e quindi quando si integra $y''(x)$, sostituiamo ad essa l'espressione $c_1x + c_2$ e così anche nel terzo passaggio. Quindi la soluzione dell'equazione differenziale omogenea è:

$$y_o(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3 \tag{180}$$

dove c_1, c_2 e c_3 sono le tre costanti di integrazione ($c_1/2$ è ancora una volta costante e possiamo riscriverlo semplicemente come c_1).
Questa è la soluzione dell'equazione omogenea associata: dobbiamo poi trovare la soluzione particolare.
A partire da 178, integrando tre volte consecutivamente, in modo del tutto simile a quanto fatto precedentemente:

$$\begin{aligned} y''' = \frac{d(y'')}{dx} &\longrightarrow y''(x) = \int y'''(x)\,dx = \int kx^3\,dx = k\frac{x^4}{4} \\ y'' = \frac{d(y')}{dx} &\longrightarrow y'(x) = \int y''(x)\,dx = \int k\frac{x^4}{4}\,dx = k\frac{x^5}{20} \\ y' = \frac{d\,y}{dx} &\longrightarrow y(x) = \int y'(x)\,dx = \int k\frac{x^5}{20}\,dx = k\frac{x^6}{120} \end{aligned}$$

Notiamo che in questi integrali non compaiono le costanti arbitrarie di integrazione: questo perché noi stiamo cercando una soluzione particolare, cioè specifica, determinata dell'equazione differenziale. Quindi stiamo scegliendo una soluzione con una scelta ben specifica delle costanti di integrazione: sostanzialmente ogni volta che facciamo l'integrale, mettiamo a 0 la costante arbitraria perché stiamo scegliendo la soluzione particolare di quell'integrale che ha la costante nulla.
Ovviamente avremmo potuto scegliere una costante diversa ma a fini della soluzione dell'equazione differenziale non sarebbe cambiato nulla: meglio scegliere la soluzione più comoda.
Allora la soluzione particolare è:

$$y_p(x) = k \cdot \frac{x^6}{120} \tag{181}$$

Allora la soluzione dell'equazione differenziale 178 sarà:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3 + k \cdot \frac{x^6}{120} \tag{182}$$

7.3 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è del tipo:

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x) \tag{183}$$

Questa equazione non è a coefficienti costanti (e neanche omogenea) perché $a(x)$ è una funzione di x e non una costante.
Secondo quanto abbiamo visto nel Teorema 1, la soluzione si trova in tre passaggi:

1. risolvere l'equazione omogenea associata all'equazione 183;
2. trovare la soluzione particolare dell'equazione 183;
3. sommare le due soluzioni.

Step 1.
L'equazione omogenea associata all'equazione 183 è:

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0 \tag{184}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x) \tag{185}$$

Tenendo presente che $y' = dy/dx$ si ha:

$$\frac{dy(x)}{y(x)} = -a(x)\,dx \tag{186}$$

Per integrare, ricordando che l'integrale di $1/y$ è il logaritmo di y

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx$$

$$\ln y = -\int a(x)\,dx + k$$

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx + k}$$

E quindi:

$$y_o(x) = C \cdot e^{-A(x)} \tag{187}$$

dove:

$$A(x) = \int a(x)\,dx \tag{188}$$

Step 2.
Il secondo step consiste nell'andare a determinare la soluzione particolare dell'equazione 183.
Si può dimostrare che essa è fornita da:

$$y_p(x) = e^{-A(x)} \left(\int f(x) e^{A(x)}\,dx \right) \tag{189}$$

dove $A(x)$ è come in 188.

Step 3.
La soluzione generale dell'equazione differenziale 183 è fornita dalla somma di $y_o(x)$ e $y_p(x)$:

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left(\int f(x) e^{A(x)}\,dx + C \right)} \tag{190}$$

dove:

$$A(x) = \int a(x)\,dx \tag{191}$$

7.3.1 Esempio

In regime *laminare* un corpo di massa m che cade verticalmente all'interno di un fluido incontra una forza di resistenza $\vec{A}$ che dipende proporzionalmente dalla sua velocità $\vec{v}$.
Nel caso di un corpo sferico di raggio R, si ha la cosiddetta *legge di Stokes*:

$$\vec{A} = -6\pi\eta R\,\vec{v} \tag{192}$$

dove η è la *viscosità* del fluido e il - indica che agisce in direzione opposta a quella del moto.
Possiamo allora considerare un corpo sferico che sta cadendo verticalmente, attraversando fluidi via via più viscosi: possiamo ipotizzare cioè di parametrizzare η come:

$$\eta := \eta(t) = \frac{k}{t} \qquad t > 0 \tag{193}$$

Cioè invece di considerare i vari diversi valori di η che corrispondono ai vari fluidi, possiamo scrivere che η è un valore k che aumenta nel tempo con la legge 193.
La nostra legge di Stokes possiamo scriverla come:

$$\vec{A} = -\frac{\beta}{t}\vec{v} \tag{194}$$

dove $\beta = 6\pi kR$.
Allora l'equazione del moto (mettendo come nell'esempio 7.1.1 l'asse y verso l'alto) si scrive come[10]:

$$m\vec{g} + \vec{A} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{195}$$

Poiché il moto avviene lungo la sola direzione y (è in caduta verticale):

$$-mg - \frac{\beta}{t}v_y(t) = m\frac{dv_y}{dt} \tag{196}$$

Ovvero:

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{\beta}{m}\frac{1}{t}v_y = -g \tag{197}$$

Usiamo direttamente la soluzione fornita dall'equazione 190, riconoscendo che:

$$a(t) = \frac{\beta}{m}\frac{1}{t} \longrightarrow A(t) = \int a(t)\,dt = \frac{\beta}{m}\,\ln t \tag{198}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
v_y(t) &= e^{-\beta/m\,\ln t} \cdot \left(\int (-g)\,e^{\beta/m \ln t}\,dt + C\right) && (199)\\
&= t^{-\beta/m} \cdot \left(-g\int t^{\beta/m}\,dt + C\right) && (200)\\
&= t^{-\beta/m} \cdot \left(-g\frac{t^{\beta/m+1}}{\beta/m+1} + C\right) && (201)\\
&= -g\frac{t}{\beta/m+1} + C\cdot t^{-\beta/m} && (202)\\
&= -mg\frac{t}{\beta+m} + C\cdot t^{-\beta/m} && (203)
\end{aligned}$$

[10]trascuriamo la spinta di Archimede

Imponendo una condizione iniziale del tipo $v(t_1) = v_0$ ovvero che all'istante di tempo $t_1 > 0$ al quale inizia il moto la velocità iniziale è v_0, allora:

$$v_0 = -mg\frac{t_1}{\beta + m} + C \cdot {t_1}^{-\beta/m}$$
$$C \cdot {t_1}^{-\beta/m} = v_0 + mg\frac{t_1}{\beta + m}$$
$$C = \frac{1}{t_1^{-\beta/m}} \cdot \left(v_0 + \frac{mg}{\beta + m}t_1\right)$$

Allora la soluzione è:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= -\frac{mg}{\beta + m}\,t + \left(v_0 + \frac{mg}{\beta + m}t_1\right)\left(\frac{t}{t_1}\right)^{-\beta/m} \\ &= -\frac{mg}{\beta + m}\,t + \left(v_0 + \frac{mg}{\beta + m}t_1\right)\left(\frac{t_1}{t}\right)^{\beta/m} \\ &= -\frac{g}{1 + \beta/m}\,t + \left(v_0 + \frac{g}{1 + \beta/m}t_1\right)\left(\frac{t_1}{t}\right)^{\beta/m} \end{aligned} \tag{204}$$

È interessante studiare questa soluzione per tempi lunghi ovvero quando $t \to +\infty$.
Vediamo che:

$$\lim_{t\to+\infty} A = \lim_{t\to+\infty} 6\pi\frac{k}{t}Rv = 0 \tag{205}$$

cioè all'aumentare del tempo la forza resistente dell'attrito viscoso tende a 0 perché il corpo sta attraversando materiali che oppongono via via sempre meno resistenza.
Di conseguenza il contributo dell'attrito diventa sempre più trascurabile e il moto diventa sostanzialmente un moto in caduta libera del tipo:

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg \tag{206}$$

Infatti come si vede dalla soluzione 204, per $t \to +\infty$ il termine $(t_1/t)^{\beta/m} \to 0$ $(\beta/m > 0)$.
Quindi per tempi asintotici la soluzione è:

$$t \to +\infty : \qquad v_y(t) = -\frac{g}{1 + \beta/m}\,t \tag{207}$$

che è sostanzialmente la legge del moto di caduta libera per il quale la velocità va come:

$$v_y(t) = -gt \tag{208}$$

che è esattamente l'equazione 207 per $\beta = 0$ (caso senza attrito viscoso).
Se si sviluppa in serie la soluzione 207:

$$v_y(t) = -\frac{g}{1 + \beta/m}\,t = -gt\left(1 + \frac{\beta}{m}\right)^{-1} \tag{209}$$
$$= -gt\left(1 - \frac{\beta}{m} + \left(\frac{\beta}{m}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{m}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{m}\right)^4 + ...\right) \tag{210}$$

Quindi al primo ordine possiamo approssimare:

$$v_y(t) \simeq -gt + \frac{\beta}{m}t \tag{211}$$

Ovvero quanto detto precedentemente: un moto in caduta libera $(-gt)$ che viene rallentato dalla presenza del fluido viscoso $(+\beta/mt)$ che agisce accelerandolo verso l'alto (c'è un + nella componente dovuta all'attrito viscoso), cioè ne frena la caduta.

7.4 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale del secondo ordine (a coefficienti costanti) è del tipo:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x) \tag{212}$$

dove a, b sono delle costanti e non delle funzioni di x.
Anche in questo caso partiamo dall'equazione omogenea associata all'eq.212.

Step 1. L'equazione omogenea associata è:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0 \tag{213}$$

Si ricerca una soluzione del tipo:

$$y_o(x) = e^{\lambda x} \tag{214}$$

Sostituendo all'interno dell'equazione omogenea 213, si ottiene l'equazione:

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0} \tag{215}$$

che è detta *equazione caratteristica*.
Risolvendo quest'equazione (che è semplicemente un'equazione algebrica di secondo grado) si possono ottenere 3 casi distinti, a seconda che le radici λ_1, λ_2 siano reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate che corrisponde ad avere rispettivamente il $\Delta = a^2 - 4 \cdot b$ maggiore a zero, uguale a zero o minore di zero:

1. $\Delta > 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ reali e distinte:
   Allora la soluzione è definita dalla somma dei due esponenziali:

   $$\boxed{y_o(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}} \tag{216}$$

   dove c_1, c_2 sono le due costanti di integrazione.

2. $\Delta = 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ reali e coincidenti:
   Allora la soluzione è definita da:

   $$\boxed{y_o(x) = (c_1 + c_2 \cdot x)e^{\lambda_0 x}} \tag{217}$$

   dove c_1, c_2 sono le due costanti di integrazione e λ_0 l'unica soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$.

3. $\Delta < 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ complesse e coniugate:
   In questo caso conviene riscrivere $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ed avere che ancora una volta la soluzione è definita dalla somma di due esponenziali complessi:

   $$y_o(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x} \tag{218}$$

   dove k_1, k_2 sono le due costanti di integrazione.
   Ricordando come sono stati definiti $\lambda_{1,2}$ nei termini di α e β e che $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, si ha che:

   $$\boxed{y_o(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)} \tag{219}$$

   dove con c_1, c_2 si sono ridefinite le costanti $c_1 = k_1 + k_2$ e $c_2 = (k_1 - k_2)\, i$.

Step 2.
Occorre ora trovare la soluzione particolare dell'equazione differenziale 212: sfortunatamente non esiste una formula generica ma deve essere valutata caso per caso.
Tuttavia può esser dato un criterio abbastanza generale detto di "somiglianza" che consiste nel ricercare una soluzione particolare come una funzione simile ad $f(x)$.
Ad esempio se $f(x)$ è un polinomio $\mathcal{P}(x)$ di grado m si ricercherà la soluzione particolare come un polinomio $\mathcal{P}_1(x)$ anch'esso di grado m.
Se invece ad esempio la funzione $f(x)$ è un seno o un coseno, si ricerca la soluzione come una combinazione di seno e coseno.

7.4.1 Esempio

Un classico esempio di equazione differenziale del secondo ordine è il moto oscillatorio di una massa attaccata ad una molla intorno alla posizione di equilibrio su un piano orizzontale come mostrato in figura:

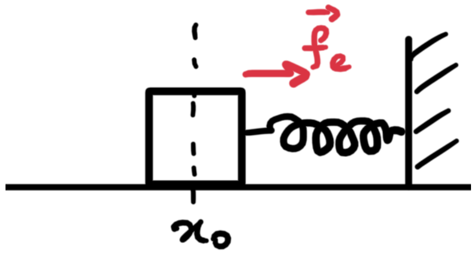


Figura 19: Moto di una massa attaccata ad una molla

Allora ricordando che la forza di richiamo della molla è $\vec{f}_e = -k\vec{x}$, il secondo principio della dinamica si scrive come:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{f}_e = -k\vec{x} \tag{220}$$

Poiché il moto è unidimensionale:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{221}$$

Chiamando $\omega = \sqrt{k/m}$, l'equazione differenziale assume la forma:

$$\ddot{x} + \omega x = 0 \tag{222}$$

che è un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.
Ricercando soluzioni come $x(t) = e^{\lambda t}$, si giunge alla seguente equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{223}$$

che ha soluzioni:

$$\lambda = \pm i\omega \tag{224}$$

Allora la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$x(t) = k_1 e^{i\omega t} + k_2 e^{-i\omega t} = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \tag{225}$$

che può essere riscritta come:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{226}$$

dove $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\tan\varphi = c_1/c_2$.
Possiamo allora poi considerare che il nostro sistema sia soggetto ad una forzante esterna, costante nel tempo che possiamo schematizzare come una forza di intensità F. L'equazione differenziale si scriverà come:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F \tag{227}$$

Sappiamo che per risolverla dobbiamo passare prima per l'omogenea associata (l'eq. 222) la cui soluzione è l'eq. 226.
Per quanto riguarda la particolare, possiamo ad esempio provare a cercare la soluzione come una costante C visto che la funzione $f(x)$ è anch'essa una costante:

$$x_p(t) = C \tag{228}$$

Inserendo all'interno dell'equazione differenziale di partenza (227), si ha:

$$\begin{gathered} \ddot{x}_p + \omega^2 x_p = F \\ \frac{d^2(C)}{dt^2} + \omega^2 C = F \end{gathered}$$

Poiché la derivata di una costante è nulla e di conseguenza anche la sua derivata seconda sarà nulla:

$$\omega^2 C = F \tag{229}$$

ovvero scegliendo:

$$x_p(t) = C = \frac{F}{\omega^2} \tag{230}$$

si ottiene un'identità nell'equazione 229 il che corrisponde (risalendo al contrario) ad una soluzione particolare dell'equazione differenziale di partenza (227).
Allora la nostra soluzione generale sarà data proprio da:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F}{\omega^2} \tag{231}$$

7.5 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

La tecnica che abbiamo descritto precedentemente per la risoluzione delle equazioni differenziali omogenee del secondo ordine ha una valenza del tutto generale e può essere applicato ad un'equazione differenziale a coefficienti costanti omogenea qualsiasi, di qualunque ordine.
Data infatti l'equazione:

$$a_n \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + a_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + ... + a_2 \cdot y''(x) + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y(x) = 0 \tag{232}$$

nella quale compaiono in generale dalla derivata prima y' della funzione $y(x)$ alla derivata n-esima $y^{(n)}$, si può sempre ricercare come soluzione come la funzione $y(x) = e^{\lambda x}$.
Sostituendo e derivando n volte si ottiene l'equazione caratteristica:

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + a_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} + ... + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \tag{233}$$

che è un'equazione algebrica di grado n in λ.
Una volta trovate tutte le radici dell'equazione, allora:

- se tutte le radici λ_i hanno molteplicità uno (cioè tutte le λ_i si ripetono una e una sola volta ovvero le λ_i sono tutte distinte tra loro), allora la soluzione dell'equazione differenziale è data dalla somma degli n esponenziali:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x} \tag{234}$$

- se una delle radici λ_k ha una certa molteplicità m, allora la soluzione dell'equazione differenziale sarà sempre data dalla somma degli n esponenziali ma per quanto riguarda la k-esima radice il suo termine sarà costituito da una somma delle funzioni $e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, ..., x^{m-1}e^{\lambda_k x}$:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + ... + c_{k-1} e^{\lambda_{k-1} x} + c_{k_1} e^{\lambda_k x} + c_{k_2} x e^{\lambda_k x} + ... + c_{m-1} x^{m-1} e^{\lambda_k x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + ... + c_n e^{\lambda_n x} \tag{235}$$

Nel caso in cui l'equazione non sia omogenea, si deve sempre ricercare la soluzione particolare (con il metodo della somiglianza o altri che si studieranno più avanti) e poi sommarla a quella dell'omogenea associata per ottenere così la soluzione totale.

7.5.1 Esempio

Consideriamo ad esempio l'equazione:

$$y^{(VII)} - 21y^{(VI)} + 184y^{(V)} - 870y^{(IV)} + 2389y''' - 3789y'' + 3186y' - 1080y = 0 \tag{236}$$

È un'equazione differenziale lineare omogenea del settimo ordine (compare la derivata settima). Utilizzando la tecnica precedentemente descritta, cercando soluzioni come $e^{\lambda x}$, si ottiene la seguente equazione caratteristica:

$$\lambda^7 - 21\lambda^6 + 184\lambda^5 - 870\lambda^4 + 2389\lambda^3 - 3789\lambda^2 + 3186\lambda - 1080 = 0 \tag{237}$$

Che può essere riscritta come:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0 \tag{238}$$

Quindi la nostra equazione caratteristica ha 7 radici, di cui una ($\lambda = 3$) di molteplicità 3.
Allora per quanto riguarda le radici con molteplicità 1 avremo come soluzioni le funzioni:

$$\lambda_i = \{\lambda = 1,\, \lambda = 2,\, \lambda = 4,\, \lambda = 5\} \longrightarrow y(x) = \left\{e^x,\, e^{2x},\, e^{4x},\, e^{5x}\right\} \tag{239}$$

Per quanto riguarda la radice $\lambda_3 = 3$ che ha molteplicità 3, le funzioni soluzione saranno:

$$\lambda_i = \{\lambda = 3\} \longrightarrow y(x) = \left\{e^{3x},\, xe^{3x},\, x^2 e^{3x}\right\} \tag{240}$$

Quindi, tenendo presente l'eq. 235, la soluzione dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_{3_1} e^{3x} + c_{3_2} x e^{3x} + c_{3_3} x^2 e^{3x} + c_4 e^{4x} + c_5 e^{5x} \tag{241}$$

Una volta finito di leggere il materiale, ti chiedo gentilmente di compilare un breve questionario per capire quanto sono state utili queste note.
Puoi trovare il questionario al seguente link:

`https://forms.gle/VknDegmjZ8XqwiXY6`

Ti ringrazio per la tua partecipazione e aiuto!