Esame di Fisica Generale 2 del 14 Luglio 2014

Per il 1 esonero svolgere gli esercizi 1 e 2 (2 ore); per il secondo esonero svolgere gli esercizi 3 e 4 (2 ore)
Chi sostiene l'esame deve svolgere tutti gli esercizi in 4 ore
NB: Per l'esonero i punteggi vanno raddoppiati

ESERCIZIO 1
Su una sfera di raggio $R_1 = 10\,\text{cm}$ è distribuita una carica positiva con densità $\rho = K \cdot r^{-2}$ con $K = 0.1\,\text{C/m}$. La sfera è racchiusa da un guscio sferico di materiale conduttore di raggio interno $R_2 = 30\,\text{cm}$ e raggio esterno $R_3 = 35\,\text{cm}$. Calcolare:

1. il valore del campo elettrico in tutto lo spazio (4 punti)
2. il potenziale sulla superficie della sfera di raggio R_1 (1.5 punti)
3. la velocità con cui un elettrone che parte da fermo da una distanza $d = 1\,\text{m}$ dal centro della sfera raggiunge la superficie esterna del guscio conduttore. (2 punti)

Cosa succede all'elettrone se il guscio conduttore viene collegato a terra? (1 punto)
(Massa dell'elettrone: $9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$*; carica dell'elettrone:* $1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}$*)*

ESERCIZIO 2
Tre lastre metalliche quadrate parallele di lato $l = 40\,\text{cm}$ sono poste a distanza $d = 5\,\text{cm}$ l'una dall'altra. Lo spazio tra le lastre è riempito con due dielettrici con costanti dielettriche relative $\varepsilon_1 = 5.5$ e $\varepsilon_2 = 8$. Le lastre esterne sono mantenute a una ddp costante $V = 250\,\text{V}$. Calcolare:

1. La capacità equivalente del sistema (1 punto)
2. il campo elettrico all'interno dei due dielettrici (3.5 punti)
3. la variazione di energia elettrostatica se i due dielettrici vengono estratti (4 punti)

ESERCIZIO 3
Un conduttore cilindrico cavo di raggio interno $R_1 = 5\,\text{cm}$ e raggio esterno $R_2 = 10\,\text{cm}$ è percorso da una densità di corrente $j = k \cdot r$, con $k = 15\,\text{A/m}^3$. In corrispondenza dell'asse del cilindro è disposto un filo percorso da corrente $i_1 = 10\,\text{A}$ con verso opposto a quello di j. Calcolare:

1. Il campo magnetico in tutto lo spazio (5 punti)
2. la forza che agisce su una spira quadrata di lato $l = 15\,\text{cm}$ posta ad una distanza $d = 25\,\text{cm}$ dal cilindro e percorsa da corrente $i_2 = 3\,\text{A}$ in senso orario. (3.5 punti)

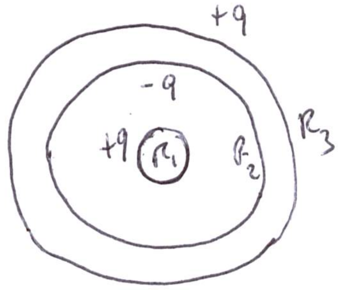
ESERCIZIO 4
Una spira circolare di raggio $R = 10\,\text{cm}$ è posta all'interno di un solenoide di lunghezza indefinita con $n = 600$ avvolgimenti per unità di lunghezza. L'asse della spira è coincidente con l'asse del solenoide. La spira ha resistività $\rho = 500\,\Omega/\text{m}$. Calcolare la corrente indotta nella spira in funzione del tempo e all'istante $t^* = 2\,\text{s}$ nei seguenti casi:

1. La spira è ferma e nel solenoide passa una corrente $i = i_0 \cdot t^2$ con $i_0 = 10\,\text{A/s}^2$ (2 punti)
2. La corrente che scorre nel solenoide è stazionaria e pari a $i = 15\,\text{A}$ e la spira ruota con velocità angolare $\omega = 20\,\text{rad/s}$. (4 punti)

Nel caso in cui sia la spira a ruotare calcolare il valor medio dell'energia dissipata per effetto Joule sulla spira in un periodo. (2.5 punti)

$$\frac{1}{T}\int_0^t P(t)$$

ESERCIZIO 1



$\boxed{r < R_1}$

Teorema di Gauss

$$\int_\Sigma \bar{E}\cdot\bar{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dv$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r k\, r^{-2}\cdot 4\pi r^2\, dr$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\, 4\pi k \int_0^r dr$$

$$\cancel{4\pi} r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \cancel{4\pi} k\, r.$$

$$E = \frac{k}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

$\boxed{R_1 < r < R_2}$

$$\int_\Sigma \bar{E}\cdot\bar{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dv$$

$$\cancel{4\pi} r^2 E = 4\pi k \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{R_1} r^{-2}\cdot r^2\, dr = \cancel{4\pi} k \frac{1}{\varepsilon_0} R_1$$

$$E = \frac{k}{\varepsilon_0}\,\frac{R_1}{r^2}$$

$\boxed{R_2 < r < R_3}$

$E = \emptyset$ perché ci troviamo all'interno di un conduttore

$\boxed{r > R_3}$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} k\, 4\pi \int_0^{R_1} r^{-2} r^2\, dr =$$

$$= \cancel{4\pi} r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\cancel{4\pi} k R_1$$

$$E = \frac{k}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{r^2}$$

2) $$V(R_1) - V(\infty) = V(R_1) = -\int_\infty^{R_3} \bar{E}\cdot d\bar{s} - \underbrace{\int_{R_3}^{R_2} \bar{E}\cdot d\bar{s}}_{\emptyset} - \int_{R_2}^{R_1} \bar{E}\, d\bar{s}$$

$$= -\int_\infty^{R_3} \bar{E}\, d\bar{s} - \int_{R_2}^{R_1} \bar{E}\, d\bar{s} = -\int_\infty^{R_3} \frac{k}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{r^2}\, dr - \int_{R_2}^{R_1} \frac{k}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{r^2}\, dr =$$

$$= \frac{k}{\varepsilon_0} R_1 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 1{,}83 \cdot 10^{11}\, V$$

3) $$\frac{1}{2} m v^2 = -q_e \Delta V$$

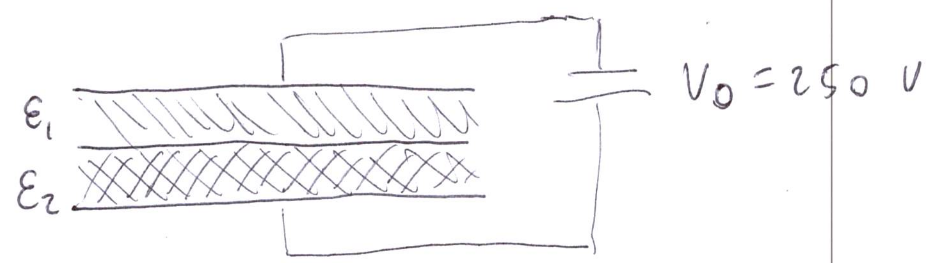
$$\Delta V = V(R_3) - V(d) = -\int_d^{R_3} \bar{E}\, d\bar{s} = -\int_d^{R_3} \frac{k}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{r^2}\, dr =$$

$$= \frac{k}{\varepsilon_0} R_1 \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{d}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{-2 q_e \Delta V}{m_e}} =$$

) Se il guscio è messo a Terra il suo potenziale è $\emptyset$ e l'e^- non si muove.

ESERCIZIO 2



Il sistema coincide con una serie di 2 condensatori C_1 e C_2

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 l^2 \varepsilon_0}{d} = 154,9\ pF \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 l^2}{d} = 225,3\ pF$$

$$C_{TOT} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 91,7\ pF$$

Dato che sono in serie la carica è la stessa:

$$Q = CV = 22,9\ nC$$

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \simeq 147,8\ V \qquad V_2 = \frac{Q}{C_2} \simeq 101,6\ V$$

$$E_1 = \frac{V_1}{d} = 2956\ \frac{V}{m} \qquad E_2 = \frac{V_2}{d} = 2032\ V/m$$

L'energia elettrostatica vale:

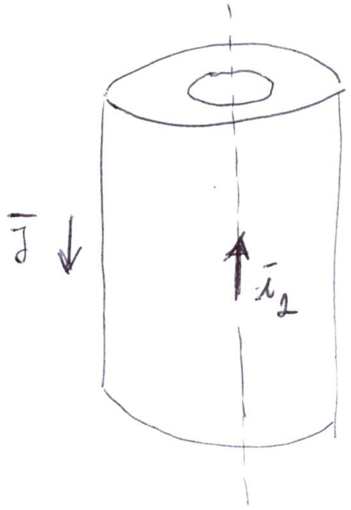
$$U_I = \frac{1}{2} C_{TOT} V^2 = 573,1 \cdot 10^{-8}\ J$$

se si tolgono i dielettrici:

$$C_F = \frac{\varepsilon_0 L^2}{2d} = 14,1\ pF$$

$$U_I = \frac{1}{2} C_F V^2 = 88,1 \cdot 10^{-8} \qquad \Delta U = U_F - U_I = -485 \cdot 10^{-8}\ J$$

ESERCIZIO 3



1) $\boxed{r < R_1}$

Il campo è solo quello generato dal filo:

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}.$$

2) $R_1 < r < R_2$

Bisogna tener ~~conto~~ conto del fatto che solo una frazione di $\bar{J}$ è concatenata ~~[illegible]~~..

$$\oint \bar{B}\, d\bar{l} = \mu_0 i = \mu_0 \int_\Sigma \bar{J} \cdot \bar{n}\, ds$$

$$2\pi r B = \mu_0 i - \mu_0 \int_{R_1}^{r} \bar{J} \cdot \bar{n}\, ds = \mu_0 i - \mu_0 \int_{R_1}^{r} kr \cdot 2\pi r\, dr$$

$$2\pi r B = \mu_0 i - \mu_0 k 2\pi \int_{R_1}^{r} r^2\, dr = \mu_0 i - \mu_0 k\, 2\pi \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_{R_1}^{r} \right).$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} - \frac{\mu_0 k}{3r} \left(r^3 - R_1^3 \right)$$

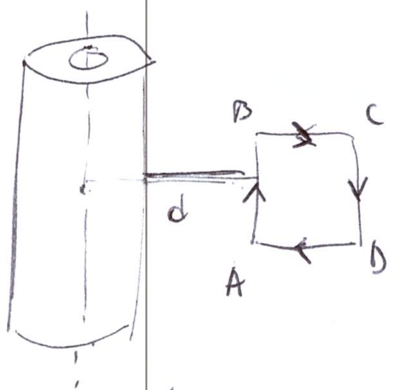
$\boxed{R > R_2}$

$$2\pi r B = \mu_0 i - \mu_0 \int_{R_1}^{R_2} \bar{J} \cdot \bar{n}\, ds = \mu_0 i - \int_{R_1}^{R_2} 2\pi k \mu_0 r^2 dr =$$

$$= \mu_0 i - \mu_0 k 2\pi \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} - \frac{\mu_0 k}{3r} (R_2^3 - R_1^3)$$

2)



$dF_{AB} = i_2\, dl \times B(d)$ ATTRATTIVA

$dF_{CD} = i_2\, dl \times B(d+l)$ REPULSIVA

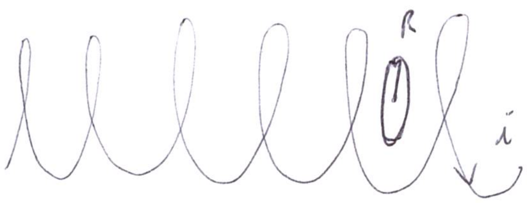
La risultante di F che agisce su BC e AD è $= \emptyset$

$$F_{AB} = \int i_2\, d\bar{l} \times \bar{B} = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(d+R_2)} + \frac{\mu_0 k}{3(d+R_2)} (R_2^3 - R_1^3) \right) l\, i_2$$

$$F_{CD} = \int i_2\, d\bar{l} \times \bar{B} = i_2 l \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(d+l+R_2)} + \frac{\mu_0 k}{3(d+l+R_2)} (R_2^3 - R_1^3) \right)$$

$$F_{TOT} = i_2 l \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(d+R_2)} + \frac{\mu_0 k}{3(d+R_2)} (R_2^3 - R_1^3) - \frac{\mu_0 i}{2\pi(d+l+R_2)} + \frac{\mu_0 k}{3(d+l+R_2)} (R_2^3 - R_1^3) \right)$$

ESERCIZIO 9



$B_S = \mu_0 n i$

$$\phi(B) = \int_\Sigma \bar{B}\cdot\bar{n}\,ds = \int_\Sigma B\,ds = \mu_0 n i_0 t^2 \pi R^2$$

$$f.e.m = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -2\mu_0 n i_0 t\,\pi R^2$$

$$i = \frac{-\mu_0 n \pi R^2 i_0 2t}{R_S} = 3\mu A \quad \text{con } R_S = 2\pi R\rho$$

2)

$$\phi(B) = \int_\Sigma \bar{B}\cdot\bar{n}\,ds = \int_\Sigma B\cos\omega t\,ds = \pi R^2 B\cos\omega t$$

$$f.e.m = -\frac{d\phi(B)}{dt} = \omega\pi R^2 B\sin\omega t$$

$$i = \frac{\omega\pi R^2 B\sin\omega t}{R_S} = \frac{\omega\pi R^2 \mu_0 n i \sin\omega t}{R_S} \qquad i(t^*) = 0{,}3\ mA$$

3)

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt \qquad P_T = \frac{V^2}{R} = iR^2 = \frac{\pi^2 R^4 B^2 \sin^2(\omega t)\,\omega^2}{R_S}$$

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\pi^2 R^4 B^2 \sin^2\omega t\,dt}{R_S} = \frac{\omega^2\pi^2 R^4 B^2}{R_S}\underbrace{\int_0^T \frac{1}{T}\sin^2\omega t\,dt}_{=1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi R^4 B^2 \omega^2}{R_S} = 0{,}12\ J/s$$