

Come risolvere un'equazione trascendente

MDV

May 17, 2012

1 Il problema

Uno dei metodi per la soluzione numerica delle equazioni algebriche è il metodo di Newton (alle volte citato come metodo di Newton–Raphson). Il metodo consiste in una procedura iterativa che partendo da un valore iniziale largamente arbitrario converge molto rapidamente alla soluzione. L'interpretazione geo-

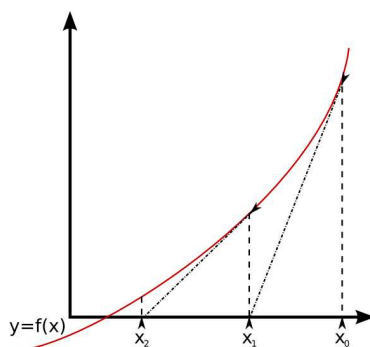


Figure 1: *Il metodo di Newton.*

metrica del metodo è mostrata nella figura 1. Supponiamo di volere risolvere l'equazione $f(x) = 0$. Tracciando l'andamento della funzione $y = f(x)$ nel piano cartesiano xy il problema si riconduce a cercare il valore dell'ascissa nel quale la curva interseca l'asse delle x , (la cui equazione è: $y = 0$). Partendo da un valore x_0 , si calcola l'equazione della tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto x_0 , la cui equazione è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (1)$$

La retta (1) incrocia l'asse delle x nel punto di ascissa $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$. Il punto x_1 si avvicina alla soluzione cercata e viene utilizzato come nuovo punto di partenza per iterare la procedura appena descritta. La soluzione cercata sarà quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Questa relazione permette di scrivere un semplice programma in qualsiasi linguaggio per arrivare ad avere la soluzione dell'equazione. Particolarmente

semplice è la scrittura di una procedura su un foglio elettronico tipo excel che permette di controllare la convergenza della successione x_n . Per funzioni non troppo oscillanti e valori di partenza ragionevolmente vicini alla soluzione, sono sufficienti 4-6 iterazioni.

Esempio. Come esempio supponiamo di cercare la soluzione dell'equazione $f(x) = x - \exp(-x^2) = 0$. La derivata di $f(x)$ è $f'(x) = 1 + 2x \exp(-x^2)$. Nella figura 1, sono mostrate le funzioni inserite nelle celle e i risultati ottenuti, scegliendo come punto iniziale $x_0 = 3$

	A	B	C	D
1	n.	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
2	0	3	=B2-EXP(-(B2^2))	=1+2*B2*EXP(-(B2^2))
3	1	=B2-C2/D2	=B3-EXP(-(B3^2))	=1+2*B3*EXP(-(B3^2))
4	2	=B3-C3/D3	=B4-EXP(-(B4^2))	=1+2*B4*EXP(-(B4^2))
5	3	=B4-C4/D4	=B5-EXP(-(B5^2))	=1+2*B5*EXP(-(B5^2))
6	4	=B5-C5/D5	=B6-EXP(-(B6^2))	=1+2*B6*EXP(-(B6^2))
7	5	=B6-C6/D6	=B7-EXP(-(B7^2))	=1+2*B7*EXP(-(B7^2))
8	6	=B7-C7/D7	=B8-EXP(-(B8^2))	=1+2*B8*EXP(-(B8^2))

	A	B	C	D
1	n.	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
2	0	3.000000	2.999877	1.000740
3	1	0.002343	-0.997651	1.004686
4	2	0.995341	0.624026	1.739171
5	3	0.636534	-0.030325	1.848958
6	4	0.652936	0.000031	1.852609
7	5	0.652919	0.000000	1.852606
8	6	0.652919	0.000000	1.852606