

IL PENDOLO E LA MISURA DI g

15 maggio 2018

1 Il pendolo semplice

Il pendolo semplice consiste in una massa puntiforme m in un campo di gravità \vec{g} vincolata a percorrere una traiettoria circolare di un determinato raggio l . Il vincolo tradizionalmente è realizzato mediante un filo inestensibile come indicato in figura 1.

Moto di un pendolo semplice in assenza di forze dissipative. Per trovare l'equazione del moto del pendolo semplice quando le forze dissipative possono essere trascurate, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica del sistema. Riferendoci alla figura 1, supponiamo che all'istante iniziale la massa m si trovi nella posizione angolare $\theta = \theta_o$ e che abbia velocità nulla. La conservazione dell'energia meccanica della massa m si scrive:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_o \quad (1)$$

dove v è la velocità della massa m e h la sua "quota" come indicato nella figura 1. Usando

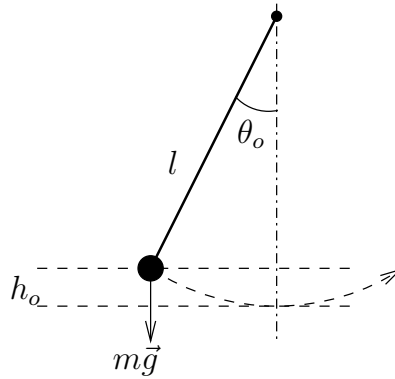


Figura 1: Pendolo semplice

la coordinata angolare θ per individuare la posizione della massa m e osservando che h è legata a θ dalla relazione $h = l(1 - \cos \theta)$ e che $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta/2$ la (1) si scrive:

$$\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2 = 2g(\sin^2 \frac{\theta_o}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

Isolando $\dot{\theta}^2$

$$\dot{\theta}^2 = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (2)$$

Piccole oscillazioni. Se θ_o è sufficientemente piccolo da potere confondere il seno dell'angolo con l'angolo¹, poiché è $|\theta| < |\theta_o|$, la (2) si riduce a:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}(\theta_o^2 - \theta^2) \quad (3)$$

Si osservi che differenziando la (3) rispetto al tempo si ottiene la nota equazione che descrive il moto armonico: $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$, la cui soluzione è $\theta(t) = \theta_o \sin(\sqrt{g/l}t)$.

La (3) permette di calcolare in modo relativamente semplice il periodo del moto armonico. Esprimendo la derivata dell'angolo rispetto al tempo come rapporto di differenziali si ha:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_o^2 - \theta^2}} \quad (4)$$

Osserviamo che il tempo impiegato dalla massa m a percorrere l'arco da $\theta = -\theta_o$ a $\theta = 0$ è pari ad 1/4 del periodo T e quindi integrando nel tempo la relazione precedente da $t = 0$ a $t = T_o/4$, dovremo integrare in θ da $-\theta_o$ a 0:

$$\int_0^{T_o/4} dt = \frac{T_o}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\theta_o}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_o^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \arcsin \frac{\theta}{\theta_o} \Big|_{-\theta_o}^0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2}$$

Da cui infine:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

Grandi oscillazioni. Nel caso in cui non fosse possibile applicare l'approssimazione delle piccole oscillazioni² il periodo del pendolo si ottiene a partire dalla relazione (2) ripetendo i passaggi che hanno portato alla (4). Si ottiene:

$$T = \frac{T_o}{\pi} \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \quad (6)$$

L'integrale in questa relazione non è esprimibile in termini di funzioni elementari e prende il nome di *integrale ellittico di prima specie*. Introducendo la variabile ψ definita come $\sin\psi = (\sin\theta/2)/(\sin\theta_o/2)$, l'integrale nella (6) prende la sua *forma canonica*

$$T = 2\frac{T_o}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_o}{2} \sin^2\psi}} \quad (7)$$

¹Lo sviluppo in serie di Laurent di $\sin^2\theta/2$ è dato da $\theta^2/4 + \mathcal{O}(\theta^4)$

²Nella sperimentazione l'applicabilità dell'approssimazione delle piccole oscillazioni dipende dall'incertezza con cui si determina il periodo T del pendolo.

Questa relazione mette in evidenza che le oscillazioni del pendolo, per ampiezze grandi, *non sono isocrone*, ma dipendono dalla loro ampiezza θ_o . L'integrale ellittico di prime specie nella (7) non ha un'espressione elementare e per il suo calcolo (approssimato) si può ricorrere allo sviluppo in serie di potenze dell'integrando:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_o}{2} \sin^2 \psi}} = 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_o}{2} \sin^2 \psi + \frac{3}{8} \sin^4 \frac{\theta_o}{2} \sin^4 \psi + \dots \quad (8)$$

Usando questo sviluppo si ottiene che la dipendenza del periodo del pendolo dalla ampiezza di oscillazione ha la seguente espressione:

$$T = T_o \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_o}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_o}{2} + \dots \right) = T_o \left(1 + \frac{1}{16} \theta_o^2 + \frac{11}{3072} \theta_o^4 + \dots \right) \quad (9)$$

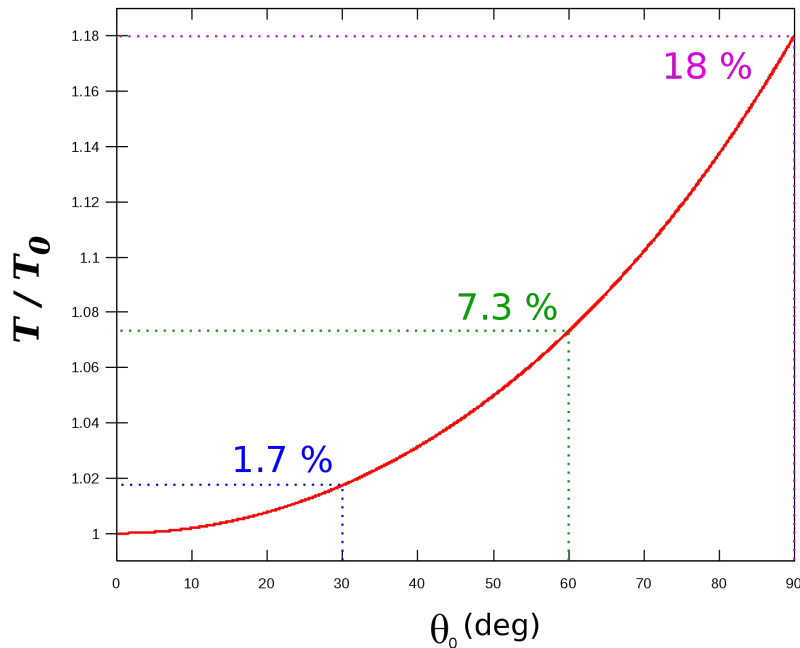
dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta sviluppando in serie anche $\sin^2 \theta_o/2$.

Nella tabella 1 sono riportati i fattori correttivi da applicare a T_o in funzione dell'ampiezza massima delle oscillazioni del pendolo.

Tabella 1: Tabella dei fattori correttivi per oscillazioni non isocrone del pendolo

θ_o	4°	6°	8°	10°	12°
$\frac{T - T_o}{T_o}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$
θ_o	14°	16°	18°	20°	22°
$\frac{T - T_o}{T_o}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-3}$

Nella figura 1 è mostrato l'andamento del rapporto tra periodo delle oscillazioni di ampiezza θ con il periodo delle oscillazioni isocrone.



2 Pendolo fisico o composto

Il pendolo fisico o composto è un corpo esteso di massa m che può essere considerato come un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso. Il pendolo composto è un dispositivo che permette con l'uso di una strumentazione adeguata una misura molto accurata precisa dell'accelerazione locale di gravità. Per raggiungere questo scopo è necessario descrivere nel dettaglio la fisica del pendolo composto. La figura 2 mostra in modo schematico un pendolo composto dove G indica la posizione del centro di massa, O il punto in cui passa l'asse di rotazione, l la distanza tra O e G e l'angolo θ è quello tra il segmento \overline{OG} e la verticale.

Equazione del moto. La conservazione dell'energia meccanica applicata al sistema costituito dal pendolo composto, si scrive:

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = 2mgl(\sin^2 \frac{\theta_o}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (10)$$

dove I è il momento di inerzia del corpo calcolato rispetto all'asse di rotazione O . Si noti che il termine di energia potenziale ha la stessa espressione di quello per il pendolo semplice.

Lunghezza ridotta o equivalente. Confrontando l'equazione (10) con la (2), precedentemente trovata per il pendolo semplice, si osserva che definendo la quantità

$$L_{eq} = \frac{I}{ml} \quad (11)$$

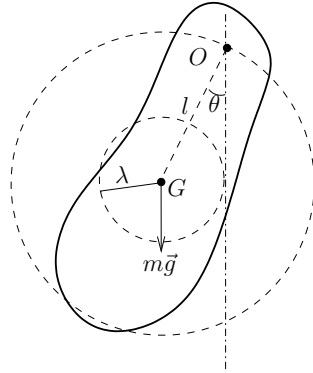


Figura 2: Pendolo composto

detta *lunghezza ridotta* o *equivalente* del pendolo e inserendola nella (10), le due equazioni sono formalmente identiche:

$$\dot{\theta}^2 = 4 \frac{g}{L_{eq}} \left(\sin^2 \frac{\theta_o}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (12)$$

Ne segue che tutti i risultati ottenuti dal modello matematico del pendolo semplice si applicano al pendolo composto. In particolare un pendolo composto di lunghezza ridotta L_{eq} avrà un periodo di oscillazione pari a quello di un pendolo semplice di lunghezza reale L_{eq} . Si noti inoltre il moto di un pendolo composto è identico per tutti gli assi di rotazione paralleli tra loro che hanno la stessa distanza dal centro di massa del pendolo³. Questi assi di rotazione individuano una superficie cilindrica di raggio l e di centro G (si veda la figura 2).

Esaminando la definizione di lunghezza ridotta (11) si vede che esiste un'ulteriore superficie cilindrica, parallela e concentrica alla prima, ai cui assi compete lo stesso periodo di oscillazione di quella di raggio l . Per trovare il raggio di questa nuova superficie cilindrica utilizziamo il teorema di Steiner per scrivere la (11) come

$$L_{eq} = \frac{I_G + ml^2}{ml} \quad (13)$$

dove I_G è il momento di inerzia del pendolo composto attorno al suo centro di massa. Che debbano esistere due valori della distanza dal centro di massa a cui compete lo stesso periodo di oscillazione è evidente anche dallo studio della dipendenza di T da l che con l'uso della (13) si esprime come:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + ml^2}{mgl}} \quad (14)$$

Nella figura 3 è riportato l'andamento qualitativo di questa funzione dalla quale si osserva

³Il momento di inerzia del corpo attorno a questi assi è lo stesso per i teorema di Steiner.

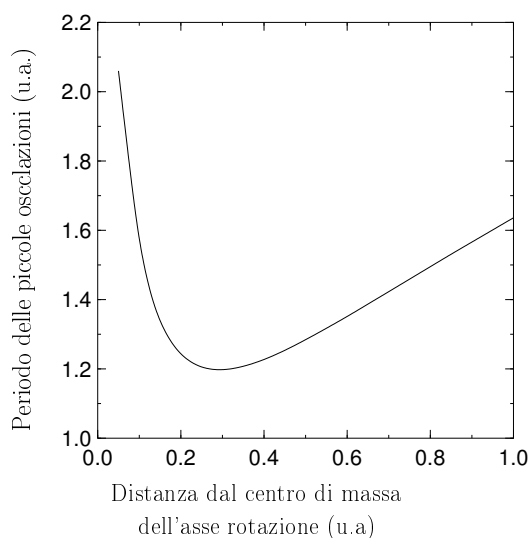


Figura 3: Andamento del periodo di oscillazione del pendolo composto in funzione della distanza del punto di sospensione dal centro di massa.

che, in generale, per ogni fissato periodo T (maggiore di un valore minimo) esistono due distanze dal centro di massa del pendolo composto a cui corrisponde lo stesso periodo. Indicando con l e λ queste distanze avremo:

$$\frac{I_G + m\lambda^2}{m\lambda} = \frac{I_G + ml^2}{ml}$$

ovvero

$$I_G(\lambda - l) = m\lambda l(\lambda - l) \quad (15)$$

Questa equazione oltre alla soluzione banale $\lambda = l$, ammette la soluzione

$$\lambda = \frac{I_G}{ml} \quad (16)$$

che individua la superficie cilindrica cercata *coniugata* con quella di raggio l . La relazione (16) permette di ottenere la relazione seguente

$$\lambda = \frac{I_G}{ml} = \frac{I_G}{ml} + l - l = \frac{I_G + ml^2}{ml} - l = L_{eq} - l \quad \text{ovvero: } \lambda + l = L_{eq} \quad (17)$$

La relazione (17) è molto importante in quanto permette di esprimere come somma di due lunghezze λ e l la grandezza L_{eq} nella cui definizione (11) compare il momento di inerzia, grandezza difficile da valutare. La valutazione di g si baserà quindi sulla ricerca di due assi di rotazione nel pendolo composto, con distanze differenti dal centro di massa ($\lambda \neq l$), cui competa lo stesso periodo di piccole oscillazioni. Se i tre punti definiti dagli assi di rotazione e il centro di massa sono allineati, come succede nel pendolo composto che sarà usato nell'esperimento (vedi la figura 4), basterà misurare la distanza tra gli

assi di rotazione e si otterrà $L_{eq} = \lambda + l$; la misura del periodo T permetterà di ricavare g dalla relazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda + l}{g}}$$

3 Misurazione del momento di inerzia del pendolo fisico

Una misurazione che si può affrontare con un pendolo fisico è quella del suo momento di inerzia I_G attorno ad un asse passante per il baricentro. Per ottenere il valore di questa grandezza si studia l'andamento del periodo delle piccole oscillazioni in funzione della distanza dell'asse di oscillazione dal centro di massa. Oltre alla stima del momento di inerzia I_G questo studio è utile nella misurazione di g con il pendolo reversibile (vedi il paragrafo 5) e infine la misura di I_G permette di ottenere una stima di g .

Per semplificare la notazione, facciamo uso del cosiddetto *raggio di girazione* o *raggio di inerzia* r_g di un corpo solido che può ruotare attorno ad un asse, definito come il raggio di una superficie cilindrica in cui si immagina concentrata tutta la massa del corpo in modo tale che questa superficie cilindrica abbia lo stesso momento di inerzia del corpo rispetto all'asse scelto. In formule $r_g = \sqrt{I/m}$ dove m e I sono rispettivamente la massa e il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse considerato. Nel caso in esame scegliamo come asse quello passante per il centro di massa e poniamo $r_g = \sqrt{I_G/m}$.

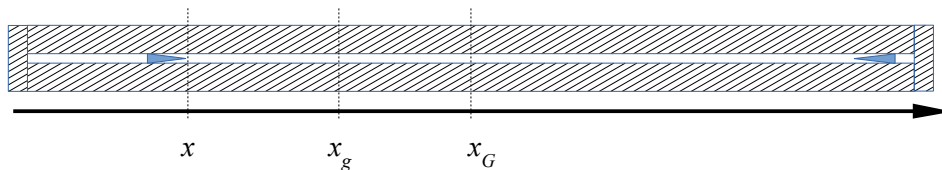


Figura 4: Sistema di coordinate nel pendolo. Sono indicate le coordinate del punto di sospensione x , della posizione del punto di sospensione con periodo minimo x_g e del centro di massa del pendolo x_G .

Tenendo conto della struttura fisica del pendolo utilizzato, definiamo come riferimento un asse lungo la direzione definita dalla dimensione maggiore del pendolo e con un'origine arbitraria. Indichiamo con x la posizione dell'asse di rotazione, con x_G la coordinata del centro di massa e con x_g quella che corrisponde al raggio di girazione. Si ha $r_g = |x_G - x_g|$ (vedi la figura 4). Con queste posizioni e supponendo⁴ $x < x_G$ e $x_g < x_G$, la (14) si scrive:

$$T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + m(x_G - x)^2}{gm(x_G - x)}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_g^2 + (x_G - x)^2}{g(x_G - x)}} \quad (18)$$

⁴La diseuguaglianza $x < x_G$ indica che si considera lo studio del periodo per punti di sospensione situati "prima" del centro di massa. La (18) vale anche per $x > x_G$ con la sostituzione $(x_G - x) \rightarrow (x - x_G)$

Sviluppando $T(x)$ in serie di x attorno a $x = x_g$ e limitando lo sviluppo al secondo ordine, si ha:

$$T(x) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{2r_g}{g}} \left(1 + \frac{(x - x_g)^2}{4r_g^2}\right) = T_{min} \left(1 + \frac{(x - x_g)^2}{4r_g^2}\right) \quad (19)$$

$T_{min} = 2\pi\sqrt{2r_g/g}$ è il periodo minimo del pendolo composto che si ottiene quando la lunghezza equivalente è pari al doppio del raggio di girazione. L'acquisizione della durata del periodo in funzione della posizione x dell'asse di oscillazione del pendolo per valori di x in un intorno della coordinata del raggio di girazione, permette, tramite un *fit* alla (19), di stimare il raggio di girazione r_g , la coordinata del raggio di girazione x_g , il periodo minimo T_{min} e infine la coordinata del centro di massa del pendolo x_G .

Per individuare la zona del minimo del periodo (che con il pendolo a disposizione è ampia circa 6 ÷ 8 cm) è opportuno eseguire un studio dell'andamento del periodo in funzione della posizione dell'asse di oscillazione ottenendo valori del tipo di quelli mostrati nella figura 5.

Individuato l'intervallo del minimo si devono infittire le misurazioni in questo intervallo per ottenere un grafico del tipo mostrato nella figura 6. In questo intervallo di x è valida l'approssimazione del periodo T data dalla (19), e sui dati si esegue un *fit* con una funzione parabolica del tipo:

$$T = a + bx + cx^2 \quad (20)$$

Eseguito il *fit* con le modalità indicate nel prossimo paragrafo, si ottengono i valori dei parametri a, b e c . E' facile verificare confrontando la (19) con la (20) che la coordinata del raggio di girazione x_g e il periodo minimo T_{min} sono dati da:

$$x_g = \frac{b}{2c} \quad T_{min} = a - \frac{b^2}{4c}$$

il raggio di girazione r_g e la coordinata del centro di massa x_G sono date da:

$$r_g = \sqrt{\frac{T_{min}}{4c}} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{4c}, \quad x_G = x_g + \sqrt{\frac{T_{min}}{4c}} = \frac{\sqrt{4ac - b^2} - 2bc}{4c}$$

Infine ricordando che si è definito $T_{min} = 2\pi\sqrt{2r_g/g}$, possiamo ottenere la stima dell'accelerazione di gravità come

$$g = \frac{8\pi^2 r_g}{T_{min}^2} = \frac{32\pi^2 c}{(4ac - b^2)^{-3/2}}$$

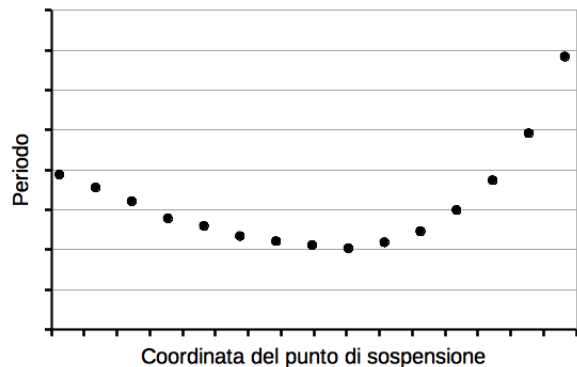


Figura 5: Andamento tipico delle misure del periodo del pendolo T in funzione della posizione del punto di sospensione x .

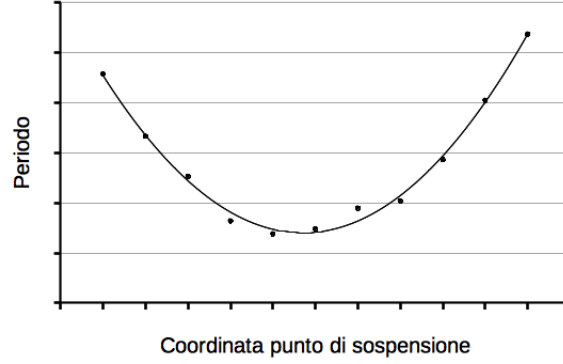


Figura 6: Misure del periodo T in funzione della coordinata del punto di sospensione x attorno al minimo del periodo. La curva è il fit quadratico ai punti sperimentali.

Si noti che le espressioni dei vari parametri fisici (x_g, r_g, \dots) in funzione dei parametri forniti dal fit a, b e c sono necessarie per il calcolo delle loro incertezze. Vedi l'appendice alla fine di questa nota.

Correzione per l'ampiezza di oscillazione. La precisione della misurazione del periodo del pendolo può facilmente mettere in evidenza la sua dipendenza dall'ampiezza massima di oscillazione θ_o . La possibilità di misurare la velocità del passaggio del pendolo, in particolare quando la fase del moto armonico è nulla, permette stimare θ_o e quindi applicare al periodo misurato la correzione data dalla (9). Il moto del pendolo è descritto dalla relazione $\theta(t) = \theta_o \sin 2\pi t/T$ assumendo l'angolo di fase nullo. La velocità angolare massima (passaggio sulla verticale) si ha per $t_k = kT$, ($k = 0, 1, 2 \dots$)

$$\dot{\theta}(t_k) = \frac{2\pi\theta_o d}{T}$$

Riferendosi alla figura 7, la velocità di passaggio dell'indice di fronte al LED è:

$$v = \dot{\theta}(t_k)d = \frac{2\pi\theta_o d}{T}$$

da cui si ottiene infine

$$\theta_o = \frac{vT}{2\pi d} \quad (21)$$

valore da inserire nella (9) per ottenere il fattore di correzione. È facile verificare che il valore dell'angolo di fase δ non è critico, infatti con δ non nullo ma tale che $\cos \delta \simeq 1$, la (21) rimane invariata.

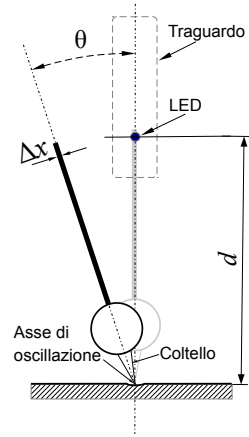


Figura 7: Dispositivo per l'acquisizione elettronica dei dati del pendolo. Δx è la dimensione da inserire nel programma di acquisizione per ottenere il valore corretto della velocità

4 Minimi quadrati per una curva del secondo ordine

Per adattare la funzione quadratica $y = a + bx + cx^2$ ad un insieme dati sperimentali $x_i, y_i \pm u_i, i = 1, \dots, n$ con il metodo dei minimi quadrati si deve minimizzare la seguente somma degli scarti in quadratura come funzione dei parametri a, b e c :

$$R^2 = \sum_{i=1}^n w_i (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2$$

dove $w_i = 1/u_i^2$. Annullando le derivate di R^2 rispetto a a, b e c si ottiene l'equazione (in forma matriciale):

$$\begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i y_i \\ \sum w_i x_i y_i \\ \sum w_i x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

La stima dei parametri a, b e c si ottiene risolvendo questo sistema. Si dimostra inoltre la matrice di covarianza dei parametri stimati coincide con la matrice inversa dei coefficienti, in formule:

$$\begin{pmatrix} \text{Var}[a] & \text{Cov}[a, b] & \text{Cov}[a, c] \\ \text{Cov}[b, a] & \text{Var}[b] & \text{Cov}[b, c] \\ \text{Cov}[c, a] & \text{Cov}[c, b] & \text{Var}[c] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 \end{pmatrix}^{-1}$$

La radice quadrata degli elementi diagonali della matrice di covarianza è l'incertezza della stima dei parametri. I termini non diagonali tipicamente non sono trascurabili e indicano la forte correlazione tra le stime dei parametri. L'espressione esplicita di questa matrice è piuttosto complicata a causa dei molti termini che la compongono e per la valutazione numerica si consiglia di usare un programma di calcolo come quello disponibile in EXCEL.

5 Misurazione di g con il pendolo reversibile

Il pendolo reversibile disponibile in laboratorio consiste in una sbarra metallica lungo la quale possono scorrere due coltelli il cui filo è un asse attorno a cui il pendolo può essere messo in oscillazione (vedi figura a lato). La posizione dei coltelli lungo il pendolo può essere misurata da una scala graduata in millimetri.

1. Si fissi un coltello (C_1 vedi la figura) in una posizione quanto più possibile lontana dal c.m. (dare una giustificazione). La posizione di questo coltello non varierà durante l'esecuzione di questo esperimento.

2. Misurare il periodo di oscillazione T_{C_1} (per questo primo risultato non è necessaria una grande precisione in quanto lo spostamento dei coltelli di sospensione che si dovrà eseguire cambia il momento di inerzia del pendolo)

3. Girare il pendolo e utilizzando la relazione fra periodo e posizione del coltello trovata nell'esperimento sulla misurazione del raggio di girazione, trovare due posizioni (x_1 e x_2) del coltello C_2 distanti 1 cm circa, in cui i periodi di oscillazione T_{x_1} e T_{x_2} siano uno minore e l'altro maggiore di T_{C_1} . Questa procedura può richiedere qualche iterazione aumentando la precisione delle misurazioni (numero di periodi acquisiti). La configurazione ottimale è $|x_2 - x_1| \simeq 1 \text{ cm}$ e $|T_{C_1} - T_{x_1}| \simeq |T_{C_1} - T_{x_2}|$.

4. Una volta stabilite le posizioni x_1 e x_2 , misurare con il calibro di grandi dimensioni la distanza tra i coltelli: L_1 , quando C_2 è posizionato in x_1 e L_2 , quando C_2 è posizionato in x_2 . La procedura corretta è misurazione della coppia (T_{x_1}, L_1) , spostamento del coltello e misurazione dell'altra coppia (T_{x_2}, L_2) .

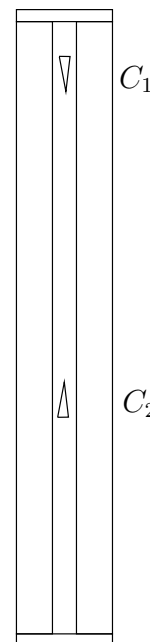
5. Mediante interpolazione calcolare la distanza equivalente del pendolo L_{eq} a cui corrisponde il periodo T_{C_1} . Il valore di L_{eq} inserito nella relazione

$$g = \frac{4\pi^2 L_{eq}}{T_{C_1}^2}$$

permette di stimare l'accelerazione locale di gravità.

6 Sistematiche nella misura di g

Gli effetti sistematici che sono presenti nelle misurazioni dell'accelerazione di gravità sono legati sia al fatto, spesso trascurato, che g è una grandezza mal definita sia a effetti



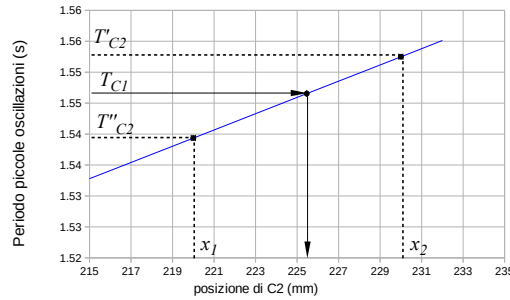


Figura 8: Interpolazione per il calcolo della lunghezza equivalente del pendolo composto

dovuti al metodo di misurazione usato. Le principali cause che influenzano il valore di g sono (valutazione qualitativa)

- l'accelerazione di gravità dipende dalla latitudine a causa della forza centrifuga provocata dalla rotazione terrestre
- la forma della terra, un geode irregolare e non una sfera, influenza localmente il valore di g
- la densità locale del suolo nei pressi della misurazione influenza il valore di g
- a causa dell'andamento $1/r^2$ della forza gravitazionale, g dipende la quota in cui si effettua la misura

Gli effetti elencati indicano che il valore di g dipende dalla località in cui si effettua la misura e quindi possono essere trascurati se si affina la definizione di g specificando che si intende il suo valore *locale*. Esistono tuttavia delle variabili di influenza responsabili di fluttuazioni locali del valore di g come l'effetto dell'attrazione gravitazionale dovuta ai corpi celesti in prossimità della terra (essenzialmente il Sole e la Luna entrambi responsabili delle maree terrestri). Si calcola che la variazione dovuta al Sole e alla Luna sia dell'ordine di $3 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ ed è spesso trascurabile.

Agli effetti che influenzano il valore di g vanno aggiunti gli effetti sistematici dovuti al misurazione del moto del pendolo; tra questi

- le oscillazioni del pendolo sono isocrone solo nel limite di angolo di oscillazione nullo. Quindi, se è il caso, si deve utilizzare la (7) per la correzione.
- l'asse di rotazione del pendolo non è perfettamente orizzontale. Si calcoli, come esercizio, la variazione di g generata da un asse di rotazione che formi un angolo ϕ non nullo con il piano orizzontale.
- effetto della spinta di Archimede sul pendolo
- la rotazione del pendolo non avviene attorno ad un punto ma è un rotolamento della superficie cilindrica che approssima la lama di appoggio.

Appendice

Espressione di alcune derivate utili per il calcolo delle incertezze dei parametri del modello matematico del pendolo composto.

$$r_g(a, b, c) = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{4c};$$

$$\frac{\partial r_g(a, b, c)}{\partial a} = \frac{1}{2\sqrt{4ac - b^2}}; \quad \frac{\partial r_g(a, b, c)}{\partial b} = -\frac{b}{4c\sqrt{4ac - b^2}}; \quad \frac{\partial r_g(a, b, c)}{\partial c} = \frac{b^2 - 2ac}{4c^2\sqrt{4ac - b^2}}$$

$$x_G(a, b, c) = \frac{\sqrt{4ac - b^2} - 2b}{4c};$$

$$\frac{\partial x_G(a, b, c)}{\partial a} = \frac{1}{2\sqrt{4ac - b^2}}; \quad \frac{\partial x_G(a, b, c)}{\partial b} = -\frac{b}{4c\sqrt{4ac - b^2}} - \frac{1}{2c}; \quad \frac{\partial x_G(a, b, c)}{\partial c} = \frac{b^2 - 2ac}{4c^2\sqrt{4ac - b^2}} + \frac{b}{2c^2}$$

$$g(a, b, c) = \frac{32\pi^2 c}{(4ac - b^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial g(a, b, c)}{\partial a} = -\frac{192\pi^2 c^2}{(4ac - b^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial g(a, b, c)}{\partial b} = \frac{96\pi^2 bc}{(4ac - b^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial g(a, b, c)}{\partial c} = -\frac{32\pi^2 (2ac + b^2)}{(4ac - b^2)^{5/2}}$$

Formula dell'interpolazione e coefficienti di sensibilità

$$x_o = \frac{T_o - T_1}{T_2 - T_1}(x_2 - x_1) + x_1$$

$$\frac{\partial x_o}{\partial x_1} = \frac{T_2 - T_o}{T_2 - T_1}; \quad \frac{\partial x_o}{\partial x_2} = \frac{T_o - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\frac{\partial x_o}{\partial T_o} = \frac{x_2 - x_1}{T_2 - T_1}; \quad \frac{\partial x_o}{\partial T_1} = -\frac{(T_o - T_2)(x_1 - x_2)}{(T_1 - T_2)^2}; \quad \frac{\partial x_o}{\partial T_2} = -\frac{(T_o - T_1)(x_2 - x_1)}{(T_2 - T_1)^2}$$