

Considerazioni sul moto su un piano inclinato

17 aprile 2018

1 Equazione del moto

Il fenomeno che si vuole descrivere è il moto di un grave di massa m , considerato come un punto materiale, che scivola su di un piano inclinato con un coefficiente di attrito dinamico μ e con un coefficiente di attrito viscoso β . Per definire la posizione della massa m scegliamo un asse s lungo il piano inclinato come indicato nella figura 1. Se α

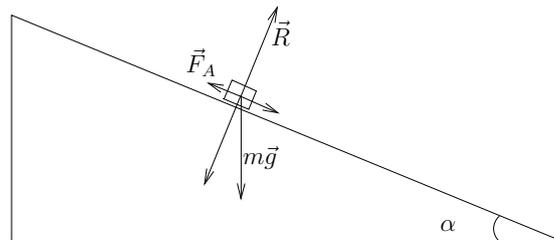


Figura 1: Grave che scivola su un piano inclinato. Analisi delle forze: $m\vec{g}$ forza peso, $|\vec{F}_A| = \mu mg \cos \alpha + \beta|v(t)|$ forza di attrito dinamico e viscoso, $|\vec{R}| = mg \sin \alpha$ reazione vincolare.

è l'angolo con l'orizzontale del piano inclinato, l'analisi delle forze sulla massa (vedi la figura 1 e la sua didascalia) porta all'equazione:

$$m\ddot{s} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - \beta \dot{s} \quad (1)$$

Per risolvere questa equazione differenziale osserviamo che la funzione incognita $s(t)$ compare soltanto con le derivate prima e seconda. Sostituiamo quindi alla funzione che determina lo spazio $s(t)$ la velocità del grave lungo il piano inclinato $v(t) = \dot{s}(t)$. Si ottiene

$$m\dot{v} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - \beta v \quad (2)$$

Ovvero, introducendo la costante¹ $\tau = m/\beta$ e riscrivendo la derivata come rapporto di differenziali,

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - \frac{v}{\tau} \quad (3)$$

¹Le dimensioni fisiche di τ sono quelle di un tempo

L'equazione differenziale (3) può essere risolta per separazione di variabili:

$$\frac{dv}{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - v/\tau} = dt$$

integrando entrambi i membri:

$$\int_{v_o}^{v(t)} \frac{dv}{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - v/\tau} = \int_0^t dt'$$

dove v_o è la velocità del grave al tempo $t = 0$ considerato come tempo iniziale del moto. Integrando la relazione precedente otteniamo:

$$-\tau \ln \left(g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - \frac{v}{\tau} \right) \Big|_{v_o}^{v(t)} = t$$

$$\ln \left(\frac{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - v(t)/\tau}{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - v_o/\tau} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

Passando agli esponenziali otteniamo:

$$\left(\frac{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - v(t)/\tau}{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - v_o/\tau} \right) = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4)$$

e isolando $v(t)$ otteniamo infine:

$$v(t) = \tau g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - [\tau g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - v_o] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

si noti che nel limite $t \rightarrow \infty$ la velocità del grave assume un valore costante che viene detto *velocità limite* (v_L) e che vale

$$v_L = \tau g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

Nel caso di un oggetto che “cada” verticalmente, ovvero senza il vincolo di un piano inclinato, e sia immerso in un fluido come l'aria o l'acqua la relazione precedente si riduce a:

$$v_L = \tau g$$

2 Moto su un piano inclinato

Riprendiamo in considerazione il moto di un grave su di un piano inclinato fissando la velocità iniziale a zero: ($v(0) = v_o = 0$). Dalla (5) otteniamo

$$v(t) = \tau g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) (1 - e^{-t/\tau})$$

Nel caso in cui il moto avvenga in un tempo $t \ll \tau$, l'esponenziale $e^{-t/\tau}$ si può sviluppare in serie e trascurando i termini di ordine superiore al primo si ha $e^{-t/\tau} \simeq 1 - t/\tau$ e quindi:

$$v(t) = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t + \mathcal{O}(t^2)$$

l'equazione mostra che, al primo ordine, l'effetto dell'attrito viscoso scompare. Il tempo Δt necessario al grave per percorrere uno spazio prefissato L partendo da fermo, si ottiene integrando la relazione precedente trascurando i termini del secondo ordine. Si ottiene:

$$\frac{1}{\Delta t^2} = \frac{g}{2L}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (6)$$

Fissate e misurate l'inclinazione del piano α e la lunghezza della traiettoria L , questa relazione permette di progettare un esperimento in cui è possibile valutare il valore dell'accelerazione locale di gravità, g . Nell'esperimento si misura l'intervallo di tempo in cui un grave, scivolando da fermo per una lunghezza L lungo un piano inclinato, in funzione del seno dell'angolo di inclinazione α del piano inclinato.

Se limitiamo l'angolo α a valori per i quali è lecito confondere il seno con il suo angolo allora la (6) si riscrive:

$$\frac{1}{\Delta t^2} = \frac{g}{2L}(\alpha - \mu) \quad (7)$$

(il coseno nella stessa approssimazione al primo ordine può essere approssimato a 1). Il grafico di $1/\Delta t^2$ vs α permette di valutare l'accelerazione di gravità e il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano inclinato. Si noti che l'intercetta dà un valore negativo il che può apparire assurdo, tuttavia il valore negativo dell'intercetta si spiega osservando che al di sotto di un certo valore dell'angolo α non si ha moto in quanto la componente della forza peso parallela al piano del moto non supera il valore della forza di attrito.

2.1 Moto su un piano inclinato - Velocità iniziale non nulla

Nello studio sperimentale del moto di un grave lungo un piano inclinato può essere opportuno, per ragioni che vedremo nel seguito, eseguire le misurazioni quando il grave ha già acquisito una certa velocità. In questa condizione si inizia a misurare il tempo quando la velocità ha un certo valore v_o e quindi l'equazione del moto diviene:

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_o t \quad (8)$$

Supponiamo di conoscere (ad esempio perché la abbiamo misurato) lo spazio s_o che il grave, sottoposto all'accelerazione a , percorre prima che si inizi a contare il tempo. E' un facile esercizio di cinematica calcolare la velocità v_o da inserire nella (8) come:

$$v_o = \sqrt{2s_o a}$$

Sostituendo questa relazione nella (8) si ha:

$$s = \frac{1}{2}at^2 + \sqrt{2s_o a} t \quad (9)$$

che opportunamente ri-arrangiata diviene:

$$at^2 + 2\sqrt{2s_o a} t - 2s = 0 \quad (10)$$

Volendo esplicitare la relazione tra la variabile tempo e le altre variabili, risolviamo la (10) considerata come un'equazione di secondo grado in t ; le soluzioni sono

$$t_{1,2} = \frac{1}{a} \left(-\sqrt{2s_0a} \pm \sqrt{2s_0a + 2sa} \right)$$

Scartando la soluzione negativa come non fisica e mettendo in evidenza opportunamente, otteniamo:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \left(\sqrt{1 + \frac{s_0}{s}} - \sqrt{\frac{s_0}{s}} \right)$$

quadrando e prendendo l'inverso di questa equazione:

$$\frac{1}{t^2} = \frac{a}{2s \left(\sqrt{1 + \frac{s_0}{s}} - \sqrt{\frac{s_0}{s}} \right)^2} = \frac{a}{2s'} \quad (11)$$

dove $s' = s(\sqrt{1 + s_0/s} - \sqrt{s_0/s})^2$. La (11) ha una forma del tutto analoga² alla (7) basta sostituire s con s' . Ne consegue che, anche nel caso del moto accelerato con velocità iniziale diversa da zero, l'inverso del tempo di percorrenza al quadrato è proporzionale all'accelerazione a e quindi, per angoli piccoli, all'angolo α di inclinazione del piano.

3 L'esperimento del piano inclinato

L'esperimento del piano inclinato si può usare per stimare il valore dell'accelerazione di gravità locale attraverso la misurazione del tempo impiegato da un carrello montato su ruote a percorrere uno spazio predefinito lungo il piano inclinato di un angolo α . Nel seguito saranno illustrate le due modalità con cui sarà eseguito questo esperimento: la prima si basa sulla misurazione dei tempi di percorrenza del carrello con un cronometro manuale, la seconda usa un cronometro elettronico per ottenere la misura del tempo in cui il carrello passa tra due traguardi ottici.

La rappresentazione schematica dell'esperimento, valida per entrambe le modalità di esecuzione, è mostrata nella figura 2

3.1 Modalità con l'uso del cronometro a mano

Le misurazioni da eseguire in questa modalità sono: 1) la lunghezza L della traiettoria percorsa dal punto più a "valle" del carrello ovvero il punto che urta il blocco di fine corsa fissato sul piano inclinato, 2) l'inclinazione del piano inclinato e 3) il tempo di percorrenza del tratto percorso dal carrello ottenuto con un cronometro manuale. L'incertezza sulla misurazione di L , tipicamente di tipo B, è valutata dallo sperimentatore ed è dell'ordine di qualche millimetro. L'incertezza sulla misurazione dell'inclinazione si ottiene con una livella elettronica ed è dell'ordine di 0.1° . L'incertezza sulla misurazione del tempo è tipicamente di tipo A ed è differente da individuo ad individuo a causa dei diversi tempi

²A parte il coefficiente di attrito che non è stato preso in considerazione nella (11)

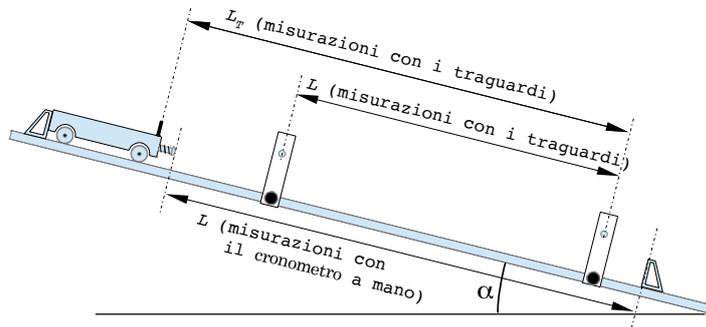


Figura 2: Esperimento del piano inclinato.

di reazione (i riflessi umani standard sono dell'ordine 1/20 s). Si consiglia di ripetere 10 – 20 volte la misurazione del tempo di percorrenza per ridurre l'incertezza di tipo A. E' opportuno che la ripetizione delle misurazioni di tempo sia eseguita da uno stesso sperimentatore per minimizzare eventuali effetti sistematici. Comunque si consideri che l'effetto sistematico dovuto al ritardo nel dare lo *start* al cronometro tende ad essere compensato dal ritardo con cui si dà il comando di *stop*.

3.2 Modalità con l'uso dei traguardi ottici e cronometro elettronico

L'utilizzo di strumenti elettronici permette di ottenere misurazioni di g più precise e accurate rispetto alla misurazione descritta precedentemente, tuttavia per utilizzare al meglio le potenzialità di questo sistema occorre analizzare l'esperimento con un certo dettaglio. La prima osservazione è che non sarà più possibile studiare il moto del carrello con partenza da fermo. Infatti per poter attivare il traguardo che dà lo *start* il carrello gli deve passare davanti con una certa velocità non nulla. Per la descrizione del moto si dovranno quindi utilizzare le relazioni descritte nel paragrafo 2.1 e in particolare la (11). Riscriviamo la (11) utilizzando le grandezze L_T , lunghezza totale della traiettoria percorsa dal carrello, e L , tratto di percorso compreso fra i due traguardi (vedi la figura 2). Con un poco di algebra si arriva alla seguente equazione oraria:

$$\frac{1}{t^2} = \frac{a}{2L_T(2 - L/L_T - 2\sqrt{1 - L/L_T})} \quad (12)$$

In questa seconda parte dell'esperienza la misurazione dei tempi con traguardi e cronometri elettronici risulta decisamente meglio definita di quella delle inclinazioni del piano, quindi per l'applicazione del MMQ è opportuno riscrivere la (12) usando l'accelerazione, ovvero l'angolo α poiché $a = g(\alpha - \mu)$, come variabile dipendente:

$$a = \frac{2L_T(2 - L/L_T - 2\sqrt{1 - L/L_T})}{t^2} \quad (13)$$

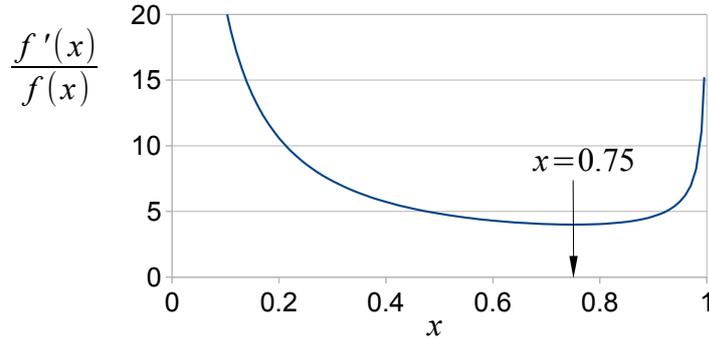


Figura 3: Andamento della derivata logaritmica della funzione $f(x)$ definita dalla (14)

3.3 Posizionamento del traguardo di start

Si deve ora risolvere il problema del posizionamento del traguardo di start ovvero della scelta del valore di L che dovrà essere compreso nell'intervallo $(0 - L_T)$. Per procedere a questa valutazione calcoliamo il contributo all'incertezza relativa dell'accelerazione (u_a/a) dovuto all'incertezza u_L della misura di L . Introduciamo la variabile adimensionale $x = L/L_T$ e supponendo, inizialmente, che l'incertezza su L_T sia trascurabile si ha $u_x = u_L/L_T$. Dalla (13) otteniamo il contributo cercato:

$$\left(\frac{u_a}{a}\right) = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| u_x$$

dove

$$f(x) = 2 - x - 2\sqrt{1-x} \quad (14)$$

Per determinare il posizionamento ottimale del traguardo di start cerchiamo quel valore di x che minimizzi la funzione $f'(x)/f(x)$, detta derivata logaritmica della funzione $f(x)$. Nella figura 3 è mostrato l'andamento questa funzione che mostra che per $x = 0$ e $x = 1$, l'incertezza relativa su a diverge. In particolare sarebbe una scelta errata posizionare il carrello in prossimità del traguardo di start. Infatti se assumiamo $L_T = 1.000$ m, $L = 0.980$ m e $u_L = 0.5$ mm si ha $x = L/L_T = .98$, $f'(x)/f(x) = 66$ e $u_a/a = 412\%$!!! Per ottenere il valore di x del minimo della derivata logaritmica di $f(x)$ si deve risolvere la seguente equazione:

$$\frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 = 0 \quad \text{equivalente a} \quad f(x)f''(x) - f'^2(x) = 0$$

infatti nell'intervallo $0 < x \leq 1$ risulta $f(x) > 0$. Sostituendo nell'equazione precedente le funzioni:

$$f(x) = 2 - x - 2\sqrt{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1, \quad f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$$

dopo un calcolo non difficile ma che richiede attenzione si arriva all'equazione:

$$x^2(4x - 3) = 0, \quad \text{la cui soluzione non banale è:} \quad x = \frac{3}{4} = 0.75$$

Quindi posizionando il traguardo di start ad una distanza $L = 0.75L_T$ dal quello di stop, il contributo dell'incertezza u_x all'incertezza dell'accelerazione è quello minimo.

Se si tiene conto anche dell'incertezza su L_T nel calcolo di quella su a , si ottiene:

$$\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} \left[\left(\frac{2L + 4(\sqrt{1 - L/L_T} - 1)L_T}{t^2 \sqrt{1 - L/L_T} L_T} \right)^2 u_{L_T}^2 + \left(2 \frac{(1 - \sqrt{1 - L/L_T})}{t^2 \sqrt{1 - L/L_T}} \right)^2 u_L^2 \right]$$

Supponendo ragionevolmente che $u_{L_T} = u_L$, dopo un calcolo decisamente più complesso del precedente, si ottiene che il valore di L che rende minima l'incertezza relativa dell'accelerazione è $L = 0.701226 L_T$.

4 Nota sull'attrito volvente

L'esperienza mostra che una biglia o un cilindro lanciati su un piano orizzontale in modo da rotolare senza strisciare rallentano fino ad arrestarsi. L'energia cinetica iniziale è dissipata a causa della presenza di una forza di attrito analoga all'attrito dinamico che rallenta un corpo che striscia lungo un piano, che viene detta *attrito volvente*. Anche se l'attrito volvente si esprime con una formula del tutto analoga a quella dell'attrito dinamico ($F_a = \mu F_n$, con F_n forza normale al piano di rotolamento), tuttavia il meccanismo che lo spiega è completamente diverso da quello con cui si spiega l'attrito dinamico. Per comprendere l'attrito volvente iniziamo considerando il caso ideale in cui una ruota ideale rotola senza strisciare su un piano *indeformabile* orizzontale (scabro oppure liscio). In questa situazione l'analisi delle forze che agiscono sulla ruota e sul piano mostra che le *forze di attrito sono nulle*. Infatti la ruota poggia sul piano in un unico punto *fermo* rispetto al piano e le uniche due forze agenti sono la forza peso applicata al centro di massa della ruota e la reazione vincolare applicata al punto di contatto. Entrambe sono verticali e applicate sulla stessa retta: risultante e momento risultante sono nulli sia se la ruota è ferma sia se rotola con velocità angolare costante. In realtà quando una ruota massiva poggia su un piano orizzontale la ruota e il piano si deformano trasformando il punto di contatto in una zona di contatto. Il passaggio della ruota deforma il piano³ cedendo al piano parte della sua energia cinetica. Questa energia trasformata in energia potenziale di deformazione viene restituita alla ruota quando la ruota abbandona la zona deformata. Quindi in presenza di una deformazione *perfettamente elastica* non si ha alcuna perdita di energia e non si ha attrito volvente. Questa situazione è schematicamente rappresentata nella figura 4 dove la curva tratteggiata indica l'intensità della forza elastica generata dalla deformazione del piano "davanti" e "dietro" alla ruota. Quella anteriore rallenta il moto e quella posteriore lo accelera con la stessa intensità. L'attrito

³In realtà si deformano entrambi piano e ruota. Per semplicità assegnamo l'intera deformazione al piano.

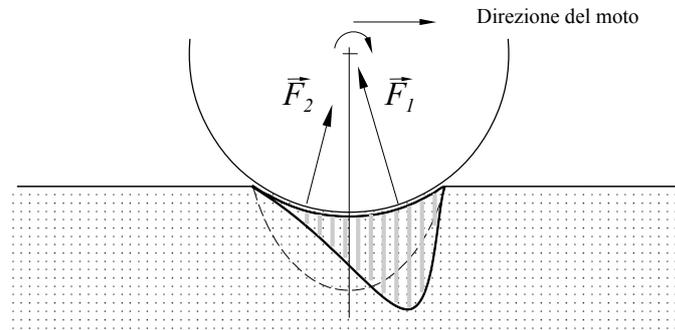


Figura 4: Schematizzazione del meccanismo che genera l'attrito volvente

volvente nasce poiché nella realtà le deformazioni non sono perfettamente elastiche e l'energia restituita alla ruota è inferiore a quella ceduta dalla ruota e l'energia mancante è dissipata in calore. Questa situazione è schematicamente rappresentata nella figura 4 dove la curva a tratto continuo evidenzia che l'intensità della forza elastica generata dalla deformazione del piano "davanti" (F_1) alla ruota è maggiore di quella generata "dietro" (F_2) la ruota. La differenza tra queste due forze essendo applicata in un punto "davanti" (nella direzione del moto) rispetto alla verticale passante per il centro della ruota genera un momento che rallenta il moto di rotolamento della ruota.