Forze elastiche e Molla elicoidale

May 13, 2018

1 Elasticità

L'elasticità è la proprietà dei corpi soldi di tornare nella loro forma originale dopo avere subito una deformazione generata dall'applicazione di una forza. Se la forza supera un certo valore, dipendente dal corpo, detto *limite di elasticità* la deformazione diviene permanente e si parla di deformazione plastica o addirittura di rottura. Un corpo solido si dice *perfettamente elastico* se torna nella sua forma originale una volta rimossa la forza che causa la deformazione restituendo tutta l'energia spesa per provocare la deformazione. La legge fondamentale dell'elasticità è la *legge di Hooke*:

> *la deformazione (δ) generata da una forza (F) applicata ad un corpo solido, una volta raggiunto l'equilibrio, è proporzionale alla sua intensità:*

$$\delta \propto F \tag{1}$$

Il corpo perfettamente elastico è un'idealizzazione che tuttavia descrive in modo sufficientemente accurato il comportamento di molti corpi solidi reali in un ampio intervallo di intensità di forze.

Esistono vari tipi di elasticità dei corpi solidi in funzione di come è applicata la forza deformante: elasticità di trazione, di compressione e di scorrimento[1]. Nel prossimo paragrafo descriveremo l'elasticità di scorrimento necessaria alla descrizione del funzionamento di una molla elicoidale.

2 Elasticità di scorrimento

Consideriamo un solido a forma di parallelepipedo di superficie S e altezza l sottoposto alla trazione esercitata da una forza F, come indicato nella figura 1. Sperimentalmente si ottiene che la deformazione Δx del solido è proporzionale alla forza applicata F, all'altezza l e inversamente proporzionale alla superficie S. In formula:

$$\Delta x = \frac{1}{G}\frac{lF}{S} \tag{2}$$

la costante di proporzionalità $1/G$ è detta *coefficiente di scorrimento* e il suo inverso, G,

[1] Per una trattazione teorica approfondita della teoria dell'elasticità si veda il testo di Lev D. Landau e Evgenij M. Lifsits: "Teoria dell'elasticità" Editori Riuniti.

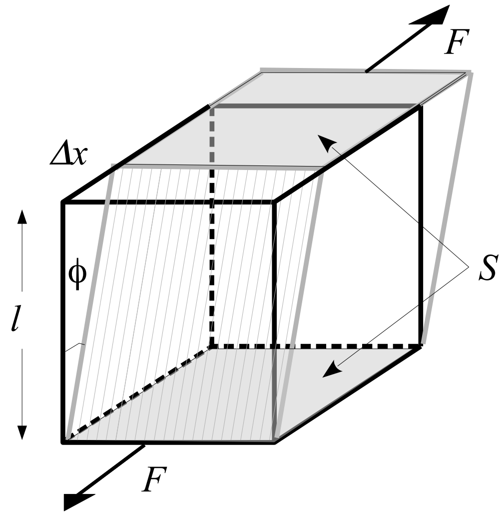

Figure 1: *Elasticità di scorrimento*

è detto *modulo di scorrimento*. G ha le dimensioni di una forza per unità di superficie, ovvero una pressione[2], ed è una caratteristica del materiale con cui è fatto il corpo. Nella tabella seguente sono riportati i valori del modulo di scorrimento (in inglese *shear modulus*) per alcuni materiali comuni.

Materiale	Modulo di Scorrimento ($GPa \equiv 10^9 N/m^2$)
Acciaio	79.3
Alluminio	25.5
Diamante	478
Gomma	0.0006
Polietilene	0.117

L'angolo ϕ, la cui definizione è deducibile dalla figura 1, è dato da

$$\phi \simeq \frac{\Delta x}{l} = \frac{1}{G}\frac{F}{S} = \frac{1}{G}\frac{M}{lS} \tag{3}$$

Dove si è ipotizzato che ϕ sia sufficientemente piccolo da poter confondere la tangente con il suo angolo e si è introdotto il momento M della coppia delle forze F di braccio l ($M = F\,l$).

3 Elasticità di torsione

Consideriamo un filo rettilineo omogeneo di sezione circolare fissato ad una estremità. Applichiamo all'altra estremità un momento "torcente" $\mathbf{M}_t$, si osserva che il filo sarà

[2] L'unità di misura della pressione è il *pascal* il cui simbolo è Pa.

"torto", ovvero il cerchio delle base a cui è applicato il momento M_t sarà ruotato di un angolo θ attorno all'asse longitudinale del filo. Questa deformazione è detta *torsione* . Per una deformazione di torsione la legge di Hooke prende la forma

$$M_t = f\theta \tag{4}$$

Il coefficiente f detto *modulo di torsione* dipende anche dalle caratteristiche geometriche del filo[3]. L'elasticità di torsione non rappresenta un nuovo tipo di elasticità ma può essere descritta attraverso il modulo di scorrimento G, parametro che descrive l'elasticità di scorrimento. Per dimostrare questa affermazione utilizziamo un solido cilindrico di raggio r e di lunghezza l tra le cui basi sia applicato un momento torcente $\mathbf{M}_t$, come indicato in figura 2. Consideriamo, un parallelepipedo elementare di area di base $dS =$

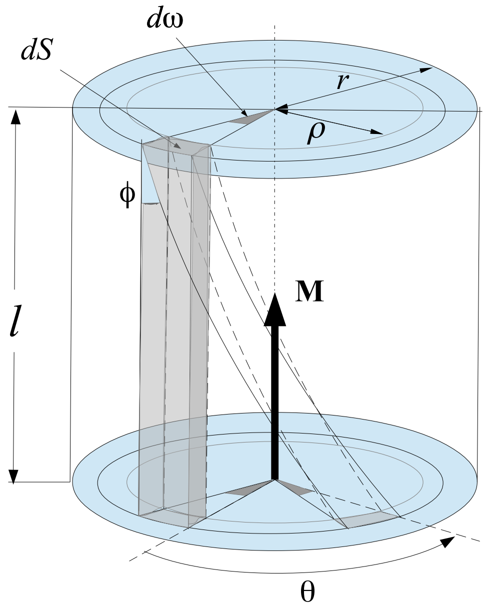

Figure 2: *Elasticità di torsione.*

$d\rho \cdot \rho d\omega$ ed altezza l prima dell'applicazione del momento torcente. L'applicazione del momento torcente per il parallelepipedo considerato è descrivibile con una deformazione di scorrimento per cui utilizzando la (3) possiamo scrivere:

$$\phi = \frac{1}{G}\frac{d\Gamma}{l \cdot dS} \tag{5}$$

dove $d\Gamma$ è il momento torcente infinitesimo che agisce sull'area elementare dS. La relazione precedente si può scrivere come:

$$d\Gamma = G\phi\, \rho d\rho d\omega \tag{6}$$

[3]I parametri associati all'elasticità di trazione, di compressione e di scorrimento dipendono unicamente dalle caratteristiche del materiale di cui è costituito il corpo soggetto alla deformazione e non dalla forma geometrica del corpo.

dalla (6) è possibile ricavare l'espressione della forza che agisce sulla superficie elementare dS: infatti $d\Gamma = l\,dF$ con dF forza elementare che agisce su dS; tenendo conto che $\phi = \rho\theta/l$, la (6) diviene

$$dF = G\frac{\theta}{l}\,\rho^2 d\rho d\omega \tag{7}$$

Il momento di questa forza elementare rispetto all'asse passante per il centro del cilindro, è il *momento torcente* elementare, e vale:

$$dM_t = \rho\,dF = G\frac{\theta}{l}\,\rho^3 d\rho d\omega \tag{8}$$

Per ottenere il momento totale dovremo integrare la (8) sia in ω sia in ρ:

$$M = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^r d\rho\, G\frac{\theta}{l}\,\rho^3 = \frac{\pi G\theta}{l}\frac{r^4}{2}$$

Confrontando la relazione precedente con la (4) otteniamo per il modulo di torsione

$$f = \frac{\pi G}{2}\frac{r^4}{l} \tag{9}$$

Si noti che come detto all'inizio del paragrafo, il parametro f dipende dalla geometria del filo: raggio e lunghezza. In particolare si deve notare la dipendenza dalla quarta potenza del raggio che permette di misurare forze dell'ordine[4] di 10^{-12}N.

La relazione precedente può essere scritta evidenziando la deformazione subita dal filo in funzione del momento torcente applicato:

$$\theta = \frac{2}{\pi G}\frac{Ml}{r^4} \tag{10}$$

4 La Molla

Una molla elicoidale per piccole deformazioni genera una forza di tipo elastico:

$$F = -k\Delta x \tag{11}$$

la costante di proporzionalità k tra l'allungamento e la forza generata k è detta *costante elastica* della molla e si misura, nel SI, in N/m. Analizzando la modalità con cui la molla si deforma si comprende che la forza generata dall'allungamento della molla è dovuta ad elasticità di torsione. Calcoliamo ora la relazione tra la costante k e il modulo di torsione f. Supponiamo di tagliare idealmente il filo con con cui è costruita la molla con un piano passante per l'asse della molla e per un generico punto A della molla (vedi la figura 3). Sia F_1 la forza che la parte inferiore della molla esercita nel punto A sulla parte superiore. In condizioni statiche $\vec{F_1} = -\vec{F}$. Le due forze F_1 e F formano una

[4] La misura di queste debolissime forze tipicamente si affronta con la bilancia di torsione nella quale possono essere utilizzati fili del diametro di $1\mu m$.

coppia di momento[5] $M = FR$. Consideriamo il momento M come applicato al punto A (nell'approssimazione di spira piana M è tangente alla spira), se consideriamo M come momento torcente dell'elemento di filo dl nel punto A potremo scrivere, a causa della (4), $d\phi = M/f_1$, dove f_1 è il modulo di torsione dell'elemento dx considerato. Indichiamo con f il modulo di torsione di una spira della molla e poiché il modulo di torsione, come indica la (9), è inversamente proporzionale alla lunghezza del filo, potremo scrivere $f = f_1 dl/2\pi R$. Si può quindi scrivere:

$$d\phi = \frac{M}{f 2\pi R} dl$$

A causa della torsione dell'angolo $d\phi$, l'estremità del filo si abbassa di $dx = Rd\phi$.

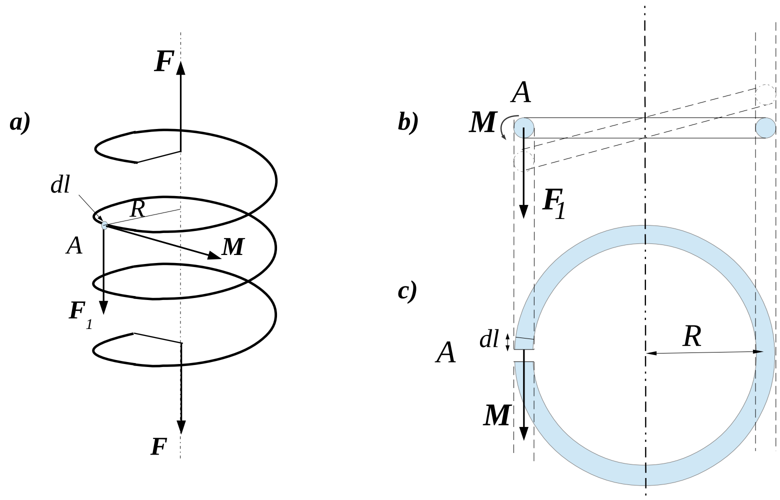

Figure 3: *a) Molla elicoidale. b) e c) schematizzazione per il calcolo della costante della molla.*

Integrando si ottiene lo spostamento finito x di una spira della molla soggetta alla forza F.

$$x = \int dx = \int_0^L \frac{FR^2}{f} \frac{dl}{L} = \frac{FR^2}{f}$$

Da questa relazione si può ottenere la costante elastica della molla di raggio R con n spire:

$$k = \frac{f}{nR^2}$$

Esercizio 1. Due molle "1" e "2" di costanti elastiche k_1 e k_2 sono collegate in serie. Si calcoli la costante elastica k_{eq} della molla equivalente alle due collegate in serie.

[5] Si è ipotizzato che l'angolo formato dal piano della spira con l'orizzontale sia piccolo. In altre parole le spire della molla sono considerate giacere su piano perpendicolare all'asse della molla

Soluzione. Se F è la forza applicata alle due molle collegate in serie, in condizioni statiche, F è la stessa forza applicata sia alla molla "1" sia alla "2", quindi

$$F = -k_2 \Delta x_2 = -k_1 \Delta x_1$$

L'allungamento totale è $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Il k equivalente delle due molle in serie è quindi:

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{F}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

oppure

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Esercizio 2. Due molle "1" e "2" di costanti elastiche k_1 e k_2 sono collegate parallelo. Si calcoli la costante elastica k_{eq} della molla equivalente alle due collegate in parallelo.

5 Moto di un grave connesso ad una molla

Consideriamo una massa m (assimilabile ad un punto materiale) connessa ad una molla ideale di costante elastica k in un campo di gravità $\vec{g}$. Indichiamo con x un asse parallelo all'accelerazione di gravità e diretto verso l'alto (in direzione opposta a $\vec{g}$). Sia x_o la coordinata del punto in cui si trova l'estremità libera della molla quando è a riposo (con carico nullo). Con questa scelta la forza esercitata dalla molla si scrive $-k(x - x_o)$. Trascurando gli attriti e supponendo che il moto sia monodimensionale, la legge del moto della massa m si scrive come:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_o) - mg \tag{12}$$

Metodo statico. Iniziamo cercando la posizione di equilibrio statico della massa m definita da accelerazione e velocità nulle. Si ottiene immediatamente che la posizione di equilibrio si ha quando il grave si trova nella posizione:

$$x_e = -mg/k + x_o \tag{13}$$

La relazione (13) permette di determinare la costante della molla k con il cosiddetto *metodo statico*. Questo metodo consiste nella misurazione di un certo numero di posizioni di equilibrio x_{ei} in corrispondenza del valore delle masse m_i. L'uso del metodo dei minimi quadrati con un *fit* lineare permette la determinazione di k e x_o con relative incertezze.

Metodo dinamico. La relazione (12) è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione (come per *tutte le equazioni differenziali lineari*) è data dalla soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata (quella che si ottiene ponendo a zero il termine noto) più una soluzione "particolare". Riscriviamo la (12) isolando il termine noto, dividendo la relazione per m e definendo il parametro $\omega_o^2 = k/m$ (le cui dimensioni fisiche sono $[T]^{-2}$):

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 x_o - g \tag{14}$$

Una soluzione particolare è data dalla funzione costante $x = x_o - g/\omega_o^2$, che coincide con la posizione di equilibrio statico della massa m. Come è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, la soluzione dell'equazione omogenea associata è data da

$$C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \tag{15}$$

dove s_1 e s_2 sono le soluzioni dell'equazione algebrica che si ottiene sostituendo alla funzione incognita $x(t)$ la variabile di appoggio s elevata alla potenza pari al grado della derivata e C_1 e C_2 sono due costanti di integrazione. Per la (14) l'equazione algebrica è $s^2 + \omega^2 = 0$, le cui soluzioni sono:

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega_o^2} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

In conclusione la soluzione cercata è:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t} + x_o - g/\omega_o^2$$

Per semplificare la notazione trasliamo l'origine dell'asse x nel punto $x_o - g/\omega_o^2$, ovvero $x \to x - (x_o - g/\omega_o^2)$. Con questa posizione la relazione precedente diviene

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t}$$

Per determinare le costanti C_1 e C_2 si devono imporre le condizioni iniziali, ad esempio che all'istante scelto come iniziale $t = 0$ la massa m sia nel punto $x = 0$ e che la elongazione massima della molla sia A. Dalla prima condizione si ricava facilmente che $C_1 = -C_2$, da cui,

$$x(t) = C_1(e^{i\omega_o t} - e^{-i\omega_o t}) = C_1(\cos\omega_o t + i\sin\omega_o t - \cos\omega_o t + i\sin\omega_o t) = 2iC_1\sin\omega_o t$$

dove, nella seconda uguaglianza, si è fatto uso della formula di Eulero. Per imporre la seconda condizione iniziale, notiamo che il valore massimo che può assumere la funzione seno è 1 per cui potremo scrivere $A = 2iC_1$ e $C_1 = A/2i$ e infine la soluzione cercata è:

$$x(t) = A\sin\omega_o t \tag{16}$$

Questa soluzione descrive, come aspettato, un moto sinusoidale o armonico attorno alla posizione di equilibrio. Introducendo il periodo del moto sinusoidale $T = 2\pi/\omega_o$, la (16) può essere scritta come:

$$x(t) = A\sin\frac{2\pi}{T}t = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \ ; \quad \text{Periodo del moto} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{17}$$

Moto armonico smorzato. In presenza di attriti viscosi, in prima approssimazione propozionali alla velocità, la legge del moto descritta nel paragrafo precedente (vedi la (12)), diviene:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_o) - mg - \beta\dot{x} \tag{18}$$

dove $-\beta$ è un coefficiente di dimensioni fisiche $[M][T]^{-1}$. Utilizzando la stessa traslazione dell'origine di x fatta nel paragrafo precedente e introducendo i parametri $\omega_o = \sqrt{k/m}$ (pulsazione in assenza di attrito) e $\zeta = \beta/(2\sqrt{mk})$ (parametro adimensionale che caratterizza l'intensità della forza viscosa), la (18) diviene:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \tag{19}$$

questa relazione, come la (14), è un'equazione differenziale a coefficienti costanti del secondo ordine, il cui polinomio associato: $s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2$ si annulla per

$$s_{1,2} = \omega_o\left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

Procedendo in modo analogo al caso precedente otteniamo la soluzione cercata:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\omega_o\zeta t}\left(C_1\mathrm{e}^{\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}\,t} + C_2\mathrm{e}^{-\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}t}\right)$$

Imponendo le condizioni iniziali, ad esempio come quelle nel caso privo di attrito ($x(0) = 0$ e amp[iezza massima pari ad A), otteniamo

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\omega_o\zeta t}\sin\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}\,t \tag{20}$$

La (20) descrive il moto di un grave soggetto ad una forza elastica in presenza di attrito viscoso le cui caratteristiche principali sono

- Il moto è di tipo oscillatorio modulato da un'esponenziale decrescente.
- La frequenza con cui il grave oscilla dipende dal parametro ζ e in particolare ($T_o = 2\pi/\omega_o$)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k(1-\zeta^2)}} = \frac{2\pi}{\omega_o}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{21}$$
- il valore del parametro ζ in molti casi genera correzioni trascurabili al periodo di oscillazione (vedi esempio numerico nel seguito)

6 Costante della Molla – Esperimento

La misurazione della costante elastica di una molla k può essere affrontato in due modi che brevemente indichiamo con "modo statico" che sfrutta la relazione $F = -k\Delta x$ e con "modo dinamico" che sfrutta la relazione $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

6.1 Modo statico.

La molla viene caricata con diverse masse di valore noto e in corrispondenza di ogni massa si misura la posizione della stessa rispetto ad un asse parallelo all'asse della molla e solidale con il punto di sospensione della molla. Si noti che se le spire della molla a riposo sono a contatto tra di loro, la misura di questa posizione è affetta da un errore sistematico che si annulla appena le spire iniziano a separarsi.

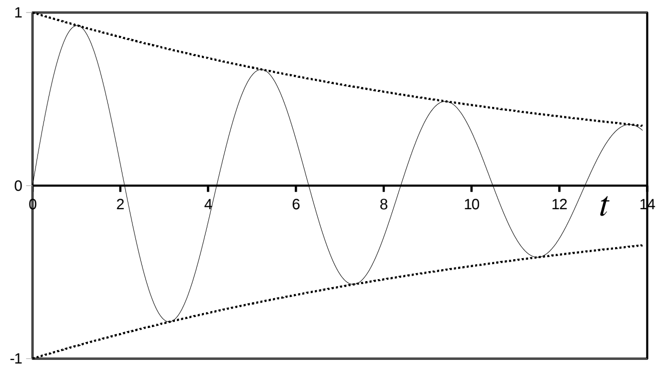

Figure 4: *Oscillazioni smorazte. Nel il grafico* $\omega_o = 1.5u.a.$ *e* $\zeta = 0.05$.

Analisi dati. Il *fit* dei dati sperimentali con una retta permette di ricavare sia k sia lo "zero", ovvero la posizione virtuale assunta dalla molla scarica.

6.2 Modo dinamico

La molla caricata con una massa m_i viene messa in oscillazione, si attende che le componenti non verticali del moto si attenuino e quindi si misura il corrispondente periodo di oscillazione T_i.

Analisi dati. In questo caso un esame più accurato del fenomeno mette in evidenza la presenza di alcuni effetti sistematici che possono influenzare la misurazione. In dettaglio:

A La massa oscillante muovendosi nell'aria subisce un'attrito viscoso e di conseguenza il moto non è più descritto da una funzione sinosuidale ma dalla (21) in cui sia l'ampiezza massima del moto diminuisce nel tempo in modo esponenziale sia il periodo di oscillazione dipende anche dal coefficiente di attrito attraverso il parametro $\zeta = \beta/(2\sqrt{mk})$.

B La massa[6] con cui è costruita la molla partecipa, in modo diseguale, al moto. Infatti, l'elemento di molla prossimo al punto in cui è applicata la massa oscilla come la massa mentre l'elemento di molla prossimo al punto di sospensione è fermo.

Esaminiamo in modo quantitativo i due effetti A e B.

Effetto A. In molte circostanze l'effetto sistematico A è trascurabile come accade ad esempio se l'ampiezza delle oscillazione si riduce di un fattore 1/e (e costante di Nepero) dopo un numero di oscillazioni dell'ordine di 10^2 con un valore del periodo dell'ordine di $1\,s$, da cui si ricava $\zeta \simeq 2\,10^{-3}$. Dalla (21) si valuta un effetto sistematico sul valore del periodo di oscillazione del periodo dell'ordine di 3 parti per milione.

[6]Si noti che la massa coinvolta in questa analisi è la massa inerziale della molla. Si dimostra facilmente che la massa gravitazionale della molla non influenza il moto se non per la traslazione del punto di equilibrio.

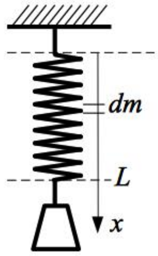

Figure 5: *Valutazione dell'energia cinetica della molla*

Effetto B. Per valutare quale frazione della massa della molla partecipi al moto oscillatorio calcoliamo quando vale l'energia cinetica di una molla "massiva" di massa m_m. Come ipotesi semplificativa supponiamo la molla come un corpo omogeneo[7] di densità lineare di massa $\lambda(L) = m_m/L$, dove L è la lunghezza della molla (variabile nel tempo). Se V è la velocità della massa collegata alla molla, nell'ipotesi di allungamento uniforme, la velocità $v_m(x)$ dell'elemento di massa della molla $dm = \lambda dx = (m_m/L)dx$, che si trovi ad una distanza x dal punto di sospensione è $v_m(x) = Vx/L$. L'energia cinetica elementare dell'elemento di massa dm è quindi $dK_m = (1/2)\, dm\, v_m^2(x)$:

$$K_m = \int dK_m = \int_0^{m_m} \frac{1}{2} v_m^2(x)\, dm = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{V^2}{L^2} x^2 \frac{m_m}{L}\, dx = \frac{1}{2} \frac{m_m}{3} V^2 \qquad (22)$$

Questo calcolo mostra che, nelle approssimazioni fatte, la molla partecipa al moto del sistema massa più molla con una massa equivalente m_{eq} pari a 1/3 della massa della molla. Per tenere conto della partecipazione della massa della molla al moto oscillatorio è quindi opportuno aggiungere alla massa m, che compare nella relazione (17), un contributo m_{eq} dovuto alla massa della molla. La relazione che può essere usata nel *fit* dei dati sperimentali è quindi:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m + m_{eq}) \qquad (23)$$

dove i parametri da stimare sperimentalmente sono sia k sia m_{eq}, quest'ultimo da confrontare con il valore $m_m/3$ ottenuto dal calcolo.

[7] L'allungamento della molla si distribuisce uniformemente lungo tutta la molla