Esperimentazioni di Fisica 1
Stima Intervallare

Università "Roma Tre" - Dipartimento di Matematica e Fisica

27 aprile 2018

Stima Intervallare

I metodi di stima puntuale dei parametri come il MMV e MMQ determinano il valore *puntuale* dei parametri incogniti che compaiono nelle *pdf* della variabili aleatorie di cui si è acquisito un campione di una certa dimensione.

Questi metodi tuttavia non sono in grado di determinare l'intervallo

$$\lambda_{inf} \leq \lambda \leq \lambda_{sup}$$

che contiene il *valore vero* del parametro con una probabilità β.

Questo intervallo è detto Intervallo di confidenza (i.c.) con contenuto di probabilità, detto comunemente Livello di Confidenza, β

Fattore di Copertura

Se si vuole essere ragionevolmente sicuri che il valore vero sia contenuto nell'i.c. si sceglierà per β una valore sufficientemente grande come il 90% o il 95.% o il 99%.

Usualmente in fisica la valutazione dell'incertezza u di un parametro è data dalla *deviazione standard* che, se la *pdf* del parametro è normale ha un livello di confidenza pari a $\beta =$68.3%.

Per aumentare il livello di confidenza (tecnica in uso presso i costruttori di strumenti di misura) si introduce l'incertezza Estesa $U = ku$, dove k è detto di fattore di copertura.

Distribuzione Normale dei dati – μ e σ noti

Supponiamo che X sia distribuita in modo normale $N(\mu, \sigma^2)$, (oppure che X sia la media di un numero sufficientemente elevato di misurazioni) allora

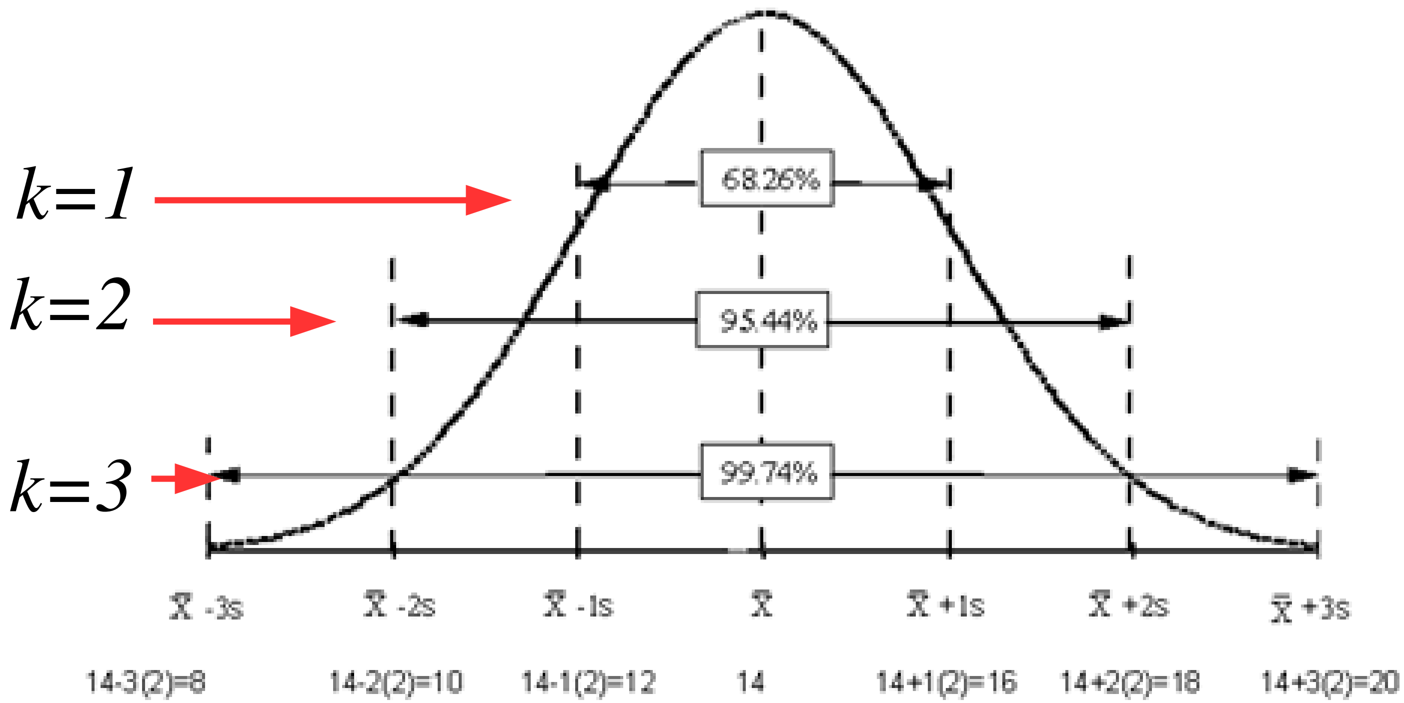
$$f(X|\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Se μ e σ sono note, la probabilità che X appartenga ad un intervallo $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ centrato su μ è:

$$\beta = P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2} = \Phi(k) - \Phi(-k)$$

Distribuzione Normale dei dati – μ e σ noti (cont.)

Interpretazione grafica di β



Distribuzione Normale dei dati – σ noto, μ ignoto

Se μ è ignoto non è più possibile calcolare il contenuto di probabilità dell'intervallo $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$. Tuttavia, invertendo la relazione $\beta = P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$ in

$$\beta = P(X - k\sigma < \mu < X + k\sigma)$$

che non è un'affermazione su μ, ma si limiti inferiore e superiore dell'intervallo. μ è un parametro fisso (senza distribuzione di probabilità) nell'interpretazione frequentista della probabilità.

Distribuzione Normale dei dati – σ noto, μ ignoto. (Cont.)

L'espressione precedente:

$$\beta = P(X - k\sigma < \mu < X + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k)$$

si legge:

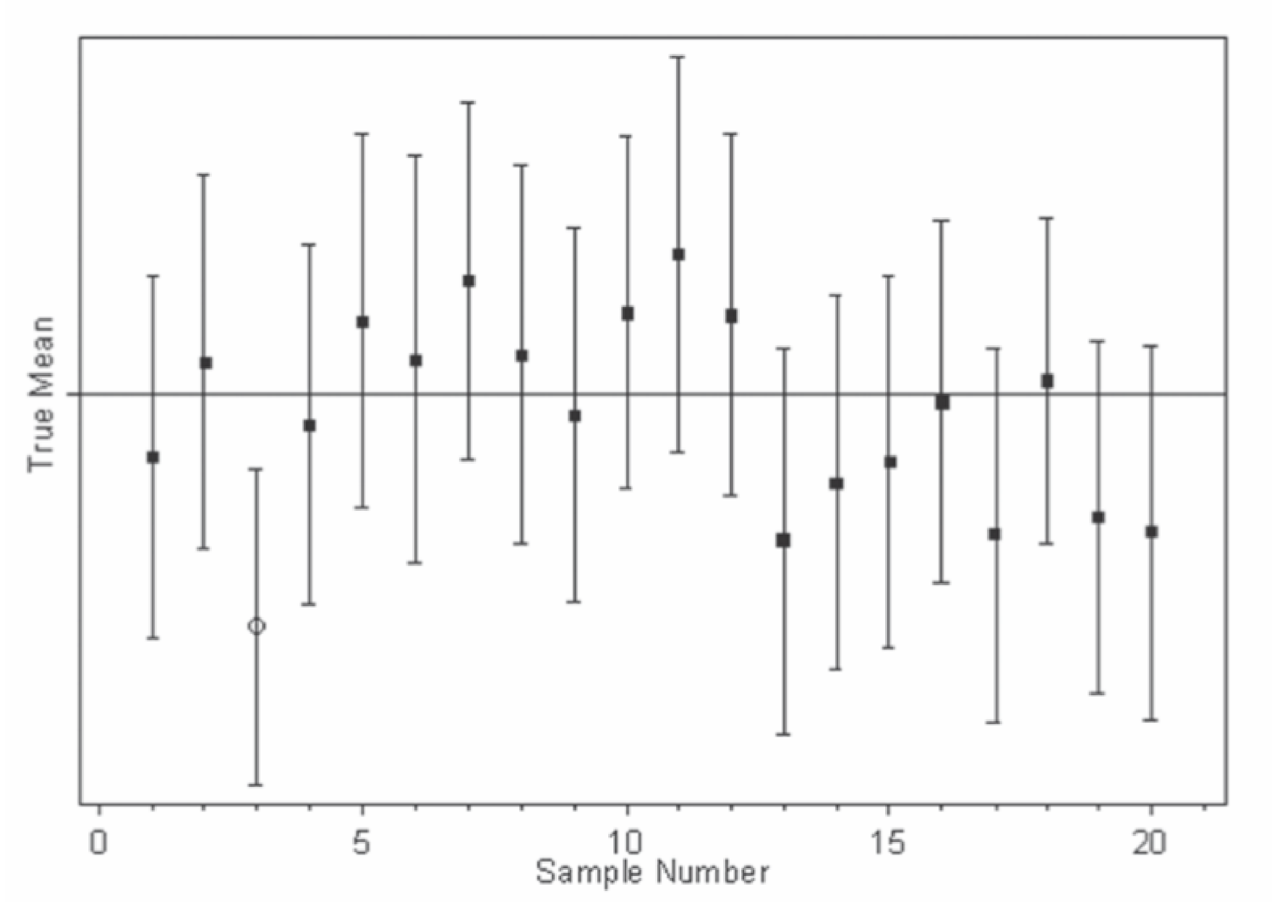
> *il parametro μ è contenuto con un livello di confidenza β nell'intervallo di confidenza $X - k\sigma, X + k\sigma$.*

e si interpreta in questo modo:

> *Se ripetessimo l'esperimento ottenendo molti valori di X gli intervalli di confidenza trovati conterrebbero, con probabilità β (ovvero il livello di confidenza fissato), il valore medio μ.*

Intervallo di confidenza: Interpretazione

Nella figura: 20 esperimenti ripetuti. Ogni barra rappresenta un c.i. al 95% c.l.



Intervallo e livello di confidenza

ESEMPIO: Si estrae un campione di dimensione 100 da una popolazione con distribuzione normale con varianza $\sigma^2 = 225$ nota e valore atteso incognito μ
Vogliamo calcolare l'intervallo di confidenza del valore atteso con un livello di confidenza del 95% sapendo che la stima della media sul campione è $\overline{x} = 1450$.

Come è noto la stima del valore medio μ è $\overline{x}$, la varianza della media è $\sigma^2/n = 225/100 = 2.25$ e $\overline{x}$ ha una distribuzione normale $\mathcal{N}(1450, 2.25)$ Per determinare l'intervallo di confidenza passiamo alla

variabile normale standardizzata $z = (\overline{x} - \mu)/(\sigma_{\overline{x}})$
Tenendo conto che $|\overline{x} - \mu| = 2\sigma_{\overline{x}} = 2\sqrt{2.25} = 3$ (Livello di confidenza = 95%) l'intervallo di confidenza è:

$$(\overline{x} - 2\sigma_{\overline{x}} \div \overline{x} + 2\sigma_{\overline{x}}) \qquad \text{ovvero} \qquad (1447 \div 1453)$$

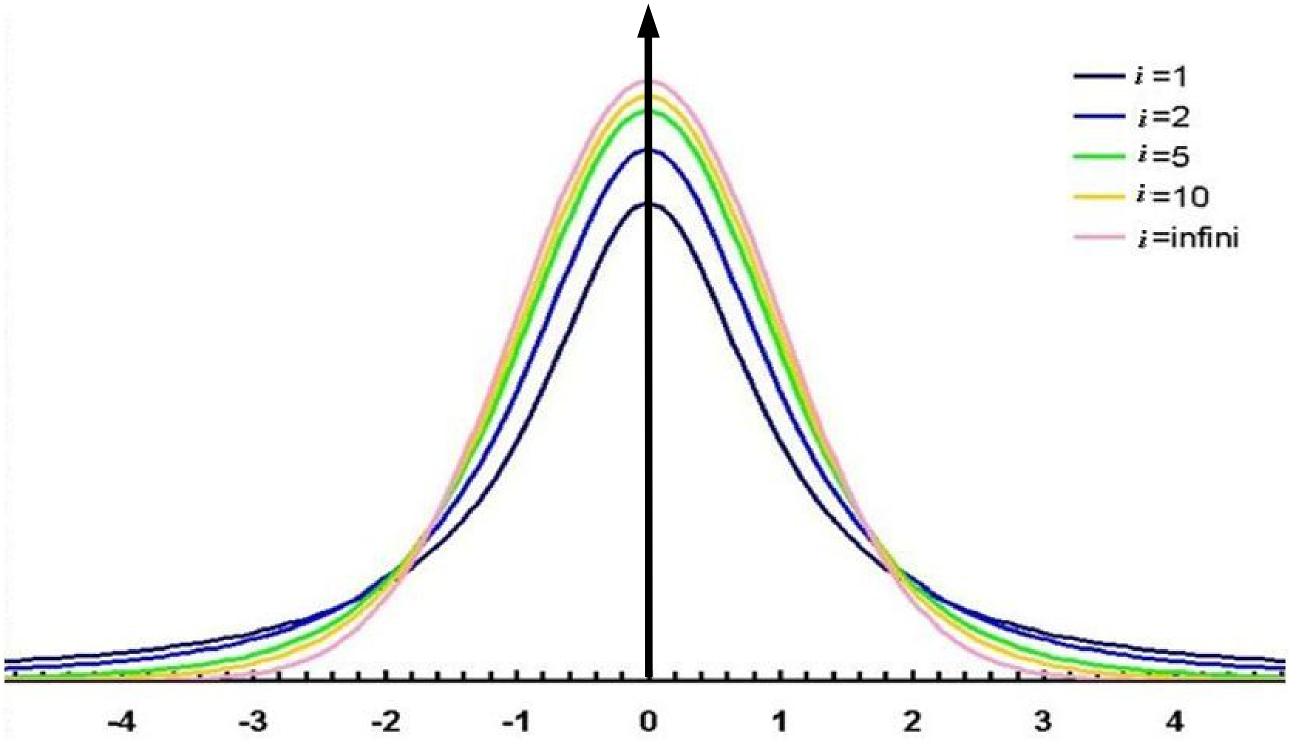
Il caso realistico – σ, μ ignoti

Consideriamo un campione di N misurazioni: $x_1, \ldots, x_N$ ottenute da una distribuzione di riferimento con valore medio μ e deviazione standard σ incogniti. Allora:

1. la media campionaria $\overline{x} = \sum x_i / N$ è la stima di μ
2. la stima della deviazione standard delle x è $s = \sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 / (N-1)}$
3. la variabile ridotta t definita da
$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{N}} \tag{1}$$
segue la distribuzione *t di Student con* $\nu = N - 1$ *gradi di libertà*

$$f(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu} B(1/2, \nu/2)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

t-Student



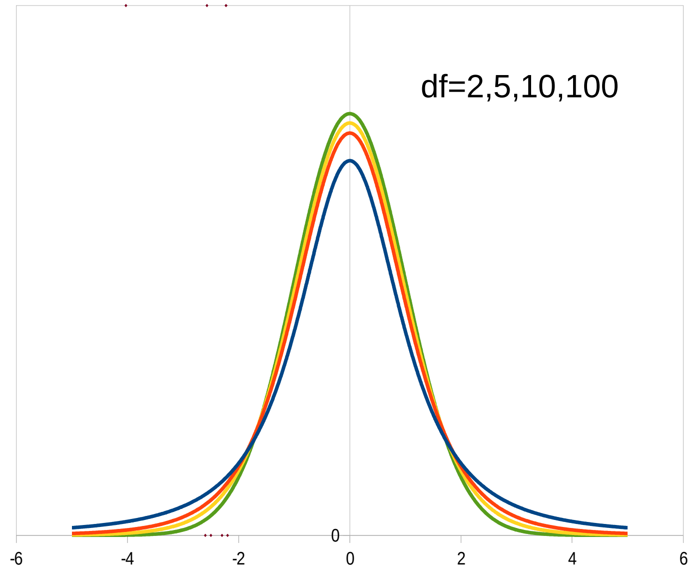
$\mathbb{E}[t] = 0$ esiste solo per $\nu > 1$; $\mathbb{V}\text{ar}[t] = \dfrac{\nu}{\nu - 2}$ esiste solo per $\nu > 2$

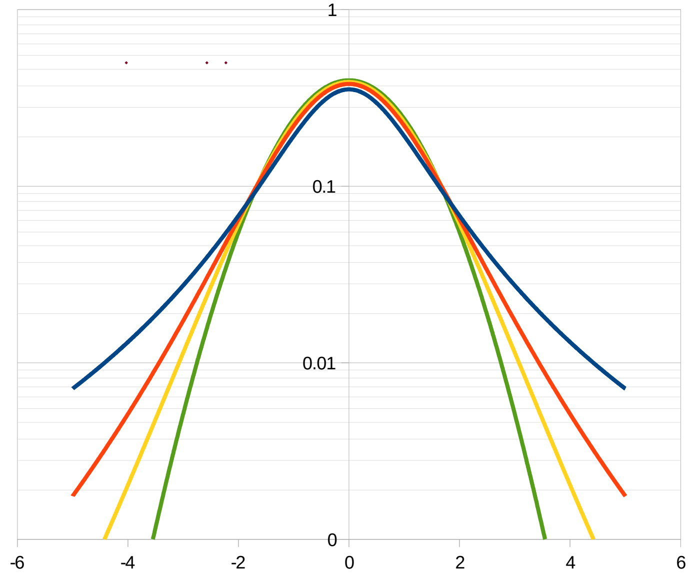
t-Student- Intervallo di confidenza al 95%

La seguente tabella fornisce la dimensione dell'intervallo di confidenza che contiene con il 95% di livello di confidenza il valore medio

Dimensione del campione	gradi di libertà	$t_{0.025}$
2	1	12.706
3	2	4.031
4	3	3.182
6	5	2.571
11	10	2.228
31	30	2.042
51	50	2.009
101	100	1.960
∞	∞	1.969

L'ultima riga con df=∞ coincide con la distribuzione gaussiana.

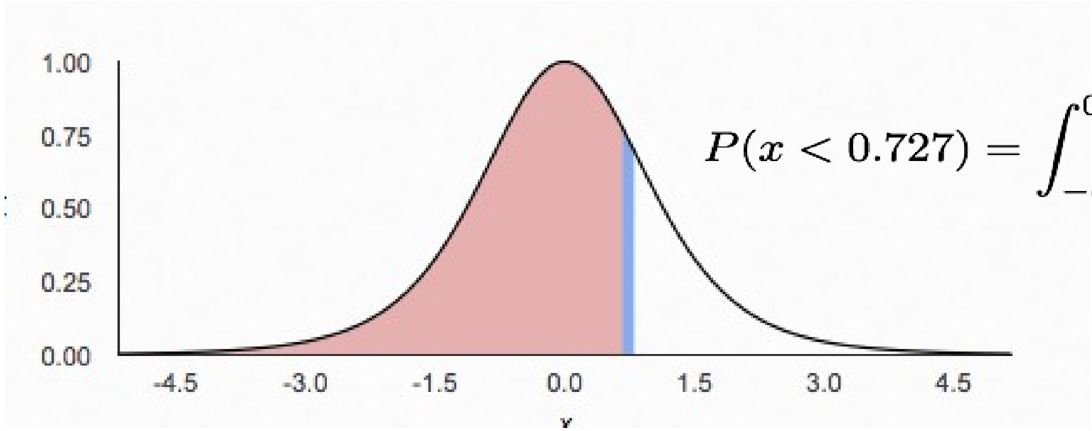




t-Student- Tabella Integrale a due code $\int_{-t}^{+t} f(t)dt$

t= / df	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
1	0.000	0.126	0.242	0.344	0.430	0.500	0.558	0.605	0.644	0.677	0.705	0.728	0.749	0.766	0.782	0.795
2	0.000	0.140	0.272	0.391	0.492	0.577	0.647	0.704	0.749	0.786	0.816	0.841	0.862	0.878	0.893	0.905
3	0.000	0.146	0.284	0.409	0.518	0.609	0.684	0.744	0.792	0.830	0.861	0.885	0.904	0.920	0.932	0.942
4	0.000	0.149	0.290	0.419	0.531	0.626	0.704	0.766	0.815	0.854	0.884	0.907	0.926	0.940	0.951	0.960
5	0.000	0.151	0.294	0.425	0.540	0.637	0.716	0.780	0.830	0.868	0.898	0.921	0.938	0.952	0.962	0.970
6	0.000	0.152	0.297	0.430	0.546	0.644	0.725	0.789	0.839	0.878	0.908	0.930	0.947	0.959	0.969	0.976
7	0.000	0.153	0.299	0.433	0.550	0.649	0.731	0.796	0.846	0.885	0.914	0.936	0.953	0.965	0.973	0.980
8	0.000	0.154	0.300	0.435	0.553	0.653	0.736	0.801	0.852	0.890	0.919	0.941	0.957	0.968	0.977	0.983
9	0.000	0.154	0.302	0.437	0.556	0.657	0.739	0.805	0.856	0.895	0.923	0.945	0.960	0.971	0.979	0.985
10	0.000	0.155	0.302	0.438	0.558	0.659	0.742	0.808	0.859	0.898	0.927	0.948	0.963	0.974	0.981	0.987
11	0.000	0.155	0.303	0.439	0.559	0.661	0.745	0.811	0.862	0.901	0.929	0.950	0.965	0.975	0.983	0.988
12	0.000	0.155	0.304	0.440	0.561	0.663	0.747	0.813	0.864	0.903	0.931	0.952	0.966	0.977	0.984	0.989
13	0.000	0.155	0.304	0.441	0.562	0.664	0.748	0.815	0.866	0.905	0.933	0.954	0.968	0.978	0.985	0.990
14	0.000	0.156	0.305	0.442	0.563	0.666	0.750	0.817	0.868	0.907	0.935	0.955	0.969	0.979	0.986	0.990
15	0.000	0.156	0.305	0.443	0.564	0.667	0.751	0.818	0.870	0.908	0.936	0.956	0.970	0.980	0.987	0.991
16	0.000	0.156	0.306	0.443	0.565	0.668	0.752	0.819	0.871	0.909	0.937	0.957	0.971	0.981	0.987	0.992
17	0.000	0.156	0.306	0.444	0.565	0.669	0.753	0.821	0.872	0.910	0.938	0.958	0.972	0.981	0.988	0.992
18	0.000	0.156	0.306	0.444	0.566	0.669	0.754	0.821	0.873	0.911	0.939	0.959	0.973	0.982	0.988	0.992
19	0.000	0.156	0.306	0.444	0.566	0.670	0.755	0.822	0.874	0.912	0.940	0.960	0.973	0.982	0.989	0.993
20	0.000	0.156	0.307	0.445	0.567	0.671	0.756	0.823	0.875	0.913	0.941	0.960	0.974	0.983	0.989	0.993
21	0.000	0.157	0.307	0.445	0.567	0.671	0.756	0.824	0.875	0.914	0.941	0.961	0.974	0.983	0.989	0.993
22	0.000	0.157	0.307	0.445	0.568	0.672	0.757	0.825	0.876	0.914	0.942	0.961	0.975	0.984	0.990	0.993
23	0.000	0.157	0.307	0.446	0.568	0.672	0.758	0.825	0.877	0.915	0.943	0.962	0.975	0.984	0.990	0.994
24	0.000	0.157	0.307	0.446	0.568	0.673	0.758	0.826	0.877	0.916	0.943	0.962	0.975	0.984	0.990	0.994
25	0.000	0.157	0.307	0.446	0.569	0.673	0.759	0.826	0.878	0.916	0.944	0.963	0.976	0.985	0.990	0.994
26	0.000	0.157	0.308	0.446	0.569	0.673	0.759	0.827	0.878	0.917	0.944	0.963	0.976	0.985	0.990	0.994
27	0.000	0.157	0.308	0.446	0.569	0.674	0.759	0.827	0.879	0.917	0.944	0.963	0.976	0.985	0.991	0.994
28	0.000	0.157	0.308	0.447	0.570	0.674	0.760	0.828	0.879	0.917	0.945	0.964	0.977	0.985	0.991	0.994
29	0.000	0.157	0.308	0.447	0.570	0.674	0.760	0.828	0.880	0.918	0.945	0.964	0.977	0.985	0.991	0.995
30	0.000	0.157	0.308	0.447	0.570	0.675	0.760	0.828	0.880	0.918	0.945	0.964	0.977	0.986	0.991	0.995
100	0.000	0.158	0.310	0.450	0.574	0.680	0.767	0.835	0.887	0.925	0.952	0.970	0.982	0.989	0.994	0.997

t-Student- TABELLE



$$P(x < 0.727) = \int_{-\infty}^{0.727} f_5(t)\, dt = 0.75009$$

	$P(T \leq t)$						
	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$	$t_{0.025}(r)$	$t_{0.01}(r)$	$t_{0.005}(r)$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250

Intervallo e Livello di confidenza – Esempio

Problema (Fornasini 9.1)
Due misurazioni indipendenti di una grandezza fisica hanno dato i valori 0.363 e 0.362, in opportune unità di misura. 1) Stimare valore medio e varianza della distribuzione di riferimento supponendo che sia normale. 2) Calcolare il livello di confidenza per un intervallo di confidenza corrispondente ad una fattore di copertura $k = 1$ e $k = 3$.

Soluzione
Stima del valore medio $= (0.363 + 0.362)/2 = 0.3625$
Stima della dev. std. del valore medio $\sqrt{2(0.0005)^2/2(2-1)} = 5.0 \times 10^{-4}$
Numero di gradi di libertà: $\nu = 2 - 1 = 1$

Intervallo di confidenza con un fattore di copertura $k = 1$: $0.3620 \div 0.3630$.
Dalle tabelle della *t-Student* si ricava che per $t = 1$ si ha un livello di confidenza $= 50\%$.

Intervallo di confidenza con un fattore di copertura $k = 3$: $0.361 \div 0.364$
Dalle tabelle della *t-Student* si ricava che per $t = 3$ si ha un livello di confidenza $= 79.5\%$

Sono fatte altre 8 misurazioni della stessa grandezza:

$$0.364, 0.365, 0.365, 0.367, 0.360, 0.363, 0.361, 0.364$$

Ripetere il problema.

t-Student- Esempi

Problema (Fornasini 9.1-cont.)
Stima del valore medio con 10 misure: 0.36340
Stima della dev. std. del valore medio di 10 misure 6.53×10^{-4}
Numero di gradi di libertà: $\nu = 10 - 1 = 9$

Intervallo di confidenza per un fattore di copertura $k = 1$: $0.3627 \div 0.3641$ $(t = 1)$. Livello di confidenza $= 66\%$.

Intervallo di confidenza per un fattore di copertura $k = 3$: $0.3614 \div 0.3653$ $(t = 3)$. Livello di confidenza $= 98.5\%$

Intervallo e Livello di confidenza – Esempio 2

Dovendo attrezzare un tavolo di laboratorio di fisica di una scuola, il responsabile decide di chiedere l'entità della spesa a chi lo avesse fatto recentemente. Le risposte di 10 colleghi sono (in euro):
1100, 3620, 2460, 850, 5100, 2080, 1730, 4250, 3160, 1790
Stabilire l'intervallo di confidenza con un livello di confidenza pari al 90% in modo da prevedere la spesa.

Soluzione.
Valore medio della spesa = 2614€, Stima della deviazione standard della media $\frac{1388}{\sqrt{10}} \simeq 439$
Numero dei gradi di libertà $\nu = 10 - 1 = 9$. La distribuzione da usare è la t di Student.
Il valore della variabile t per un livello di confidenza del 90% è $t_{0.10/2} = t_{0.05}$.
Dalla Tabella si ricava ($\nu = 9$): $t_{0.05} = 1.833$
Intervallo di confidenza al 90% c.l.:

$$2162 - 439 \cdot 1.833 \div 2162 + 439 \cdot 1.833$$

(1809÷ 3419)€

Se si volesse un c.l. del 95% si deve ricavare il valore per $t = t_{0.025}$: 2.26.
Intervallo di confidenza al 95% c.l. si ha: $2614 \pm 2.26 \cdot 439$

(1621, 3607) €

Test su media uguale in due campioni

Dati due campioni $x_1, x_2, \ldots, x_N$, e $y_1, y_2, \ldots, y_M$, si chiede se i due campioni provengono da una popolazione di riferimento con lo stesso valore medio. Fissiamo un livello di confidenza del 95%. Calcoliamo $\overline{x}, \overline{y}, s_x$ e s_y

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{N-1}} \qquad s_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \overline{y})^2}{M-1}}$$

La differenza $\overline{x} - \overline{y}$ ha varianza $s_x^2/N + s_y^2/M$ e la variabile T, definita come

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s_x^2/N + s_y^2/M}}$$

è distribuita come la t-Student con $\nu = N + M - 2$ gradi di libertà. Possiamo quindi calcolare l'integrale:

$$P = \int_{-T}^{+T} f_\nu(t)dt \quad \text{e se } P < 95\% \quad \text{il test è \textit{convenzionalmente} accettato}$$

Oppure confrontiamo $|T|$ con $t_{1-\alpha/2,\nu}$ con $\alpha = 0.05$ ricavato dalle tabelle (vedi esempio successivo).

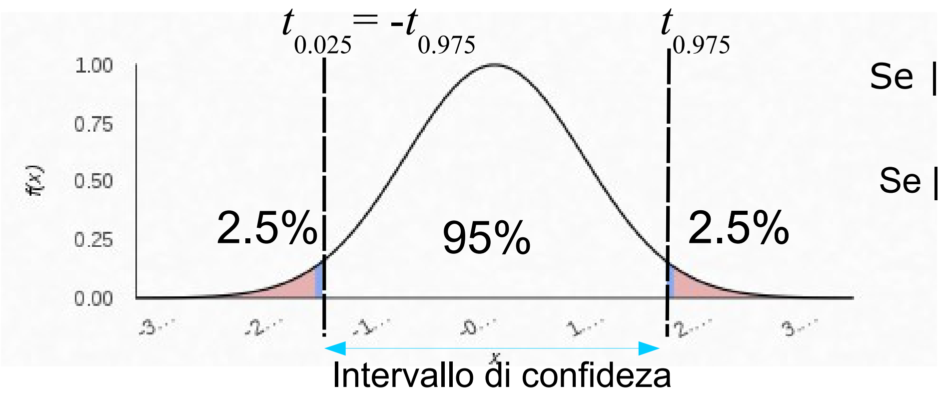
Test su media uguale in due campioni- Esempio

Le auto costruite in U.S.A. consumano come le auto costruite in Giappone?

	U.S.A.	Japan
Numero di osservazioni	249	79
Media	20.14458	30.48101
deviazione standard	6.41470	6.10771
dev. stand. media	0.40652	0.68717

$$s = \sqrt{\frac{6.41^2}{249} + \frac{6.11^2}{79}} = 0.798,\ T = \frac{20.14 - 30.48}{0.798} = -12.95, \quad \nu = 249 + 79 - 2 = 326 \ \simeq \text{gaussiana}$$

dalle tabelle $t_{1-\alpha/2,\nu} = 1.967$ $|T| > t_{1-\alpha/2,\nu}$, con $\alpha = 0.05$. Ipotesi rigettata.



Se $|T|<t_{0.975}$ Ipotesi accettata

Se $|T|>t_{0.975}$ Ipotesi rigettata

Problema Bini n. 1.5 (modificato)

Prendiamo le prime 5 misure sia dal gruppo A sia dal gruppo B, con l'ipotesi che abbiano la stessa media:

	Zona A	Zona B
Numero di osservazioni	5	5
Media	5430	5926
deviazione standard	346	149
dev. stand. media	155	67

$$T = \frac{5926 - 5430}{\sqrt{155^2 + 67^2}} = \frac{496}{168.5} = 2.94 \qquad \nu = 10 - 2 = 8$$

dalle tabelle per 8 g.d.l. a $T = 2.94$ corrisponde una probabilità 0.98 (bilatera). Questo risultato si interpreta come:

> *Se le medie della zona A e della zona B fossero uguali (ipotesi da testare) ci sarebbe una probabilità $1 - 0.98 = 0.02$ che la differenza tra le medie risulti > 496 ($T > 2.94$). Inferiore rispetto a 0.05, preso convenzionalmente come valore minimo standard*

L'ipotesi è quindi da scartare.