Esperimentazioni di Fisica 1
Elementi di Calcolo delle Probabilità
Parte prima

Università "Roma Tre" - Dipartimento di Matematica e Fisica

15 novembre 2017

Introduzione

- In ogni misurazione sono sempre presenti errori che influenzano in modo imprevedibile la stima della grandezza fisica che si vuole misurare; l'entità dell'indeterminazione della misura è valutata dal parametro *incertezza* che tiene conto dell'intervallo di variabilità della misura stessa.
- Da un punto di vista matematico, la stima della grandezza che si vuole misurare, per brevità la misura, è una variabile alla quale non è possibile assegnare un ben definito valore ma soltanto un intervallo di valori la cui ampiezza è determinata dall'incertezza.
- In matematica le variabili alle quali non è possibile assegnare un valore ben definito sono dette casuali oppure aleatorie oppure stocastiche e sono l'oggetto del *calcolo delle probabilità*.
- Le grandezze fisiche sono quindi variabili aleatorie e il calcolo delle probabilità fornisce gli strumenti logici e matematici per la costruzione della cosiddetta *Teoria delle Incertezze di Misura*.

La probabilità nel linguaggio comune

La probabilità, nell'uso comune che si fa di questo termine, riguarda situazioni nelle quali ci si trova in condizioni di incertezza

- a quale è il corso di laurea più adatto a me: Lettere o Fisica?
- quale sarà il tempo durante le vacanze in montagna che ho prenotato?
- mi conviene comprare le azioni della società A oppure quelle della società B?

Il concetto di probabilità è utilizzato in presenza di situazioni incerte, nelle quali un evento può o non può accadere.
Il calcolo delle probabilità permette di fare valutazioni quantitative su eventi incerti

Definizioni di Probabilità

La probabilità può essere definita in tre modi diversi. A tutt'oggi non c'è un consenso generale su quale definizione sia quella da assumere come definitiva.

- Definizione classica o combinatoria (Laplace 1812)
- Definizione frequentista (Fisher, primo 900)
- Definizione soggettiva(de Finetti 1937)

Definizioni di Probabilità

La probabilità può essere definita in tre modi diversi. A tutt'oggi non c'è un consenso generale su quale definizione sia quella da assumere come definitiva.

- Definizione classica o combinatoria (Laplace 1812)
- Definizione frequentista (Fisher, primo 900)
- Definizione soggettiva(de Finetti 1937)

Definizioni di Probabilità

La probabilità può essere definita in tre modi diversi. A tutt'oggi non c'è un consenso generale su quale definizione sia quella da assumere come definitiva.

- Definizione classica o combinatoria (Laplace 1812)
- Definizione frequentista (Fisher, primo 900)
- Definizione soggettiva(de Finetti 1937)

Definizione classica o combinatoria

- E' la definizione più naturale. La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili[1]:

$$P = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi totali}}$$

- (. . . ma "egualmente possibili" equivale a dire equiprobabili !? ovvero si definisce la probabilità utilizzando in modo circolare il concetto di la probabilità! Definizione ragionevole ma non logicamente fondata)

[1] Principio di ragione insufficiente

Definizione classica o combinatoria

- E' la definizione più naturale. La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili[1]:

$$P = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi totali}}$$

- (...ma "egualmente possibili" equivale a dire equiprobabili !?
ovvero si definisce la probabilità utilizzando in modo circolare il concetto di la probabilità! Definizione ragionevole ma non logicamente fondata)

[1] Principio di ragione insufficiente

Definizione classica o combinatoria- Esempi

Lancio di una Moneta

Evento favorevole $E =$TESTA
Casi Possibili {TESTA, CROCE}

$$P = \frac{1}{2}$$

Uscita di un numero pari nel lancio di un dado

Evento favorevole $E = \{2\}$ oppure {4} oppure {6}
Casi possibili {1, 2, 3, 4, 5, 6}

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Definizione classica o combinatoria- Esempi cont.

Estrarre un asso rosso da un mazzo di carte

Evento favorevole E ={asso di cuori} oppure {asso di quadri}
Casi possibili {52}

$$P = \frac{2}{52} = 0.038$$

Lancio di tre dadi

Probabilità che nel lancio di 3 dadi escano tre "6". Casi favorevoli 1.
Casi totali: disposizioni con ripetizione di 6 oggetti su 3 posti
$D'_{6,3} = 6^3$.

$$P = \frac{1}{D'_{6,3}} = 4.6 \times 10^{-3}$$

Fare ambo al lotto giocando 2 numeri

Eventi favorevoli sono tutte le cinquine in cui due numeri sono quelli giocati e gli altri tre, scelti tra i rimanenti 88, sono qualsiasi.

$$\binom{88}{3} = \frac{88!}{85!3!} = 109\,736$$

Casi possibili: tutte le cinquine che si possono fare con 90 numeri:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{85!5!} = 43\,949\,268$$

Probabilità di ambo $\quad P = \frac{5 \times 4}{90 \times 89} = 2.5 \times 10^{-3}$

Condizioni di applicabilità della definizione classica

Per applicare la Definizione classica è necessario che sia applicabile il principio di ragione insufficiente per tutti gli eventi, ovvero, gli eventi devono essere equiprobabili (?!)

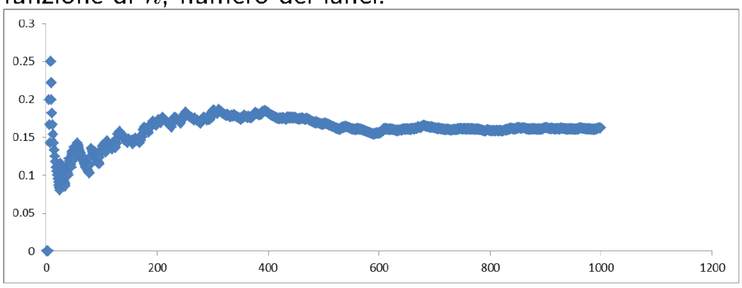
Questa definizione è inapplicabile se l'insieme dei casi possibili è infinito

Probabilità frequentista - 1

La frequenza di un evento f in n prove ripetute è il rapporto tra il numero di volte k in cui l'evento si è verificato e il numero totale delle prove n:

$$f = \frac{k}{n}$$

Esempio. Grafico della frequenza dell'uscita del "6" ($f = k/n$) in funzione di n, numero dei lanci.



Probabilità frequentista - 2

Nei casi in cui si può calcolare la probabilità a priori (lancio di una moneta o di un dado) si osserva che la frequenza relativa, al crescere del numero delle prove, approssima il valore della probabilità calcolata a priori.
L'espressione:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k}{n} = p \tag{1}$$

Questo risultato (sperimentale) è noto come la Legge Empirica del Caso: In una serie di prove ripetute molte volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza tende ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento. L'approssimazione migliora con il numero delle prove.

Probabilità frequentista - 3

La definizione frequentista di probabilità è basata sull'inversione della relazione (1). Ovvero:
si definisce probabilità p di un evento l'espressione:

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{k}{n} \tag{2}$$

La definizione frequentista permette di fare previsioni sul futuro basandosi sui dati statistici del passato supponendo che le condizioni siano analoghe.
Per esempio questa valutazione è utilizzata dalle compagnie di assicurazione sulla vita ed è applicata in molti campi della fisica. In generale la valutazione frequentista della probabilità è utilizzata in tutti i casi in cui dati statistici del passato possono essere ritenuti utili per descrivere il futuro

Concezione della probabilità soggettiva

Consideriamo le seguenti domande:

- Qual è la probabilità che la Grecia esca dall'euro?
- Qual è la probabilità che tu (proprio tu) supererai l'esame di Fisica Generale con un voto >27?
- Qual è la probabilità che la Ferrari vinca il prossimo campionato mondiale di formula 1?

Le definizioni sia classica sia frequentista della probabilità non permettono di valutare la probabilità da assegnare alle affermazione precedenti. – Non si possono infatti determinare casi possibili e casi favorevoli e gli eventi non sono ripetibili.

Definizione della probabilità soggettiva

> *La Probabilità di un evento è la misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce, in base alle sue informazioni, al verificarsi dell'evento.*

Definizione più operativa (scommessa coerente):
La probabilità è il prezzo p che un individuo razionale ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica. La coerenza consiste nell'accettazione della scommessa inversa: ricevere p e pagare 1 se l'evento si verifica (fare il bookmaker).

Teoria Assiomatica della probabilità

Dovuta a Kolgomorov (1933)

1. La probabilità $P(E)$ di un evento E è numero reale non-negativo tale che (Ω è lo spazio di tutti gli eventi)

$$P(E) \in \Re,\ P(E) \geq 0\ \forall E \in \Omega$$

2. $P(\Omega) = 1$
3. per ogni successione di eventi disgiunti (o mutualmente esclusivi) vale

$$P(E_1 \cup E_2 \ldots) = \sum P(E_i)$$

La teoria assiomatica della probabilità non fornisce alcuna modalità su come assegnare il valore della probabilità agli eventi. In altre parole la definizione assiomatica della probabilità *non è operativa*.

Eventi e Operazioni sugli eventi

In probabilità un evento è un qualsiasi avvenimento che può essere osservato e che si può realizzare in diversi modi (lancio di una moneta, l'estrazione di un numero del lotto, i millimetri di pioggia in un particolare giorno anche futuro).

- Somma logica o unione di due eventi A e B è l'evento che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi e si indica con $A \cup B$ oppure con $A + B$
- Prodotto logico o intersezione di due eventi A e B è l'evento che si verifica quando si verificano entrambi gli eventi e si indica con $A \cap B$ oppure con $A \cdot B$.
- L'evento contrario di A è l'evento che si verifica solo se non si verifica A e si indica con $\overline{A}$. E' l'evento complementare di A rispetto a Ω
- Due eventi sono incompatibili o mutualmente esclusivi se non hanno eventi elementari in comune

Probabilità e diagrammi di Wenn

I diagrammi di Wenn danno una rappresentazione grafica dei concetti basilari e delle operazioni elementari del calcolo delle probabilità.

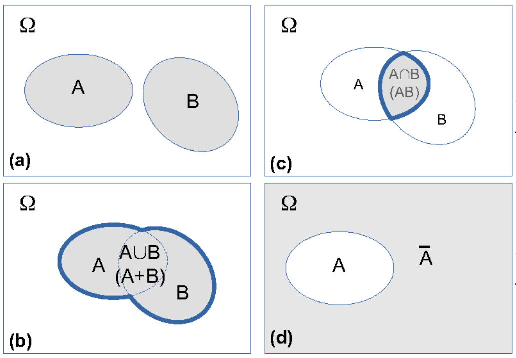


Diagramma (a):

$P(A \cup B) \equiv P(A+B) = P(A) + P(B)$
$A \cap B = \emptyset$

Diagrammi (b) e (c):

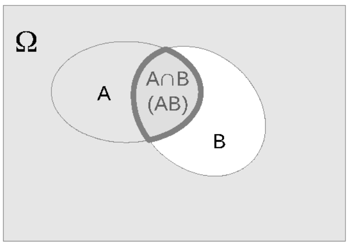
$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$A \cap B \neq \emptyset$

Diagramma (d):

$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$
$P(A+\overline{A}) = P(\Omega) = 1$

Probabilità condizionata

Si parla di *probabilità condizionata* quando la probabilità che si verifichi l'evento A è condizionata dal verificarsi dell'evento B e si indica con $P(A|B)$. Questa probabilità è quindi quella che si verifichi l'evento $A \cap B$ una volta che si sia verificato B.



P(A|B)

Essendosi ridotto lo spazio degli eventi all'evento B potremo scrivere:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \equiv \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (3)$$

Vale anche

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (4)$$

Eventi indipendenti e dipendenti

Due eventi A e B sono detti indipendenti o scorrelati se il verificarsi dell'uno non influisce sul presentarsi dell'altro, ovvero se

$$P(A|B) = P(A)$$

Esempio 1. Estrazione di due numeri con reinserimento da un urna con 30 palline numerate. Si vuole la probabilità che si verifichi $A \cap B$ (con un'altra notazione A.AND.B oppure AB)

1. Evento 1: $A =$estrazione del n. 30
2. Evento 2: $B =$estrazione del n. 18

Gli eventi sono *indipendenti*

$$P(A \cap B) \equiv P(A.AND.B) \equiv P(AB) =$$
$$P(A|B)P(B) = P(A|B) = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{30} = 1.11 \times 10^{-3}$$

Eventi indipendenti e dipendenti (cont.)

Esempio 2. Lancio di un dado:

1. Evento 1: $A =$esce un numero pari $P(A) = 1/2$
2. Evento 2: $B =$esce un numero maggiore di 3 $P(B) = 1/2$.

Gli eventi sono *dipendenti*, infatti

$$P(AB) = P(\{4, 6\}) = \frac{2}{6} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

Probabilità del prodotto di eventi -Probabilità composta

Usando la probabilità condizionata: Utilizzando una delle due espressioni della probabilità condizionata

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$
$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

se gli eventi A e B sono indipendenti deriviamo il teorema detto della probabilità composta

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

la probabilità che due eventi indipendenti accadano contemporaneamente è data dal prodotto delle probabilità dei due eventi

Nota su eventi disgiunti e indipendenti

Se due eventi hanno probabilità non nulla, non possono essere contemporaneamente 'disgiunti' o ' mutualmente esclusivi' e 'indipendenti'. L'essere 'mutualmente esclusivi' implica che l'intersezione dei due eventi abbia una probabilità zero, ma se gli eventi stessi hanno probabilità non zero, il prodotto delle loro probabilità non può essere zero.

Siano A e B due eventi mutualmente esclusivi e sia $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Per ipotesi $A \cap B = \varnothing$, allora se A si è verificato, la probabilità di B è zero ($P(B|A) = 0$). Poiché $P(B) > 0$ e $P(B|A) = 0$, il fatto che l'evento A influenza la probabilità che B si verifichi, implica che A e B non sono indipendenti. Quindi, se A e B sono mutualmente esclusivi, non sono indipendenti.

Teorema di Bayes

Dalle proprietà delle probabilità condizionate si ricava l'importante formula o teorema di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Il Teorema di Bayes è valido per ogni definizione di probabilità, ma sulla sua interpretazione le due scuole (frequentista e soggettivista detta anche bayesiana) si dividono.

Applicazione del Teorema di Bayes

Un test del sangue per rilevare l'AIDS ha le seguenti caratteristiche:

- Con sangue infetto il test dà un risultato positivo nel 99.7% dei casi
- Con sangue sano il test dà un risultato negativo nel 92.6% dei casi
- Il 0.5% della popolazione è infettata dal HIV.

Se un cittadino preso a caso nella popolazione è positivo al test qual è la probabilità che sia realmente infettato dal HIV?
Poniamo B: test positivo, A : soggetto infetto. Si vuole P(A|B)?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$
$$= \frac{0.997 \times 0.005}{0.997 \times 0.005 + (1 - 0.926) \times 0.995} = 6.3\%$$

Formula di Bayes. Esempio 2

Una compagnia di assicurazioni auto prevede per i guidatori giovani una polizza più alta, in quanto questo gruppo tende ad avere un numero maggiore di incidenti. La compagnia distingue le età in 3 gruppi: A (sotto i 25 anni, 22% di tutti i suoi assicurati), B (25-39 anni, 43%), C (da 40 anni in su). I dati mostrano che in media ogni anno le percentuali di assicurati che hanno un incidente sono:11% per il gruppo A, 3% per il B, 2% per il C. a) Che percentuale di assicurati ci si attende abbia un incidente nei prossimi 12 mesi? b) Se un assicurato X ha appena avuto un incidente, che probabilità c'è che abbia meno di 25 anni?

a) $P(I) = 0.11 \times .22 + 0.03 \times 0.43 + 0.02 \times 0.35 = 0.044$

b)

$$\begin{aligned} P(A|I) = & \frac{P(I|A)P(A)}{P(I|A)P(A) + P(I|B)P(B) + P(I|C)P(C)} \\ = & \frac{0.11 \times .22}{0.11 \times .22 + 0.03 \times 0.43 + 0.02 \times 0.35} = 0.55 \end{aligned}$$

Variabili casuali o aleatorie

In probabilità e in statistica, una variabile casuale, o variabile aleatoria o variabile stocastica (ing. random variable) è una variabile il cui valore è soggetto a variazioni dovute al caso.
Una variabile casuale può assumere un insieme di valori diversi (come le altre variabili matematiche), tuttavia ad ogni valore della variabile è associata la probabilità associata di assumerlo, differentemente dalle altre variabili matematiche (deterministiche).
Se x è una variabile aleatoria, ad esempio il risultato del lancio di una moneta o il risultato del lancio di un dado, ad ogni suo valore x_i è associabile una probabilità P_i:

$$P_i = P(x = x_i), \qquad \sum_i P_i = 1$$

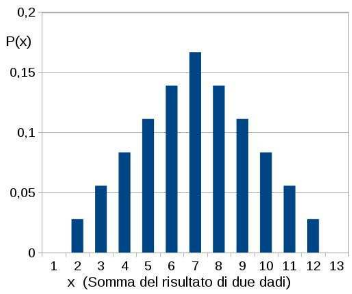
L'insieme dei valori P_i è detto distribuzione di probabilità di x .

Esempio: Lancio di due dadi

Nel lancio di due dadi, definiamo la variabile aleatoria x come somma delle uscite dei due dadi.

$$x = n_1 + n_2$$

2	1, 1						1/36
3	1, 2	2, 1					2/36
4	1, 3	2, 2	3, 1				3/36
5	1, 4	2, 3	3, 2	4, 1			4/36
6	1, 5	2, 4	3, 3	4, 2	5, 1		5/36
7	1, 6	2, 5	3, 4	4, 3	5, 2	6, 1	6/36
8	2, 6	3, 5	4, 4	5, 3	6, 2		5/36
9	3, 6	4, 5	5, 4	6, 3			4/36
10	4, 6	5, 5	6, 4				3/36
11	5, 6	6, 5					2/36
12	6, 6						1/36



Distribuzione di probabilità di x

Perché le variabili aleatorie sono utilizzate nell'analisi delle misure?

Le misurazioni sia che siano numeri interi o reali sono soggette a incertezza e quindi sono naturalmente variabili aleatorie.

La conoscenza che abbiamo sul valore di una grandezza risiede essenzialmente nel valore di probabilità che vi possiamo associare.

Variabili casuali discrete e continue

Variabili discrete

Sono variabili aleatorie che assumono valori interi in numero finito o infinito. L'espressione $P(n)$ indica la probabilità che la variabile discreta assuma il valore n. Una distribuzione di probabilità deve essere normalizzata

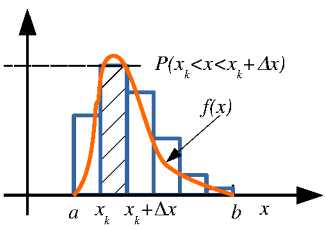
$$\sum_{i=n_1}^{n_2} P(n_i) = 1; \quad (n_1, n_2) \text{ intervallo di definizione di } n$$

n_1 e n_2 possono essere rispettivamente $-\infty, +\infty$

Variabili casuali continue

Variabili continue

- La probabilità che una variabile reale assuma uno specifico valore è zero.
- Per utilizzare i concetti probabilistici alle variabili continue si ricorre agli strumenti forniti dall'analisi matematica.



Definiamo la densità di probabilità $f(x)$ come:

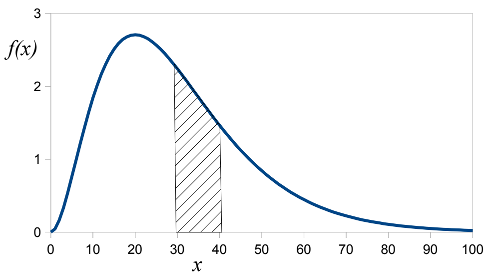
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_k < x < x_k + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$P(a < x < b) = \sum_k f(x_k)\Delta x \to \int_a^b f(x)dx$$

l'ultimo passaggio è per $\Delta x \to 0$

Funzione densità di probabilità. Proprietà

- Positività: $f(x) \geq 0$ in tutto l'intervallo di definizione
- Normalizzazione $\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} f(x)dx = 1$
- Ha dimensioni fisiche inverse della variabile x
- La probabilità che la variabile aleatoria x con funzione di densità di probabilità $f(x)$ abbia un valore compreso tra a e b $(a < b)$ è:



$$\int_a^b f(x)dx$$

Funzione cumulativa di probabilità

La funzione *cumulativa di probabilità* o *funzione di ripartizione*, $F(x)$, dà la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori inferiori al suo argomento.

Variabili discrete

$$F(k) = \sum_{i=n_1}^{k} P(n_i) \qquad = P(K \leq k)$$

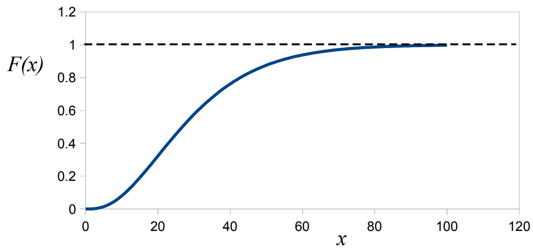
Variabili continue

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx' \qquad = P(X \leq x)$$

Proprietà della Funzione cumulativa di probabilità

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

la $F(x)$ è montòna e il suo valore massimo è 1.



Proprietà delle distribuzioni di probabilità

Consideriamo una funzione $g(x)$ della variabile aleatoria x. Si definisce valore atteso di $g(x)$ il valore:

$$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_i g(x_i) P_i \qquad \mathbb{E}[g(x)] = \int_\Omega g(x) f(x) dx$$

(caso discreto) (caso continuo)

"L' operatore" *valore atteso* è un operatore lineare. Vale quindi la relazione

$$\mathbb{E}[\alpha g(x) + \beta h(x)] = \alpha\, \mathbb{E}[g(x)] + \beta\, \mathbb{E}[h(x)]$$

dove $g(x)$ e $h(x)$ sono due funzioni di x e α e β sono due costanti.

Valore medio e Varianza

Il valore atteso della variabile x $(g(x) = x)$ prende il nome di valore medio della variabile:

$$\mathbb{E}[x] \equiv \mu = \sum_i x_i P_i \qquad \mathbb{E}[x] \equiv \mu = \int_\Omega x f(x) dx$$

(caso discreto) (caso continuo)

Il valore atteso dello scarto quadratico $(x - \mu)^2$ è detta varianza della variabile x.

$$\mathbb{E}[(x-\mu)^2] \equiv \mathbb{V}\text{ar}[x] \equiv \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P_i \quad \text{(caso discreto)}$$

$$\mathbb{E}[(x-\mu)^2] \equiv \mathbb{V}\text{ar}[x] \equiv \sigma^2 = \int_\Omega (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \text{(caso continuo)}$$

Un'altra espressione della varianza

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[x] &= \mathbb{E}[(x-\mu)^2] = \mathbb{E}[x^2 - 2x\mu + \mu^2] = \mathbb{E}[x^2] - 2\mu\,\mathbb{E}[x] + \mu^2 \\
&= \mathbb{E}[x^2] - 2\mu\mu + \mu^2 = \mathbb{E}[x^2] - \mu^2 = \mathbb{E}[x^2] - [\mathbb{E}[x]]^2
\end{aligned}
$$

che si legge: la varianza è la differenza tra il valore atteso del quadrato della variabile e il valore atteso al quadrato della variabile.

Distribuzioni di probabilità notevoli

Discrete

- di Bernoulli
- Binomiale
- di Poisson

Continue

- Uniforme
- Gaussiana o Normale
- ...

Prova e Distribuzione di Bernoulli

Prova e Processo di Bernoulli

Un esperimento o prova di Bernoulli è un evento che può avvenire con due modalità: successo (con probabilità p) e insuccesso (con probabilità $q = 1 - p$). Esempio uscita di testa nel lancio di una moneta, uscita di un certo numero alla tombola,....
Con *Processo di Benoulli* si intende una successione anche infinita di prove di Bernoulli indipendenti e con la stessa probabilità p.

Distribuzione di Bernoulli

Ad una prova di Bernoulli associamo la variabile a due valori $X = \{0, 1\}$, $X = 0$ insuccesso e $X = 1$ successo. Se p è la probabilità di successo, la distribuzione di Bernoulli è:
$P(0) = q = 1 - p$, $P(1) = p$
Calcoliamo valore medio e varianza di X

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p \qquad \mathbb{E}[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p$$

Distribuzione Binomiale

La distribuzione Binomiale dà la probabilità del numero k di successi in N prove di Bernoulli di probabilità p.
Esempio: lancio una moneta $N = 10$ volte; qual è la probabilit'a di ottenere $k = 8$ volte testa (successo) e due volte croce (insuccesso):

$$p^8(1-p)^2$$

Poiché non è importante l'ordine con cui si sono susseguiti i successi, la distribuzione di probabilità binomiale è:

$$\mathcal{B}_{N,p}(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Distribuzioni Binomiale

Normalizzazione

$$\sum_{k=0}^{N} \mathcal{B}_{N,p}(k) = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = (p+q)^N = 1$$

Valore Medio

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[k] &= \sum_{k=0}^{N} k\mathcal{B}_{N,p}(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N(N-1)!}{(N-1-k+1)!(k-1)!} p^k q^{N-k} \\ &= Np \sum_{i=0}^{M} \frac{M!}{(M-i)!i!} p^i q^{M-i} = Np \quad (M = n-1,\ i = k-1)\end{aligned}$$

Distribuzione di Poisson

Fissiamo un intervallo di tempo Δt e contiamo gli eventi casuali k che capitano in questo intervallo di tempo (conteggi di raggi cosmici, decadimanti radioattivi, numero di clienti in un negozio...). La distribuzione di probabilità di k è la distribuzione di Poisson che è:

$$\mathcal{P}_{\mu}(k) = \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu}$$

dove μ è il valore medio della distribuzione come vedremo con il calcolo diretto.

Distribuzione di Poisson - condizioni

1. la probabilità di conteggio è proporzionale a δt
2. la probabilità di un conteggio in δt è piccola! due eventi non possono capitare nello stesso intervallino
3. gli eventi sono indipendenti.

Distribuzione di Poisson - Normalizzazione e Valore medio

Normalizzazione.

$$\sum P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}$$

Essendo l'espressione nel simbolo di sommatoria lo sviluppo in serie di Taylor dell'esponenziale e^{μ}, l'enunciato è dimostrato.

Valore Medio.

$$\sum kP(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\mu} = \mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j}{j!} \mathrm{e}^{-\mu} = \mu$$

Distribuzione di Poisson - Varianza

Varianza. $\mathbb{V}\text{ar}[k] = \mathbb{E}[(k-\mu)^2] = \mathbb{E}[k^2] - \mu^2$

$$\mathbb{E}(k^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \, \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mu \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\mu}$$

e ponendo $j = k - 1$:

$$\mathbb{E}(k^2) = \mu \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\mu^j}{j!} \mathrm{e}^{-\mu} = \mu \left(\sum_{j=0}^{\infty} j \, \frac{\mu^j}{j!} \mathrm{e}^{-\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j}{j!} \mathrm{e}^{-\mu} \right) = \mu^2 + \mu$$

Da questo risultato si ottiene immediatamente:

$$\mathbb{V}\text{ar}[k] = \mathbb{E}[k^2] - (\mathbb{E}[k])^2 = \mu$$

Distribuzione di Poisson come limite della Binomiale

Consideriamo n eventi casuali che capitino in un intervallo di tempo T. La probabilità che un evento capiti in Δt è $p = \Delta t/T$. La probabilità che k eventi capitino in Δt è:

$$\mathcal{B}_{n,p}(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^k\left(1-\frac{\Delta t}{T}\right)^{n-k}$$

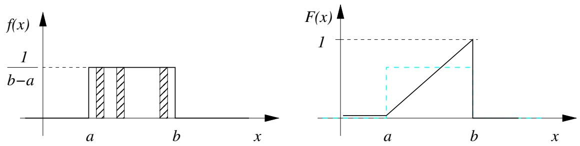
Poniamo $\lambda = np = n\Delta t/T$ costante e passiamo al limite per $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(k-1)}{k!}\left(\frac{\Delta t\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\Delta t\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
=&\frac{(\Delta t\lambda)^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(k-1)}{n^k}\left(1-\frac{\Delta t\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\Delta t\lambda}{n}\right)^{n}\\
=&\frac{(\Delta t\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\Delta t\lambda} = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}
\end{aligned}$$

Distribuzione Uniforme

La distribuzione uniforme ha una densità di probabilità costante nell'intervallo di definizione.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



Valore Medio e Varianza

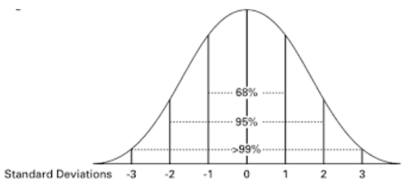
$$\mathbb{E}[x] = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{E}[x^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[x] = E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{1}{12}(4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuzione Normale o Gaussiana

La distribuzione normale o gaussiana gioca un ruolo fondamentale in teoria della probabilità e nell'analisi dei dati. La densità di probabilità gaussiana è:

$$N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

Parametri della distribuzione Normale

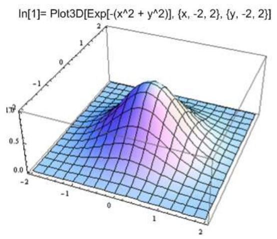
- Valore medio μ
- Varianza σ^2 - Deviazione Standard σ

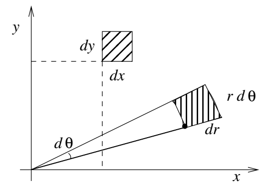
Distribuzione Normale - Normalizzazione

Per dimostrare la normalizzazione della gaussiana si deve calcolare l'integrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\, dx$

Un trucco per calcolarlo:

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr\ \mathrm{e}^{-r^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} dr\ r\mathrm{e}^{-r^2} = \\
&= \pi \int_0^{+\infty} d(-\mathrm{e}^{-r^2}) = \pi
\end{aligned}
$$





Quindi:

$$I = \sqrt{\pi}$$

Distribuzione Normale - Valore Medio e Varianza

Calcolo del Valore Medio

$$\mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \left(\text{poniamo } z = \frac{x-\mu}{\sigma}; \quad dx = \sigma dz\right)$$

$$\mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} dz = \mu$$

Calcolo della varianza

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \left(\text{poniamo } z = \frac{x-\mu}{\sigma}; \quad dx = \sigma dz\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

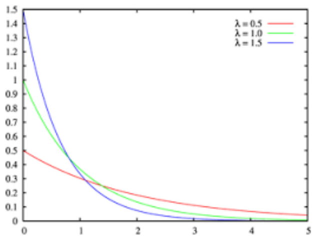
$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \sigma^2$$

Distribuzione esponenziale

La distribuzione esponenziale (negativa) ha la seguente espressione:

$$f(t) = \lambda \mathsf{e}^{-\lambda t} \qquad \text{per } t \geq 0$$

per esempio descrive il tempo che passa tra eventi in un processo di Poisson, oppure la distribuzione dell'energia di un insieme di particelle in equilibrio termico, oppure la concentrazione dei portatori di carica nei pressi di una giunzione,...



Calcolo del Valore Medio e Varianza

$$\mathbb{E}[t] = \int_0^\infty t\,\lambda \mathsf{e}^{-\lambda t}\,dt = \int_0^\infty t\left(-\frac{d\mathsf{e}^{-\lambda t}}{dt}\right) dt =$$

$$= -t\mathsf{e}^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \mathsf{e}^{-\lambda t}\,\lambda dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{V}\mathsf{ar}[t] = \mathbb{E}[t^2] - (\mathbb{E}[t])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Momenti di variabili aleatorie

Il *momento di ordine n* di una variabile aleatoria, indicato con m'_n, è definito come il valore atteso della potenza n-esima della variabile; per variabili aleatorie discrete e continue si ha rispettivamente:

$$m'_n = \sum_k k^n P_n \qquad m'_n = \int_\Omega x^n f(x)\, dx$$

Il momento del primo ordine è il valore medio della variabile: $m'_1 = \mu$.
Momenti centrali di variabili aleatorie.:

$$m_n = \sum_k (k-\mu)^n P_n \qquad m_n = \int_\Omega (x-\mu)^n f(x)\, dx$$

dove μ è il valore medio della variabile. E' facile verificare che $m_1 = 0$ e $m_2 = \sigma^2$.

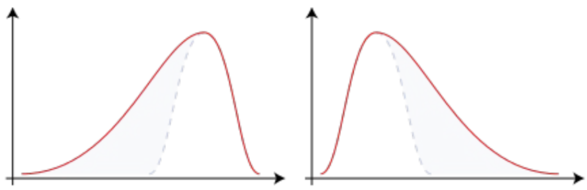
I momenti centrali di ordine 3 e 4 vengono utilizzati per definire due parametri che caratterizzano la forma delle distribuzioni: l'indice di asimmetria e la curtosi.

Momenti di variabili aleatorie

Indice di Asimmetria o Skewness.

Il parametro con cui si caratterizza l'asimmetria della distribuzione rispetto al suo valore medio, detto *Indice di Asimmetria o Skewness* è definito come:

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{1}{\sigma^3}(\mathbb{E}[x^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3)$$

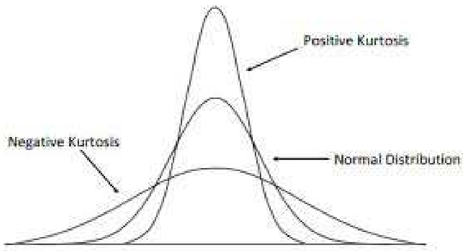


Curtosi o Kurtosis

La Kurtosis indica di quanto la distribuzione si allontana dalla normale. Il parametro che la misura, detto coefficiente di curtosi, è definito dalla espressione:

$$\beta_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

Poiché per una gaussiana $m_4/\sigma^4 = 3$, le distribuzioni con $\beta_2 < 0$ sono più "piatte" della gaussiana, quelle con $\beta_2 > 0$ più "appuntite" della gaussiana.



Distribuzioni Multivariate

In generale un evento può dipendere da più variabili aleatorie. Le distribuzioni di probabilità congiunte di queste variabili sono dette *multivariate*. Ci limitiamo a due variabili (con due variabili si parla di distribuzioni *bivariate*).
Esempio. Lancio di due dadi che supponiamo riconoscibili, ad esempio dal colore rosso e blu e consideriamo due variabili: (n_1) numero del dado rosso e n_s somma delle uscite dei due dadi. Per ogni coppia delle possibili realizzazioni dell'evento (n_1, n_t) è possibile calcolare la probabilità che accada: $P(n_1, n_t)$.
La tabella riporta le $P(n_1, n_t)$ in funzione della coppia di valori di n_1 e n_t.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	(
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	(
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	(
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	(
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	(
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/
	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/

Distribuzioni Multivariate - Distribuzioni Marginali.

Da una distribuzione multivariata è possibile ottenere la distribuzione di ogni singola variabile sommando sulla probabilità di quelle restanti. Con questa operazione si ottengono le distribuzioni dette *marginali*. Così per l'esempio precedente si hanno le due distribuzioni marginali:

$$P(n_1) = \sum_{n_t} P(n_1, n_t) \qquad P(n_t) = \sum_{n_1} P(n_1, n_t)$$

Caso di variabili continue

In questo caso la pdf ha la forma $f(x, y)$ e la probabilità elementare è $dP = f(x, y)dxdy$. Le distribuzioni marginali assumono la forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(x, y); \qquad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x, y)$$

con la condizione di normalizzazione: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, f(x, y) = 1$

Covarianza e Coefficiente di correlazione

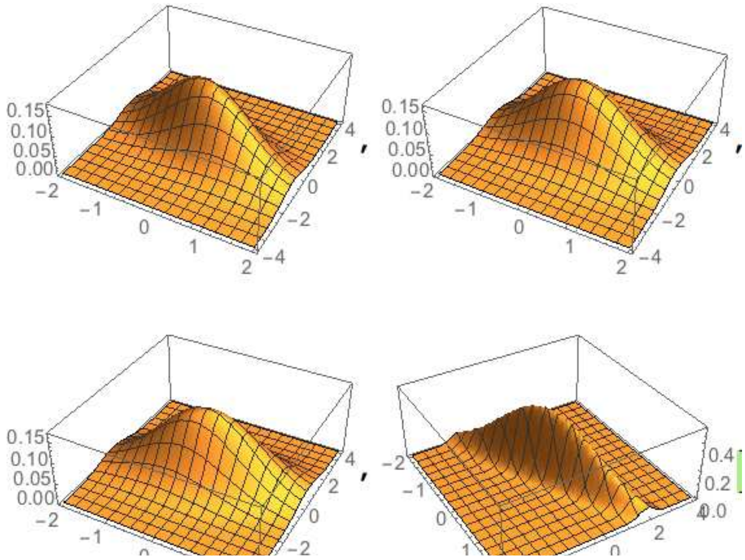
Osservando la tabella si nota che c'è una certa *correlazione* tra le due variabili, (a valori gradi di n_1 aumenta la probabilitàdi avere valori grandi di n_t e viceversa). Questa osservazione qualitativa viene resa quantitativa introducendo i parametri *covarianza* e *coefficiente di correlazione*.
Definiamo covarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}[x, y]$ di due variabili aleatorie x e y l'espressione:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[x, y] = \mathbb{E}[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$$

dove μ_x e μ_y indicano rispettivamente i valori attesi di x e di y.
Il coefficiente di correlazione è definito dalla relazione:

$$\rho(x, y) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}[x, y]}{\sigma_x \sigma_y} \qquad -1 \leq \rho \leq 1$$

Distribuzioni Gaussiane Bivariate



Coefficiente di Correlazione