Analisi dei Dati – Tabelle e Grafici

L'analisi dei dati di fisica (e non solo) è molto facilitata da una raccolta accurata e ordinata dei dati che si effettua tramite la compilazione di **tabelle e grafici** .

Come esempio consideriamo alcuni semplici esperimenti:

- Studiare lo spazio percorso (x) da un grave in funzione del tempo (t) per il stimare la sua accelerazione;
- Misurare il periodo (T) di pendolo semplice in funzione della sua lunghezza (l)
- Studiare l'andamento della pressione (p) di una certa quantità di gas in funzione del volume (V) che occupa;

In ognuno di questi casi è opportuno, mentre si esegue l'esperimento, compilare una tabella con i dati acquisiti correlati $(x_i, t_i), (T_i, l_i), (p_i, V_i)$

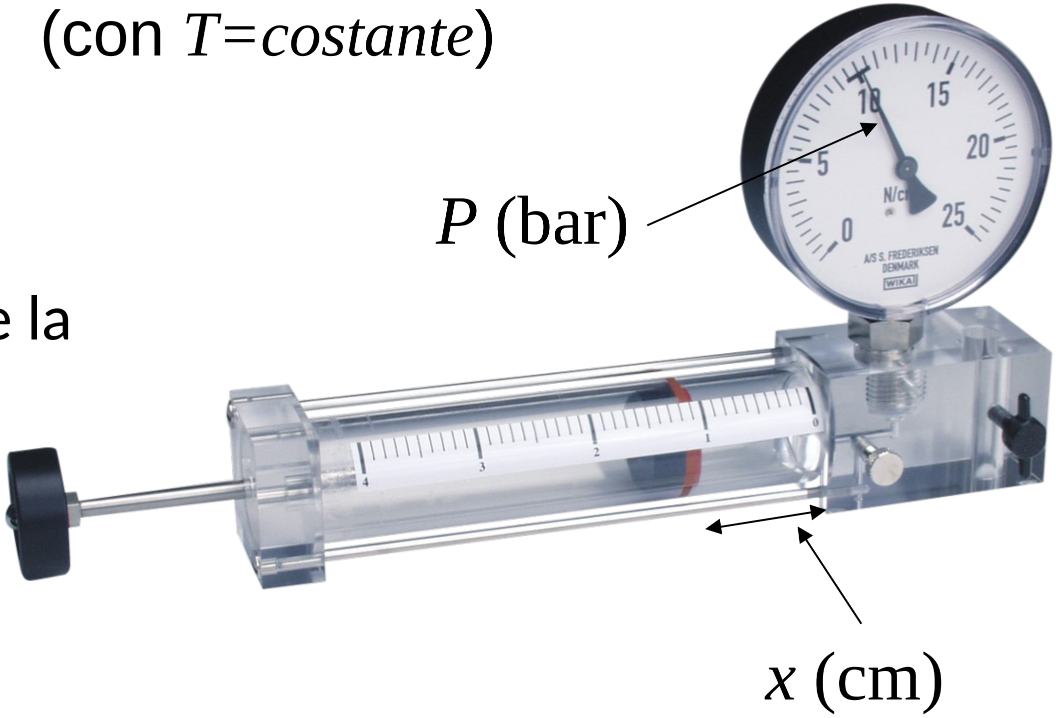
tabelle - esempio: verifica dellalegge di Boyle-Mariotte

Legge di Boyle-Mariotte:

(1) $PV = costante$ (con $T = costante$)

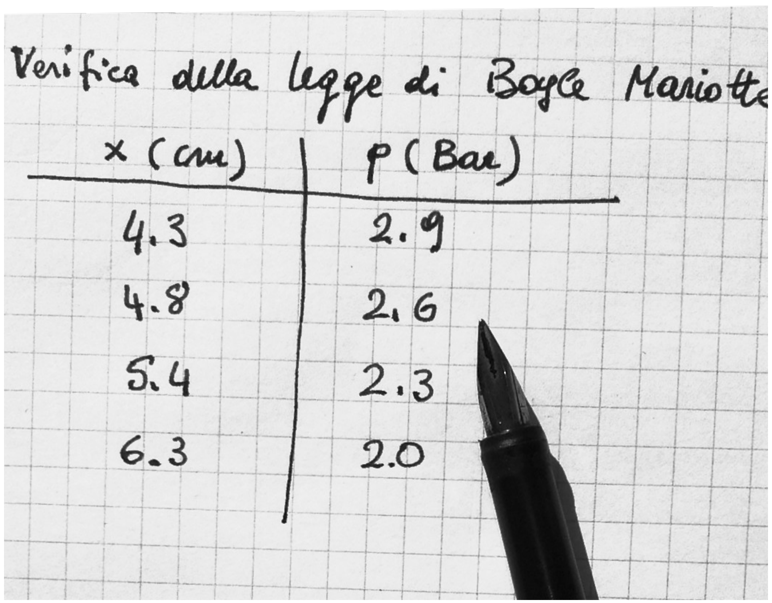
Per la verifica della (1) con l'apparato in figura si acquisiscono x e P. Notare che la coordinata dello stantuffo x è proporzionale al volume.

$$V = Sx$$



Compilazione di tabelle

a mano:



Con il calcolatore (Excel):

n.	x (cm)	p (bar)
1	4.3	2.9
2	4.8	2.6
3	5.4	2.3
4	6.3	2.0
5	7.5	1.7
6	9.0	1.4
7	9.8	1.3
8	11.6	1.1
9	12.5	1.0
10	14.3	0.9

Grafici

I grafici evidenziano visivamente la correlazione tra due grandezze fisiche i cui valori sono riportati sugli assi x e y

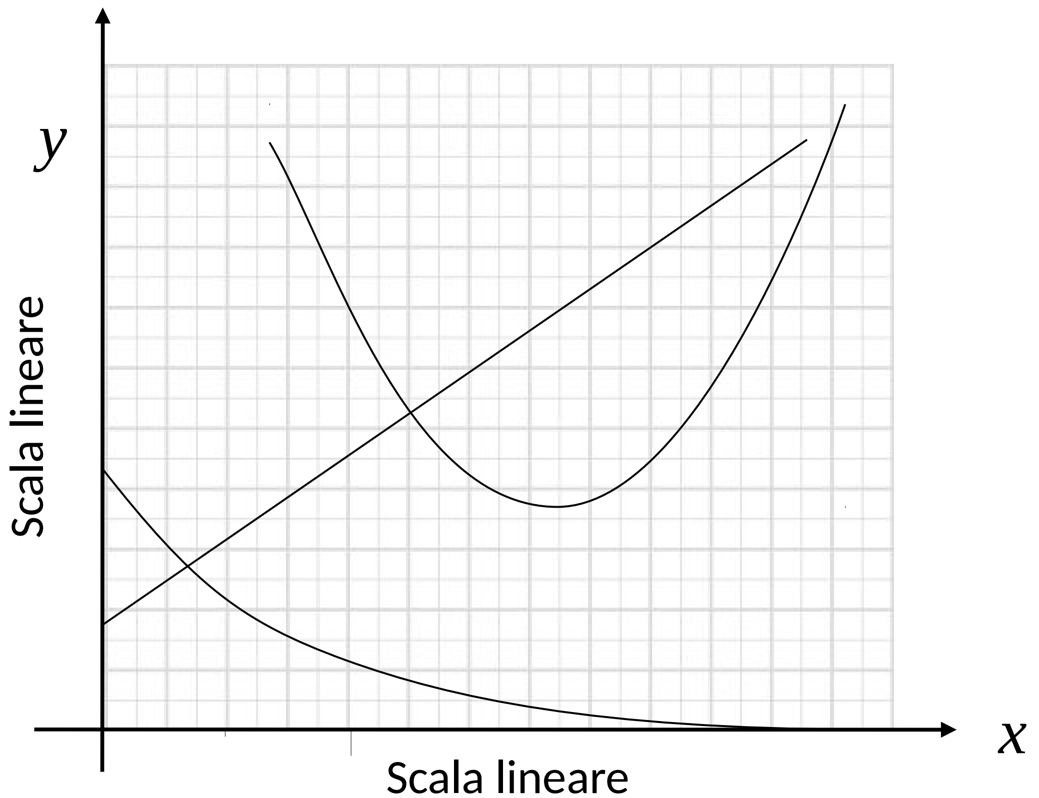
Particolare importanza degli andamenti rettilinei

Principali tipi di grafici

- **Lineari** *entrambe le scale (x e y) sono lineari*
- **Semi-logaritmico** *una scala (x o y) è logaritmica*
- **Doppio-logaritmico** *entrambe le scale (x e y) sono logaritmiche*
- **Altre scale**
- **Istogrammi**

Grafico Lineare (*y vs x)*

Le scale x e y sono lineari e il grafico di una funzione f(x) rappresenta in modo visivo l'andamento.



Esempi:

- Retta $y = mx + q$
- Parabola $y=ax^2+bx+c$
- *Esponenziale* $y=Ae^{lx}$

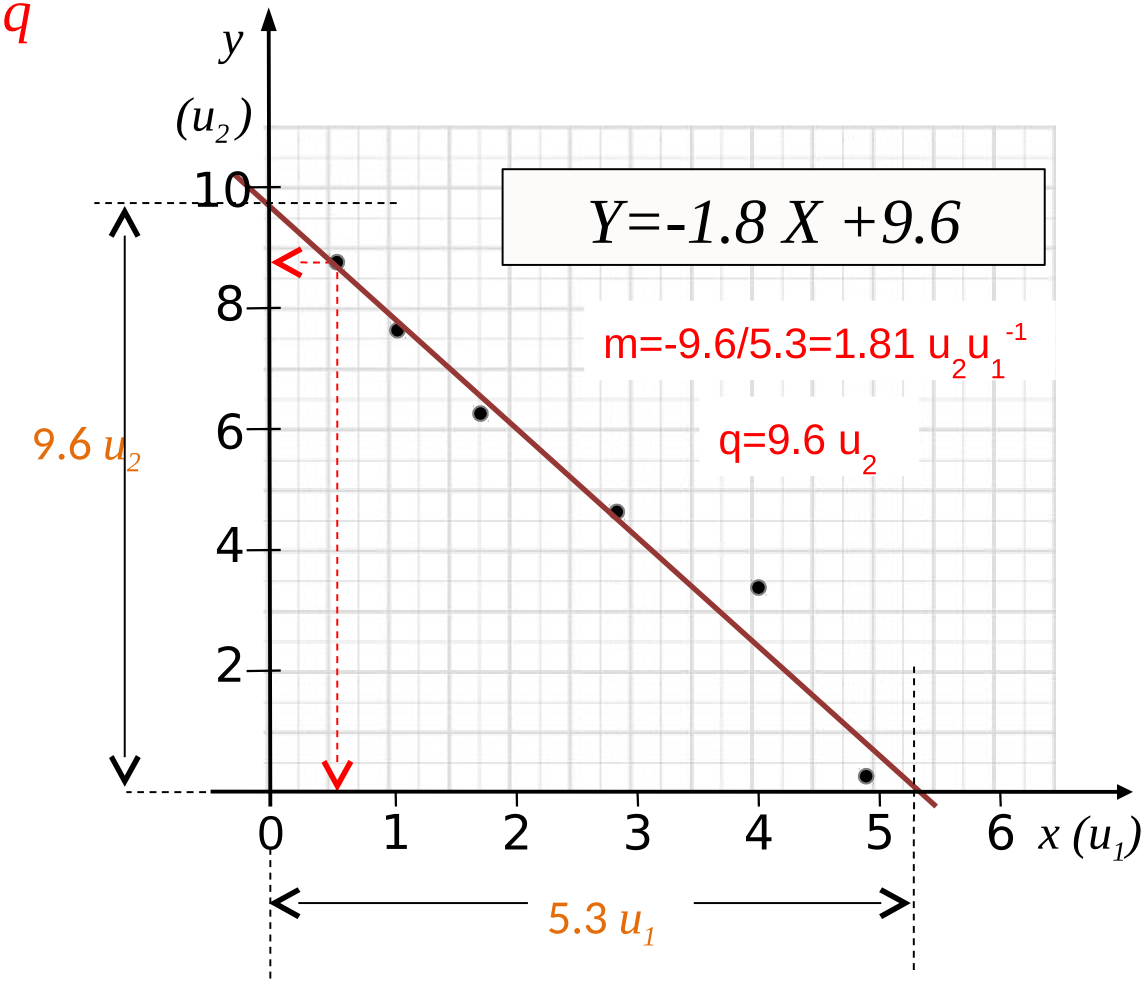
Particolare importanza rivestono le relazioni lineari che descrivono vari fenomeni fisici.

L'andamento lineare e' facilmente individuato dall'occhio umano e la linearizzazione delle relazioni non lineari e' un'importante modalità di analisi dei dati.

Grafico Lineare: secondo esempio con stima dei parametri

Sia noto che tra le grandezze *X* e *Y* esista una relazione lineare $Y=mX+q$. Eseguiamo un esperimento in si misurano alcune *realizzazioni* x_i *di* X *e* y_i *di* Y. Si vogliono stimare m e q

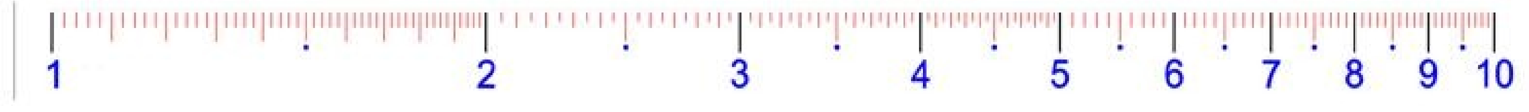
$x\ (u_1)$	$y\ (u_2)$
0.51	8.75
1.00	7.64
1.70	6.30
2.80	4.70
4.00	3.32
4.90	0.15



Grafici Semilogaritmici

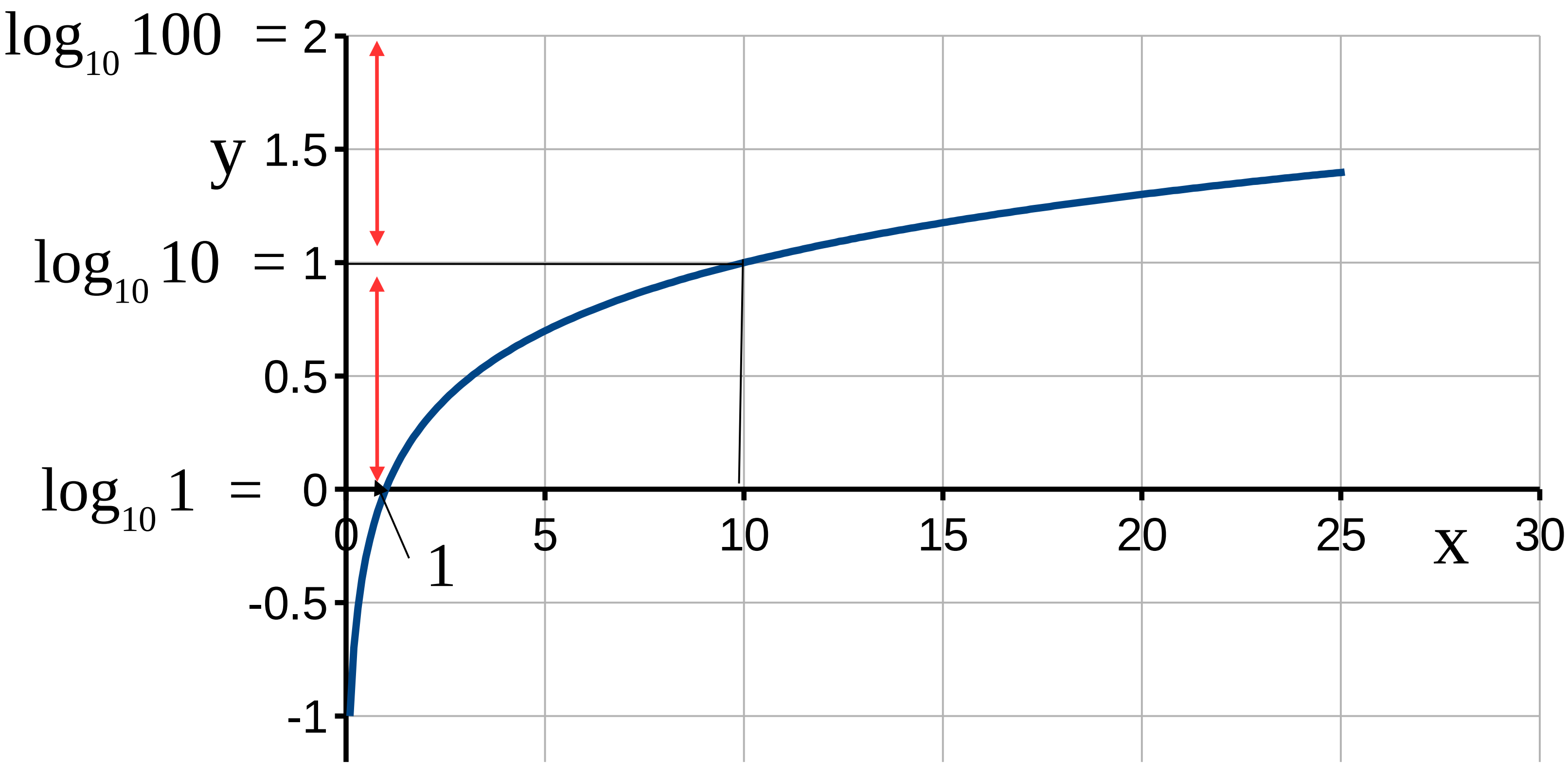
La carta semi-logaritmica o grafico semi-logaritmico o piu brevemente semi-log indica un grafico in cui un asse ha una *scala lineare* e l'altro una *scala logaritmica* (tipicamente in base 10).

SCALA LOGARITMICA



Scala Logaritmica

Grafico lineare della funzione logaritmica $y = \log_{10} x$



Il logaritmo "comprime" la scala lineare. Tutte le decadi: da 10^0-10^1, 10^1-10^2,. . hanno la stessa lunghezza.

Uso dei grafici semi-log

I grafici semi-log sono usati per:

- Comprimere la scala della grandezza da graficare in modo osservare gli andamenti per diversi ordini di grandezza in uno stesso grafico

- Linearizzare andamenti esponenziali

Linearizzazione di un esponenziale (log y vs x)

Consideriamo un grafico (o carta millimetrata) semi-log ove l'asse delle ordinate abbia una scala logaritmica e quello delle ascisse una scala lineare. In questo tipo di grafico la funzione esponenziale appare come una retta.

Infatti consideriamo la funzione esponenziale: $y(x) = A\mathrm{e}^{x/x_o}$

Prendendo i logaritmi in base 10:

$$\log_{10} y = \frac{x}{x_o} \log_{10} \mathrm{e} + \log_{10} A$$

Le variabili $\log y$ e x sono legate da una relazione lineare che nel grafico appare quindi come una retta di coefficiente angolare ($\log \mathrm{e}/x_o$) e intercetta ($\log A$).

Grafico semilogaritmoco

Grafico in
“carta lineare”

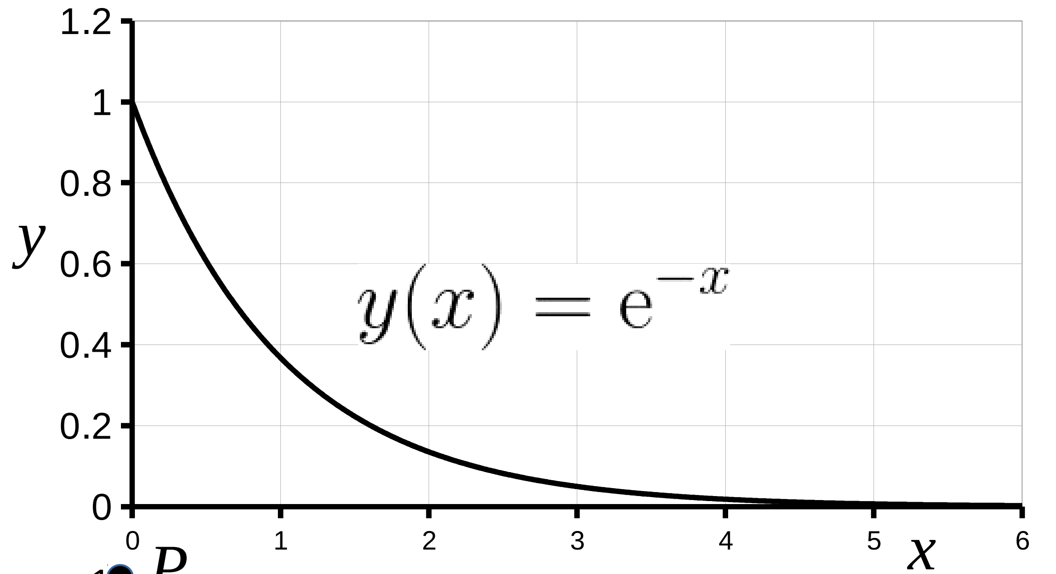


Grafico in
“carta semilog”

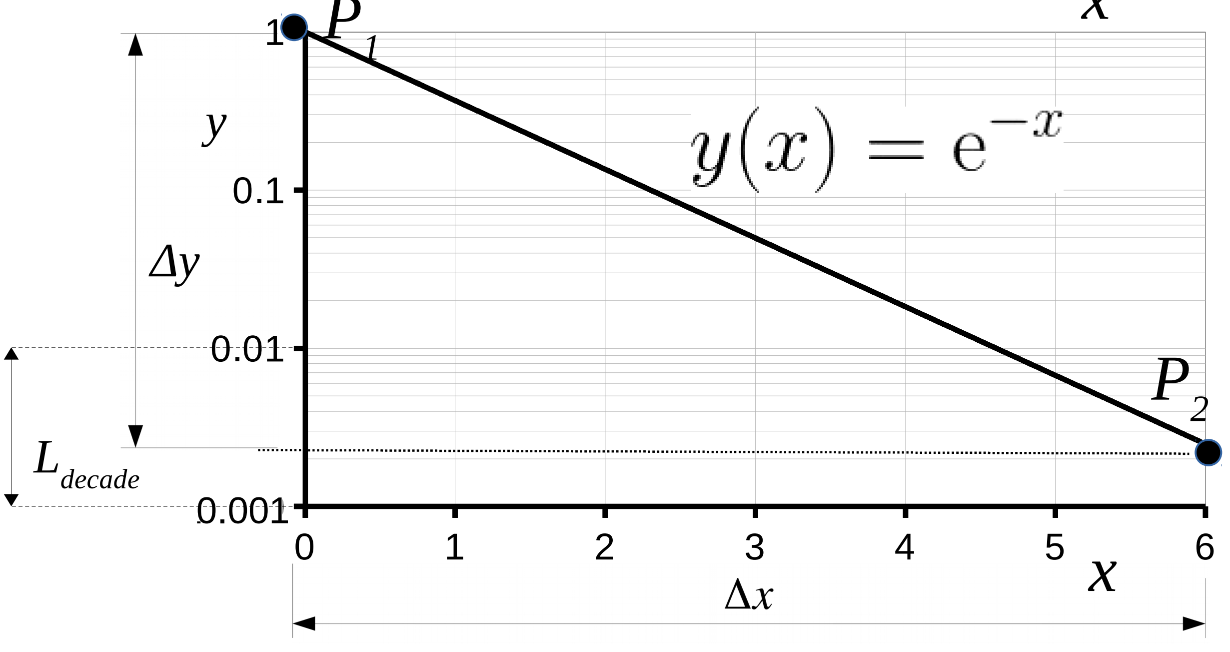
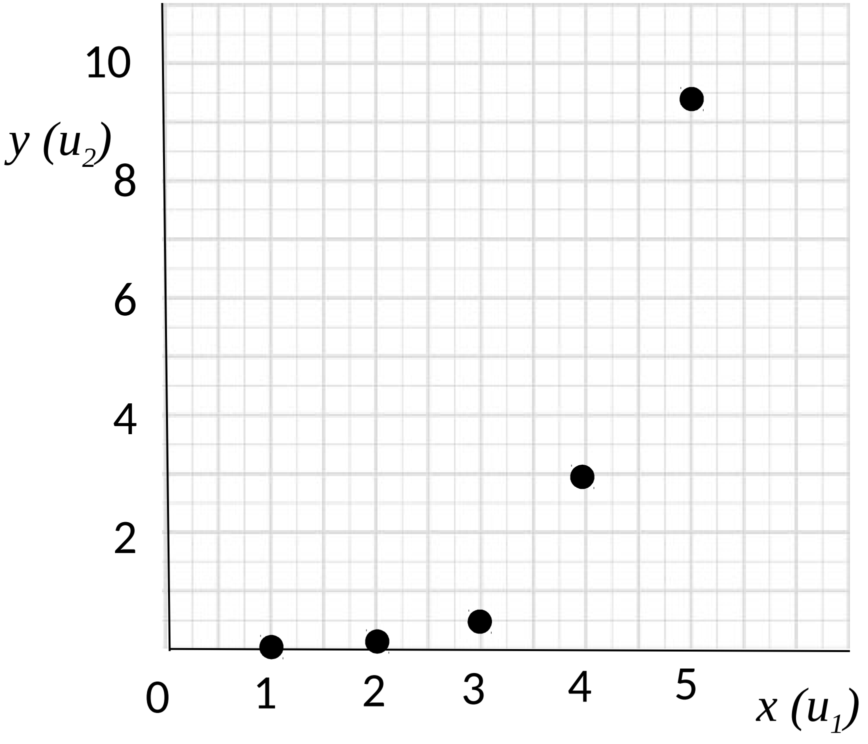


Grafico Semilogaritmico

Supponiamo di avere raccolto i dati in tabella, sui quali si aspetta un andamento esponenziale del tipo: $y = A\mathrm{e}^{x/x_o}$

x (u_1)	y (u_2)
1	0.03
2	0.10
3	0.50
4	3.00
5	9.50



Il grafico di questi dati in carta lineare è di difficile interpretazione ed è arduo ottenere stime quantitative dei parametri

Grafico Semilogaritmico (log *y* vs *x*)

Con l'uso di un grafico semi-log i punti approssimativamente si allineano e possiamo tracciare una retta, calcolandone inoltre parametri.

1) Traccia la retta
2) Scegli 2 Punti nella retta:

(x_1=0.21u$_1$, y_1=0.01u$_2$)
(x_2=4.95u$_1$, y_2=10.0u$_2$)

$$\begin{cases} \ln y_1 = & \dfrac{x_1}{x_o} + \ln A \\ \ln y_2 = & \dfrac{x_2}{x_o} + \ln A \end{cases}$$

$$\ln y_2 - \ln y_1 = \ln \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_o}$$

$$\ln \frac{10.0}{0.01} = \ln 10^3 = \frac{4.95 - 0.21}{x_o}$$

$$x_o = \frac{4.74}{3 \times 2.3} = 0.69\, u_1$$

$$A = y_2 \mathrm{e}^{-x_2/x_o} = 0.0077\, u_2$$

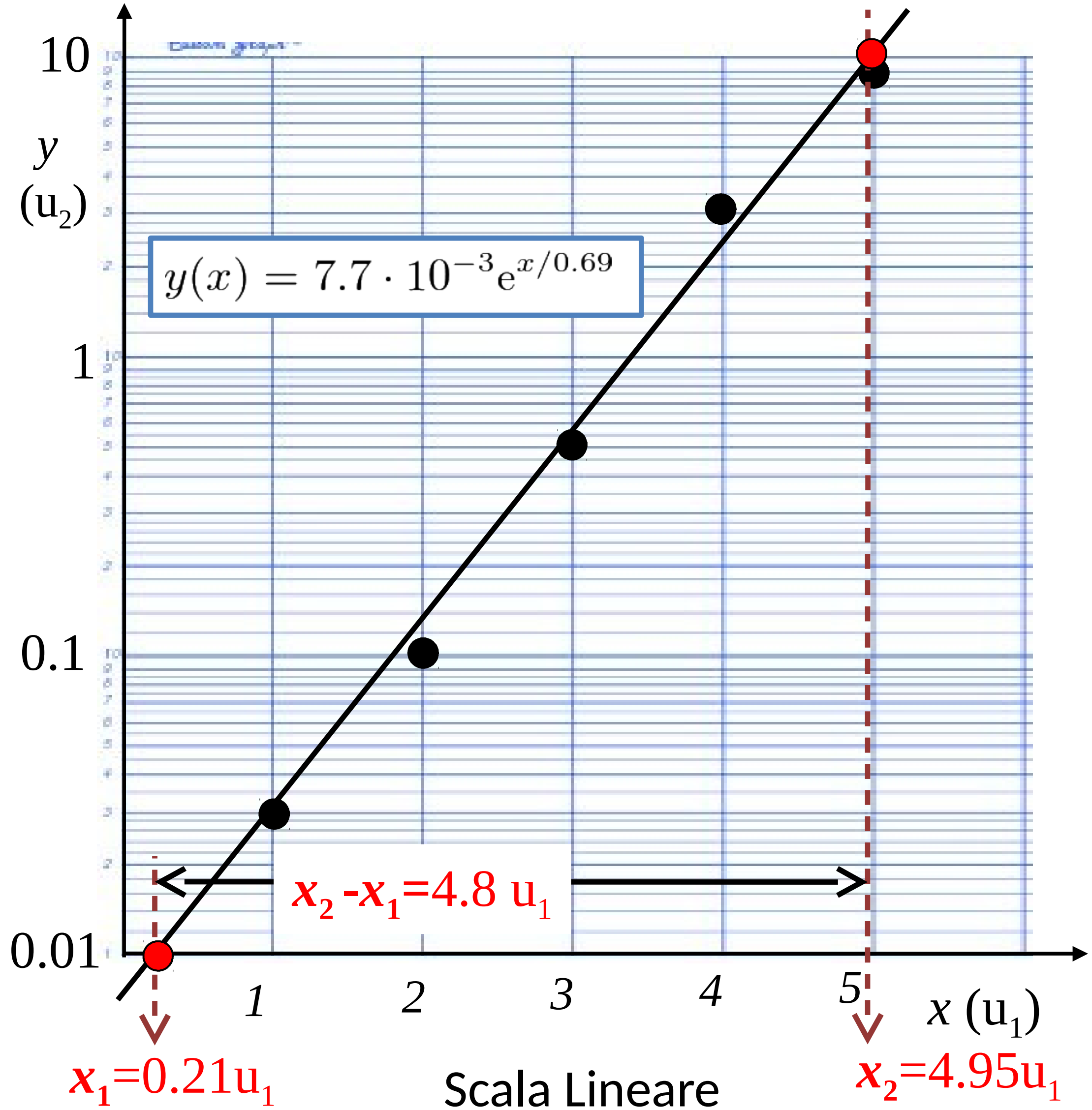


Grafico Semilogaritmico. Esempio (log y *vs* *x*)

Altro modo (grafico) per calcolare i parametri dell'esponenziale

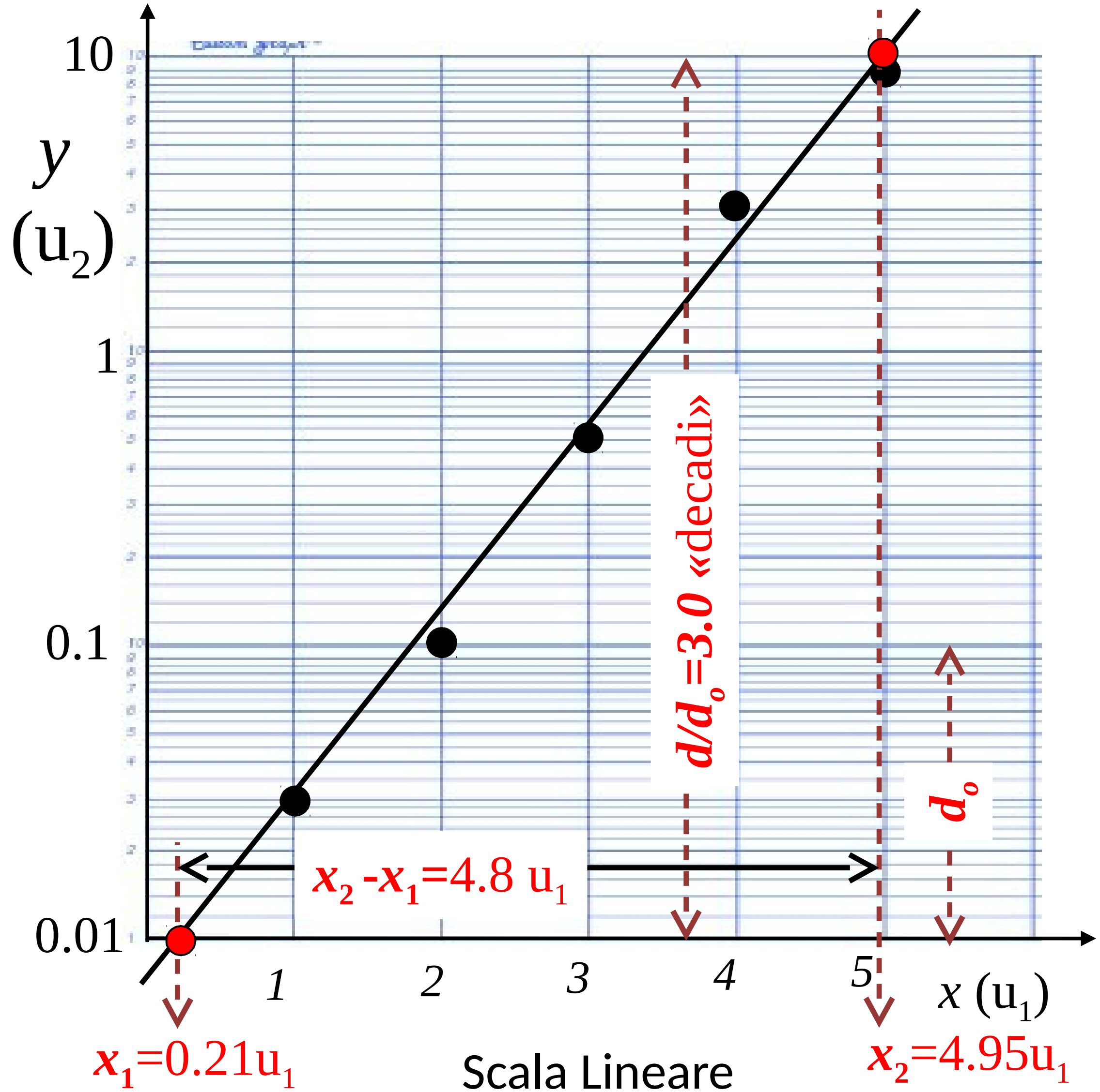
2 Punti scelti nella retta:
Per la scala lineare come nel caso precedente.
($\Delta x = 4.74 u_1$)

Per la scala log si misura il Δy in "decadi":

$$\Delta y = \frac{d}{d_o / \ln 10} = 6.91\, u_2$$

Infine:

$$\frac{1}{x_o} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6.91}{4.74}\, u_1^{-1} = \frac{1}{0.69}\, u_1^{-1}$$



Compressione di scala

Come esempio di compressione della scala si mostra lo spettro dei Raggi Cosmici in cui entrambi gli assi sono logaritmici

Nell'asse delle ascisse sono riportati 13 ordini di grandezza

Nell'asse delle ordinate sono riportati 32 ordini di grandezza

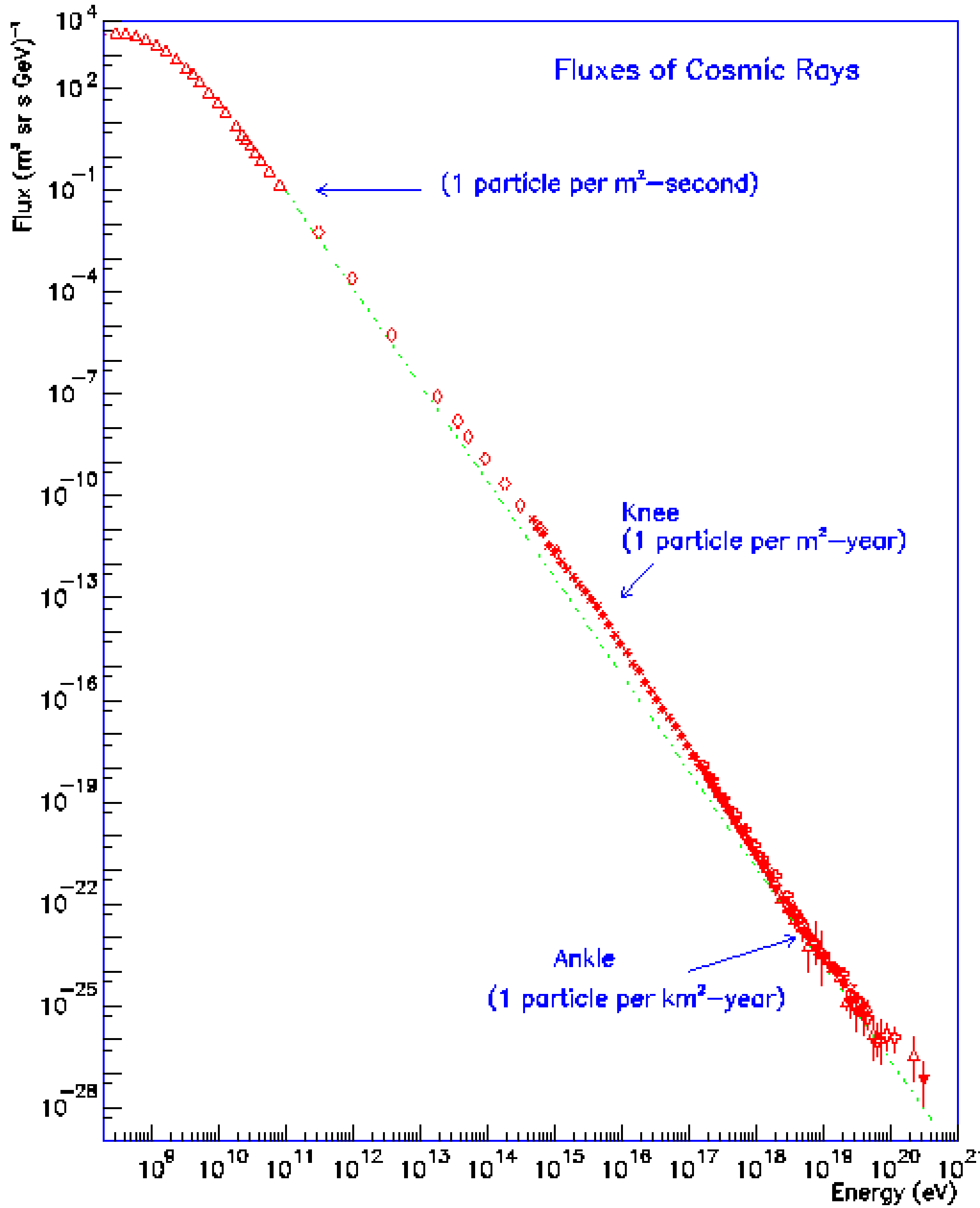
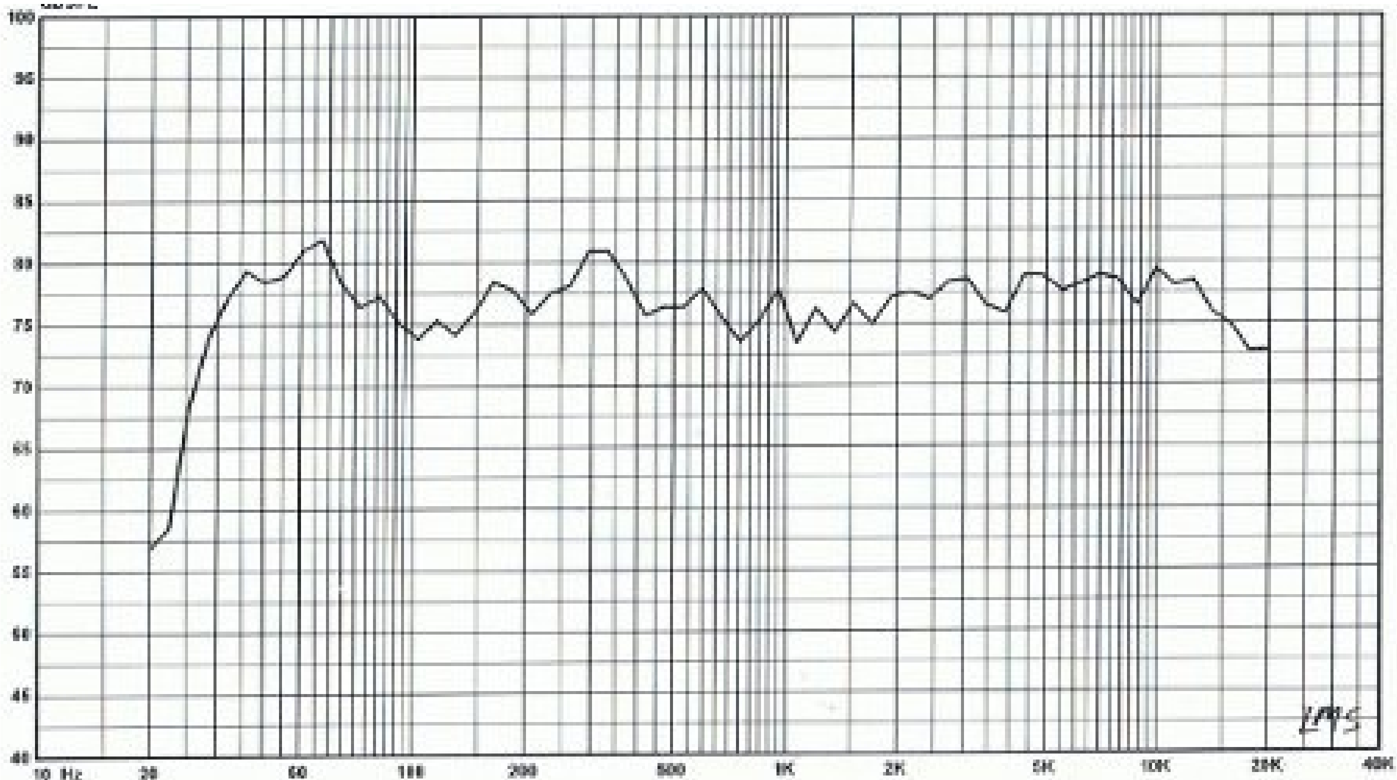


Grafico semi-log (y vs $\log x$)

Usato per la compressione della scala delle ascisse

Esempio – Risposta in frequenza di un altoparlante (SPL)



10 100 1000 (Hz) 10000

3.6 decadi

Grafico Doppio-logaritmico (log y *vs* log x)

La carta o grafico doppio-logaritmico è un grafico in cui entrambi gli assi hanno una *scala logaritmica*.

In un grafico doppio-log, la funzione di elevamento a potenza appare come una retta. Infatti:

$$y(x) = Ax^{\alpha}$$

$$\log y(x) = \log Ax^{\alpha} = \alpha \log x + \log A$$

log y e log x sono legati da una relazione lineare.

Il coefficiente angolare della retta nel grafico doppio-log è <u>l'esponente della *x*</u>

Esempio di grafico doppio-log

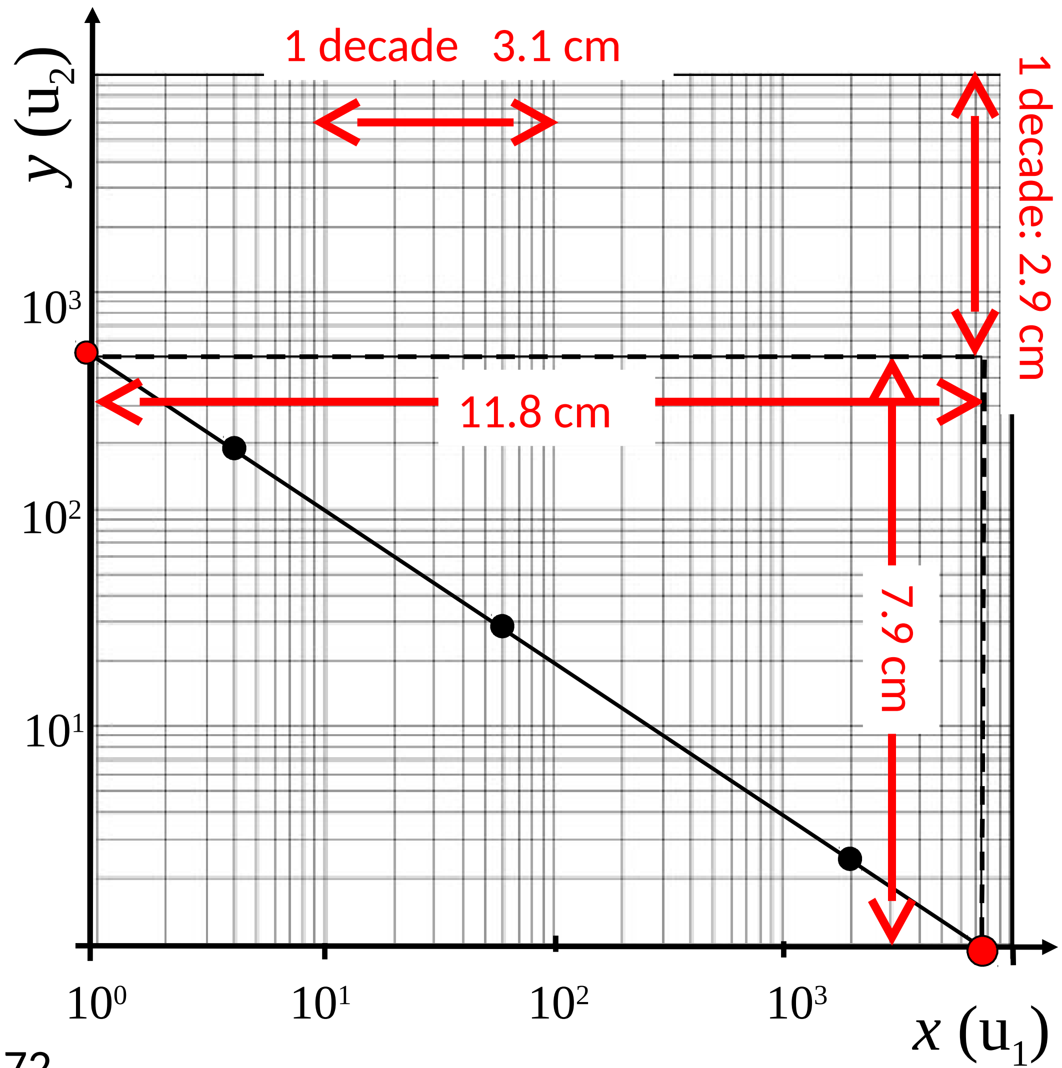
Siano dati i punti sperimentali (x,y):

(4,200), (60,29), (2000,2.5)

nelle loro unità di misura.

Si ipotizza una legge di potenza tra x e y. Trovare l'esponente.

1) Si usa una carta doppio-log
2) Si scelgono opportunamente le scale
3) Si tracciano i punti
4) Si traccia la retta «migliore»
5) Si calcola il coefficiente angolare:



$$\frac{\Delta y \text{ (misurato in decadi)} = -7.9/2.9}{\Delta x \text{ (misurato in decadi)} = 11.8/3.1} = -\,0.72$$

Terza legge di Keplero

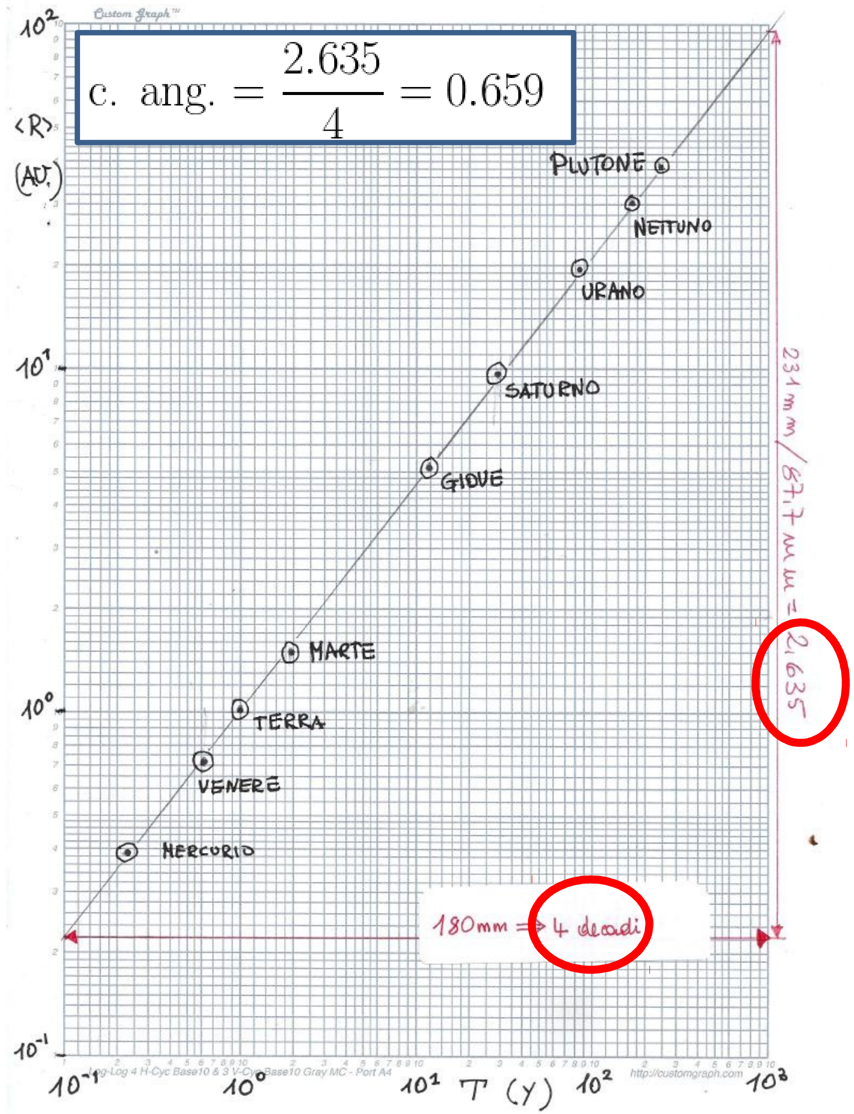
$$T^2 = KR^3$$

$$R = K^{-1/3} \cdot T^{2/3} = K'T^{0.66}$$

Sistema Solare
Dati sperimentali

Pianeta	Periodo T (y)	R (AU)
Mercurio	0.2411	0.387
Venere	0.6156	0.723
Terra	1.001	1.00
Marte	1.882	1.52
Giove	11.87	5.21
Saturno	29.44	9.58
Urano	83.81	19.20
Nettuno	163.8	30.05
Plutone	248.1	39.48

Grafico doppio-log



Esercizio

Verificare graficamente, usando una carta millimetrata doppio-log, la terza legge di Keplero per i satelliti galileiani di Giove. I parametri rilevanti per la verifica sono dati dalla seguente tabella:

Satellite	a (10^3 km)	T (giorni)
Io	421.6	1.76
Europa	670.9	3.55
Ganimede	1070.4	7.16
Callisto	1882.7	16.69

Linearizzazione delle relazioni

Un altro modo per ottenere un grafico con andamento lineare è quello di riportare su un asse lineare la funzione della grandezza che linearizza il modello matematico

Esempio: La funzione che descrive lo spazio in funzione del tempo in moto uniformemente accelerato è: $s = \frac{1}{2} g t^2$

Ponendo in un grafico in ascissa il quadrato del tempo (t^2) la relazione è linearizzata.

Analogamente volendo linearizzare la relazione: $F = mg \sin\theta$

fra F e θ si porrà in ascissa $\sin(\theta)$.

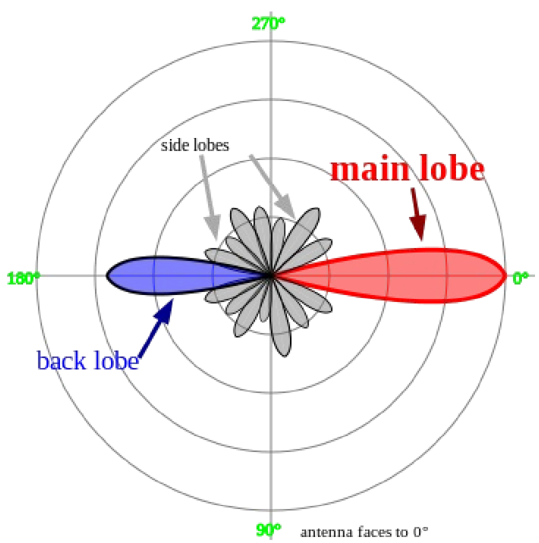
• Diagramma Polare

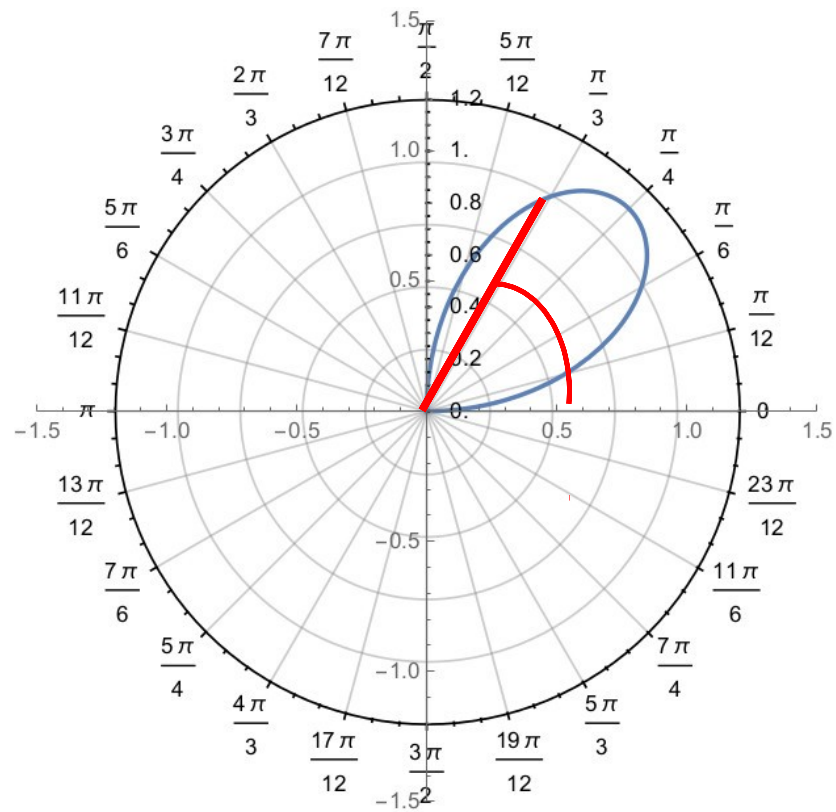
Il diagramma polare rappresenta le funzioni in forma polare. Ovvero ogni punto è individuato da raggio vettore e angolo con l’asse x

Esempio:

Gittata di un proiettile

$$R(\theta) = 2v_o^2 \sin 2\theta / g$$





ISTOGRAMMI

L'istogramma è una rappresentazione della distribuzione dei dati divisi in classi (bin). I bin sono (usualmente) della stessa dimensione. Nelle ordinate si riportano le occorrenze dei valori oppure la loro frequenza.