Capitolo 1

Grandezze Fisiche

1.1 Il metodo scientifico

L'espressione "metodo scientifico" indica la modalità con cui la scienza procede per acquisire la conoscenza della realtà del mondo fisico. Tale metodo cerca di arrivare ad una conoscenza che sia quanto più possibile oggettiva, cioè basata su esperienze prive di interpretazioni soggettive e verificabile, cioè che possa essere controllata tramite prove sperimentali o calcoli. Le basi del metodo scientifico sono state gettate nel 16° secolo da Galileo Galilei e da Francesco Bacone. Esso consiste, da una parte, nella raccolta di dati empirici sotto la guida delle ipotesi e teorie da vagliare; dall'altra in una rigorosa analisi di questi dati, quest'ultima basata sul calcolo delle probabilità e sui metodi statistici. Il metodo scientifico non è un processo semplice e lineare, ma procede seguendo il modo complesso e alla volte involuto con cui procede la ricerca scientifica nella realtà. Tuttavia si possono definire, anche nella complessità di questo processo, quattro fasi fondamentali che caratterizzano il metodo scientifico:

1. <u>Osservazione e descrizione di un fenomeno</u>. Le osservazioni e descrizioni si possono riferire a fenomeni ripetibili generati in un laboratorio, come l'esperimento di Rutherford che ha messo in evidenza la struttura degli atomi[1], oppure si possono riferire a fenomeni naturali impossibili da riprodurre in laboratorio, come l'esplosione di una stella o le variazioni climatiche del pianeta Terra. Nella fase osservativa si individuano le grandezze rilevanti per la descrizione del fenomeno e si definiscono le procedure per la loro misurazione.

2. <u>Formulazione di una ipotesi</u>. Si propone un'ipotesi che possa spiegare il fenomeno in esame tramite una legge matematica che leghi le grandezze osservate, che sia in grado giustificare fenomeni analoghi a quello studiato e che sia in grado di prevedere nuovi fenomeni.

3. <u>Confronto tra dati e modello.</u> Se i dati sperimentali non soddisfano alle previsioni del modello, il modello deve essere rigettato o modificato e si torna al punto 2.

4. <u>Formulazione di una teoria basata sulla verifica ripetuta dei risultati ottenuti.</u> Se il fenomeno osservato è descritto correttamente dalle ipotesi formulate si può affrontare il passo successivo che consiste nel collocare il fenomeno in una preesistente "*teoria*" oppure nel formularne una nuova. Con il termine "*teoria*" nelle scienze si intende una

[1] Vedi il sito: https://it.wikipedia.org/wiki/Esperimento_di_Rutherford.

spiegazione unitaria di una ampia classe di fenomeni supportata da prove scientifiche e verificata più volte da diversi esperimenti. La legge di gravitazione universale di Newton e le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo sono esempi di teorie fisiche.

Questa breve e schematica descrizione del metodo scientifico[2] ha lo scopo di far conoscere allo studente che affronta i rudimenti dell'attività sperimentale il necessario rigore metodologico con cui si deve affrontare tale attività.

1.2 Grandezze fisiche – Definizione operativa

Una grandezza fisica è una proprietà che caratterizza un aspetto di un fenomeno, di un corpo o di una sostanza che può essere espressa quantitativamente (valore della grandezza fisica) nella forma di un numero e un'unità di misura. Esempi: la massa di un oggetto: $m = 70\,$kg, un intervallo temporale di dieci secondi $\Delta t = 10\,$s, il valore della temperatura di un corpo misurato in un suo punto: $T = 36.6\,°$C, la distanza tra la terra e la della luna al perigeo: $l = 363\,104\,$km, la massa a riposo del leptone μ (una particella subnucleare): $m_\mu = 105.65837154\,MeV/c^2$ (le unità eV/c^2 sono quelle normalmente usate nell'ambito della fisica subnucleare. Espressa in chilogrammi questa massa è $1.883531594 \times 10^{-28}$ kg).

Definizione operativa di una grandezza. E' importante notare che in fisica, come in tutte le scienze sperimentali, la definizione delle grandezze deve essere una *definizione operativa*[3] ovvero dalla definizione si deve poter ottenere una successione di operazioni che permettano di eseguire una *misurazione affidabile e ripetibile* della grandezza che è stata definita.

La definizione operativa di una grandezza dà l'occasione di evidenziare la differenza concettuale che può esistere tra la definizione matematica e quella fisica di una grandezza. Consideriamo la definizione di angolo piano, grandezza comunemente usata sia in matematica sia in fisica. La definizione matematica di angolo è (vedi ad esempio Wikipedia):

> *Si definisce angolo la porzione di piano compresa tra due semirette aventi la stessa origine.*

Questa definizione, per quanto rigorosa e non ambigua, è insoddisfacente dal punto di vista fisico, infatti da essa non si può ricavare alcuna indicazione su come procedere per la misurazione degli angoli! In fisica si preferisce definire l'angolo piano nel seguente modo:

> *si definisce angolo il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza compresa tra le due semirette con il il suo raggio di un cerchio il cui centro è nel vertice dell'angolo (vedi la figura 1.1).*

Come è evidente questa ultima definizione delinea una procedura di misurazione dell'angolo. Basta avere un metro flessibile. E' quindi una definizione operativa di una grandezza.

[2] Per approfondire l'argomento sul metodo scientifico si veda ad esempio il testo [7] Cap 1 e il sito di Wikipedia `https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_scientifico`.

[3] Percy W. Bridgman, premio Nobel per la fisica nel 1946, che ha coniato il termine "definizione operativa" di una grandezza, è il fondatore della teoria filosofica nota come *operazionismo* esposta nel testo "La Logica della Fisica Moderna" [2].

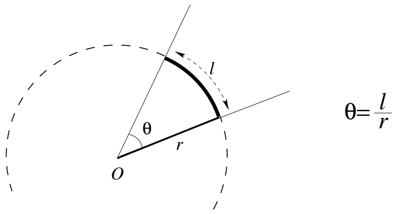


Figura 1.1: Definizione operativa di angolo piano

1.3 Grandezze Fisiche intensive ed estensive

Le grandezze fisiche possono essere classificate come estensive (o additive) oppure intensive (o non additive). Questo tipo di classificazione è legato alla modalità con cui le grandezze si compongono quando sono riferite a sistemi composti da più parti o quando un sistema è diviso in più sottosistemi. In particolare diremo che:

- Il valore di una grandezza estensiva (o additiva) è uguale alla somma dei valori di tale grandezza per tutti i sottosistemi costitutivi. Esempio: Dati due sistemi fisici di masse m_1 e m_2, il sistema formato aggregando i due sistemi avrà una massa pari a $m_1 + m_2$, ovvero la massa è una grandezza estensiva. Altri esempi di grandezze estensive sono: il volume, la lunghezza, l'energia, l'entropia e la carica elettrica.

- Una grandezza intensiva (o non additiva) si riferisce ad una proprietà indipendente dalla estensione del sistema. Esempio: mescolando due liquidi di diversa densità, otteniamo una miscela la cui densità avrà un valore intermedio tra quelle dei liquidi separati e non dalla loro somma. Altri esempi di grandezze intensive sono: la temperatura, la pressione, il calore specifico e la costante dielettrica

1.4 Misurazioni di grandezze fisiche

Con *misurazione* si intende un procedimento con cui sia possibile assegnare sperimentalmente un valore numerico, la *misura*, ad una grandezza fisica che prende il nome di *misurando*. In generale la misurazione è soggetta ad imperfezioni e interferenze che danno origine ad un errore nel risultato della misura. Ne consegue che non si potrà ottenere il "valore vero" della grandezza ma soltanto un intervallo di valori che presubilmente lo contengono. Il concetto valore vero, di errore e la conseguente *incertezza* con cui conosciamo il valore della grandezza misurata saranno estensivamente trattati nel seguito. Le procedure per eseguire una misurazione variano a seconda che la grandezza fisica sia estensiva o intensiva. Infatti solo le grandezze estensive possono essere misurate in modo *diretto*, ovvero confrontando direttamente la grandezza fisica con un *campione* di riferimento mentre le grandezze intensive possono essere misurate solo in modo *indiretto*. La misurazione indiretta è utilizzata anche per le grandezze estensive quando risulti impossibile applicare quella diretta.

1.4.1 Misurazioni Dirette

Una grandezza estensiva G (ad esempio una lunghezza di un oggetto) può essere misurata direttamente tramite il confronto diretto con un'altra grandezza dello stesso tipo, U, che assumiamo come unità per le misurazioni di quella grandezza. La Misura $X(G)$ sarà allora:

$$X(G) = \frac{G}{\mathsf{U}} \quad \text{e quindi} \quad G = X\mathsf{U}$$

Nella figura 1.2 è mostrata la misurazione della grandezza fisica "lunghezza", proprietà dell'oggetto (la matita), tramite il confronto diretto con una grandezza della stessa specie, il regolo graduato, considerata come unità di misura.

Si sottolinea che *la misurazione diretta è un'operazione possibile solo per variabili estensive.*

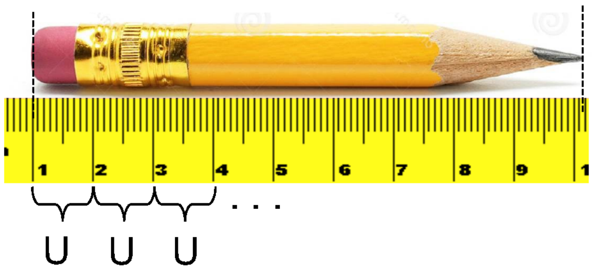


Figura 1.2: Misurazione diretta dalla lunghezza di un oggetto

Esempi di misurazioni dirette.

- *Lunghezza di un oggetto.* Quando è possibile confrontare un oggetto con il campione di lunghezza, come mostrato in figura 1.2, stabilendo così il valore della lunghezza in termini dell'unità di misura adottata, si sta eseguendo un misurazione diretta.

- *Massa di un oggetto.* La misurazione della massa di un oggetto con una bilancia a due piatti (vedi figura 1.3) che confronta la massa dell'oggetto con masse campioni è una misurazione diretta.

Figura 1.3: Bilancia di precisione a due piatti

1.4.2 Misurazioni Indirette

La misurazione indiretta di una grandezza fisica si ottiene tramite una *relazione matematica* tra la grandezza da misurare e altre che sono state misurate in modo diretto oppure le cui misure sono state già ottenute in modo indiretto. Ovviamente la presenza di errori nelle grandezze misurate direttamente si *propaga*, come vedremo nei prossimi capitoli, anche nella misura indiretta.

Esempi di misurazioni indirette.

Velocità. La velocità media $\overline{v}$ si misura dalla relazione matematica che lega le grandezze dello spazio percorso Δx nell'intervallo temporale Δt (entrambe possono essere misurate direttamente).

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Distanza di una stella "vicina". La misurazione delle lunghezze si può effettuare in modo diretto solo quando non è né troppo piccola né troppo grande per poter essere confrontata direttamente con il campione di lunghezza. Negli altri casi si deve ricorrere a metodi indiretti di misurazione come accade per la misurazione della distanze di stelle vicine con il metodo della parallasse. Il metodo consiste nella misurazione dello spostamento angolare di una stella rispetto a quelle "lontane" dopo un intervallo temporale di sei mesi, come schematizzato nella figura 1.4. Se p è l'angolo di parallasse e R indica il raggio dell'orbita terrestre, allora la distanza d della stella è data da:

$$d = \frac{R}{\tan p}$$

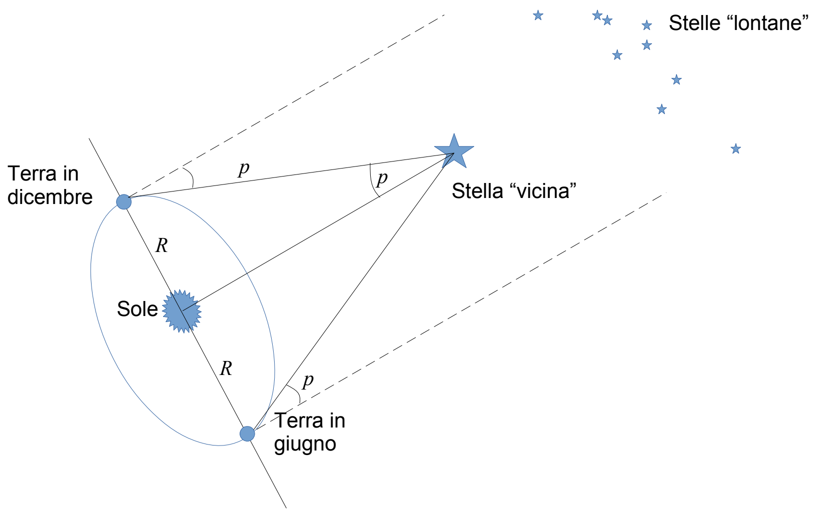


Figura 1.4: Misurazione indiretta dalla distanza di una stella "vicina" con il metodo della parallasse. Le linee tratteggiate rappresentano l'angolo di vista delle stelle *lontane*, che possono essere ritenute fisse e la cui posizione non dipende dalla posizione della terra nella sua orbita

Misura della temperatura. La temperatura è una grandezza intensiva e può essere misurata solo in modo indiretto. Uno dei modi usati per la misura di questa grandezza fisica è quello di sfruttare il noto fenomeno della dilatazione termica dei corpi. Una sostanza, ad esempio il mercurio, aumenta le sue dimensioni lineari con la temperatura, secondo la legge:

$$L(T) = L(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)]$$

dove $L(T)$ è la lunghezza della sostanza alla temperatura T e α è il coefficiente di dilatazione termica caratteristico della sostanza. Sfruttando questa relazione da una misura di lunghezza si risale a quella della temperatura. Per effettuare la misurazione della temperatura è tuttavia necessario tarare la scala scegliendo almeno due valori di temperatura da assegnare a opportuni stati fisici[4] come ad esempio una miscela di acqua e ghiaccio e dell'acqua in ebollizione il tutto alla pressione atmosferica.

1.5 Grandezze Fisiche di Base e Derivate

La descrizione dei fenomeni fisici noti richiede l'uso di molte grandezze, estensive e intensive, collegate da relazioni matematiche.

In linea di principio si potrebbe assegnare un'unità di misura per ogni grandezza estensiva. Questa scelta avrebbe come conseguenza l'uso di numerosi coefficienti di proporzionalità che complicherebbero le formule. Ad esempio se per la misura delle lunghezze usassimo i metri (m) e per la misura del volume i galloni[5] (gal), il volume V in gallonidi un cubo di lato x sarebbe dato da $V = 264.1 \times x^3$, con la misura del lato x è espressa in metri e con la necessità di inserire il numero 264.1, fattore di conversione tra m^3 e gal. Questo esempio mostra come l'uso di unità unità non *coerenti* (come metri e galloni) richiede l'uso di fattori di conversione che complicano le formule e quindi non sono convenienti.

Per semplificare le relazioni, ovvero ridurre il numero dei fattori di proporzionalità, è conveniente scegliere (arbitrariamente) le *unità di misura di un limitato numero di grandezze dette di base*; le unità delle altre grandezze che sono dette derivate deriveranno dalle relazioni matematiche che le definiscono.

Si può dimostrare che bastano solo 4 grandezze di base per definire le unità di misura di tutte le grandezze fisiche note, tre per le grandezze meccaniche e una per le grandezze elettromagnetiche). Tuttavia nel Sistema Internazionale, che è il sistema adottato da molte nazioni ed è universalmente usato per scopi scientifici[6] sono state scelte per ragioni di convenienza e di praticità 7 grandezze di base.

Esempi di grandezze fisiche derivate:

1. La velocità (in una dimensione) è definita dalla relazione:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Scegliendo come grandezze di base lo spazio misurato in metri e il tempo misurato in secondi, il valore unitario della velocità è un metro al secondo (non ha un nome specifico).

2. La forza (in una dimensione) è definita dalla relazione

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Scegliendo come grandezze di base la lunghezza misurata in metri, il tempo misurato in secondi e la massa misurata in chilogrammi il valore unitario della forza è

$$\text{unità di Forza} = \frac{1\text{chilogrammo} \times 1\text{metro}}{1 \text{ secondo al quadrato}} \equiv \text{newton} = \text{N} \tag{1.1}$$

che prende il nome di Newton (N).

[4] Per la definizione dell'unità nel SI della temperatura vedi il paragrafo 1.6.1.

[5] Il gallone è l'unità di misura del volume tuttora in uso negli stati uniti d'America.

[6] Il Sistema Internazionale sarà illustrato nel prossimo paragafo.

1.6 Sistemi di unità di misura

Un insieme di unità di misura scelte per scopi scientifici, ma anche industriali e commerciali, costituisce un *sistema di unità di misura*. La costruzione di un sistema di unità di misura si esegue attraveso i seguenti passi:

1. Scegliere una particolare partizione tra grandezze di base e grandezze derivate (Lunghezza, Tempo, Massa, velocità, accelerazione, Energia, Potenza, momento angolare,...)

2. Definire le unità standard per le grandezze di base.

Affinché il sistema costruito sia utile ed efficace è opportuno che sia, per quanto possibile:

- *Completo*, ovvero tutte le grandezze fisiche possano essere dedotte da quelle di base
- *Coerente*, quando tutte le relazioni matematiche che definiscono le grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità differenti dall'unità (ad esempio, l'unità di forza, newton, definita nella (1.1) è coerente con le unità di massa, lunghezza e tempo).
- *Decimale*|, quando tutti i multipli e sottomultipli delle unità del sistema sono potenze di 10

1.6.1 Il Sistema internazionale (SI)

Il Sistema Internazionale di unità di misura, abbreviato in SI (dal francese *Systéme International d'Unités*), è il sistema ufficialmente adottato nel 1960 dalla Conférence Générale des Poids et Mesures, (CGPM)[7]. Il sistema SI è stato adottato per legge sia in Europa sia in molti altri paesi nel mondo[8] per tutte le esigenze della scienza e della tecnica[9].

Nel SI sono state scelte, in modo logico ma arbitrario, sette grandezze fisiche, dette di base, mediante le quali tutte le altre, che si dicono derivate, possono essere definite. Le sette grandezze di base sono elencate nella tabella 1.1

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali nel Sistema Internazionale.

Grandezza Fisica	simbolo	Grandezza Fisica	simbolo
Lunghezza	[L]	Temperatura	[Θ]
Tempo	[T]	Quantità di materia	[N]
Massa	[M]	Corrente Elettrica	[I]
		Intensità luminosa	[J]

Ogni grandezza fisica di base ha per definizione la propria "*dimensione fisica*" che la caratterizza. Il significato di *dimensione fisica* sarà analizzato nell'ultimo paragrafo di questo capitolo. (analisi dimensionale)

[7] La CGPM è l'organizzazione intergovernativa responsabile del SI, alla quale hanno aderito circa 50 paesi. Ha la responsabilità della diffusione del SI, anche modificandolo, se necessario, in modo che rifletta i più recenti progressi nel campo della scienza e della tecnologia.

[8] Nei paesi anglosassoni sono ancora molto utilizzate come unità di lunghezza il piede pari a $30.48\,cm$ e il pollice pari a $2.54\,cm$, per unità di massa la libbra $453\,g$

[9]Una estensiva illustrazione del Sistema Internazionale si trova nella brochure "*The International System of units (SI)*" pubblicata dal BIPM. La brochure può essere scaricata in formato pdf dal sito *www.bipm.org/en/pubblications/si-brochure/*.

1.6.2 Unità di Base del Sistema Internazionale

Definizioni delle unità delle grandezze fisiche di base sulle indicazioni della CGPM

- metro (m) è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a $1/299792458$ di un secondo
- chilogrammo (kg) è pari alla massa del prototipo realizzato secondo le prescrizioni del CGPM e conservato presso il museo di Sévre. Il kg è l'unica unità di misura del SI basata su un manufatto.
- secondo (s) è la durata di 9,192,631,770 periodi della radiazione emessa nella transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale del ^{133}Cs
- kelvin (K) è la frazione $1/273.16$ della temperatura termodinamica del punti triplo dell'acqua.
- mole (mol) è la quantità di sostanza che contiene tante entità elementari, atomi o molecole, quanti sono gli atomi presenti in 12 g di ^{12}C.
- ampere (A) è l'intensità di corrente elettrica che, se mantenuta in due conduttori lineari paralleli, di lunghezza infinita e sezione trasversale trascurabile, posti a un metro di distanza l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra questi una forza pari a 2×10^{-7}N per metro di lunghezza[10].
- candela (cd) è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette radiazione monocromatica di frequenza[11] 540×10^{12} Hz (Hz è il simbolo dell'hertz unità di misura della frequenza) e che ha un'intensità radiante in quella direzione pari a 1/683 watt per steradiante.

Tabella 1.2: Multipli e Sottomultipli del Sistema Internazionale.

Multiplo	Prefisso	Simbolo	Sottomultiplo	Prefisso	Simbolo
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deca	da	10^{-18}	atto	a

Nella tabella 1.3 sono elencate le principali grandezze derivate del SI per le quali sono stati definiti delle unità di misura con uno specifico nome.

[10]Questa definizione che è quella ufficiale di inserita nel SI è di difficile realizzazione pratica e alcuni uffici metrologici nazionali preferiscono definire al suo posto le unità di differenza di potenziale e di resistenza. La critica si basa sulla richiesta della "lunghezza infinita" del conduttore e sulla sua sezione "trascurabile"; entrambe le richieste rendono la definizione poco operativa.

[11] La frequenza scelta di 540×10^{12} Hz corrisponde ad una lunghezza d'onda pari a circa 555 nm attorno alla quale c'è la massima sensibilità dell'occhio umano.

Tabella 1.3: Sistema Internazionale - Unità di Grandezze Derivate

Grandezze derivate	Nome	Simbolo	Unità di base equivalenti
Forza	newton	N	kg m s^{-2}
Energia	joule	J	kg m^2 s^{-2}
Potenza	watt	W	kg m^2 s^{-3}
Pressione	pascal	Pa	kg m^{-1} s^{-2}
Viscosità	poiselle	Pl	kg^{-1} m^{-1} s^{-1}

1.6.3 I sistemi cgs

Il sistema cgs prende nome dalle iniziali delle unità fondamentali utilizzate nella meccanica: centimetro per le lunghezze, grammo per le masse e secondo per il tempo. Il SI e il cgs, per quanto riguarda la meccanica, sono costruiti in modo identico, l'unica differenza consiste in un fattore di scala nelle unità di due delle grandezze fondamentali (lunghezza e massa).

Differentemente dal SI che introduce l'intensità di corrente come grandezza fondamentale per l'elettromagnetismo, nei sistemi cgs le grandezze elettromagnetiche sono tutte derivate da quelle meccaniche e in funzione della della legge utilizzata per definire le grandezze elettromagnetiche si avrà un particolare sistema cgs (cgs elettrostatico, cgs elettromagnetico, [cgs] di Gauss,. . .). Questo è il motivo per cui i sistemi cgs si citano al plurale. La descrizione e lo studio di questi sistemi, in particolare quello di Gauss ancora molto usato in fisica teorica, è materia di un corso che tratti l'elettromagnetismo.

Nella tabella 1.4 sono riportate le grandezze di base del sistema cgs, con l'esclusione di quelle per le grandezze elettromagnetiche, nella tabella 1.5 sono riportate le più importanti grandezze derivate nell'ambito della meccanica e il rapporto con le unità del SI.

Tabella 1.4: Sistema cgs per la meccanica

Grandezze di Base	Nome	Simbolo	Rapporto con le unità del SI
Lunghezza	centimetro	cm	=10^{-2}m
Massa	grammo	g	=10^{-3}kg
Tempo	secondo	s	
Temperatura	kelvin	K	
Quantità di materia	mole	mol	
Intensità luminosa	candela	cd	

1.6.4 Unità di misura non SI

Molte altre unità di misura "*pratiche*" sono ancora in uso nei diversi campi della fisica e della tecnica. Tra quelli più usati:

Unità di massa atomica (u) è $1/12$ della massa dell'atomo di carbonio[12]. $1u = 1.661 \times 10^{-27}\,kg$

[12]Prima del 1961 questa unità era definita usando l'atomo di ossigeno ed era indicata con il simbolo "amu", attualmente obsoleto

Tabella 1.5: Grandezze derivate del sistema cgs per la meccanica

Grandezze derivate	Nome	Simbolo e definizione	Rapporto con le unità del SI
Accelerazione	galileo	1 Gal= 1 cm s^{-2}	$=10^{-2}$m s^{-2}
Forza	dyne	1 dyn=1g cm s^{-2}	$= 10^{-5}$ N
Energia	erg	1 erg= 1g cm^1 s^{-2}	$=10^{-7}$ J
Potenza	–	1 erg/s=1g cm^2 s^{-2}	$=10^{-7}$W
Pressione	baria	1 Ba=1dyn cm^{-2}	$=10^{-1}$Pa s
Viscosità	poise	1 P= 1g $cm^{-1}s^{-1}$	$=10^{-1}$Pa s

L'elettronvolt (eV) è un'unità di misura dell'energia molto usata in fisica atomica e in fisica delle particelle elementari. L'elettronvolt è definito come l'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di $1V$. Il fattore di conversione con l'unità SI è: 1eV $= 1.602 \times 10^{-19}\, J$

L'**unità astronomica** (AU) è un'unità di lunghezza utilizzata nello studio dei sistemi planetari, infatti corrisponde circa alla distanza terra sole. Il fattore di conversione con l'unità SI è: 1AU $= 1.496 \times 10^{11}$ m.

L'angstrom (Å) è un'unità di lunghezza in uso nella spettroscopia ottica e nella fisica atomica. Il fattore di conversione con l'unità SI è: $(1\text{Å} = 10^{-10}$ m)

1.6.5 I Sistemi di unità naturali

I sistemi di unità naturali sono basati unicamente sulle costanti fisiche universali. Ad esempio la carica elementare "e" è scelta come unità (naturale) di carica elettrica, e la velocità della luce c è scelta come unità (naturale) per le velocità. Un sistema puramente naturale di unità è definito in modo tale che ad alcune costanti fisiche universali è assegnato il valore unitario. Questa scelta ha sia aspetti positivi sia negativi: in particolare
PRO: Semplifica le espressioni matematiche delle leggi fisiche.
CONTRO: Si perde chiarezza e comprensione, poiché queste costanti vengono omesse nelle espressioni delle leggi fisiche.

1.7 Cambiamento di unità di misura – Fattori di conversione

Nella pratica accade molto spesso che il valore di una grandezza fisica sia espresso in una unità di misura, che indichiamo con u_1, non coerente con le necessità del calcolo. Per proseguire in modo coerente nei calcoli è necessario ottenere il valore di questa grandezza espressa in un'altra unità che indichiamo con u_2. Il passaggio tra le due unità di misura di ottiene mediante uno specifico *fattore di conversione*: $C_{u_1 \to u_2}$ che permette di passare dall'unità u_1 all'unità u_2. $(1 \cdot u_1 = C \cdot u_2)$ che si legge: "una unità u_1 è pari a C unità u_2".
Esempio 1. Supponiamo di volere convertire una velocità espressa in miglia[13] (simblo mi) all'ora (simbolo h) in metri al secondo. Supponiamo che la velocità sia $v = 50\, mi/h$; dobbiamo convertire le miglia in metri e le ore in secondi. Tenendo conto che $1\, mi = 1609\, m$ si ha il fattore di conversione $C_{mi \to m} = 1609\, m/mi$; tenendo conto che $1h = 3600\, s$ si ha

[13] Il miglio è un'unità di lunghezza ancora largamente utilizzata nei paese anglosassoni come la Gran Bretagna e gli USA.

fattore di conversione $C_{h\to s} = 3600\, s/h$. Sostituendo:

$$50\frac{mi}{h} = 50\frac{C_{mi\to m}}{C_{h\to s}} = 50\frac{\cancel{mi}}{\cancel{h}} \times 1609\frac{m}{\cancel{mi}} \times \frac{1}{3600}\frac{\cancel{h}}{s} = 22.35\frac{m}{s}$$

Esempio 2. A volte capita di dover convertire un intervallo temporale espresso con le unità usate nel linguaggio corrente (ore, minuti e secondi) in unità SI ovvero in secondi. Consideriamo un intervallo temporale di 4 ore e 18 minuti e 33 secondi, per ottenere il suo valore in secondi si deve risolvere la seguente equazione:

$$4 \text{ h} + 18 \text{ min} + 33 \text{ s} = x \text{ s}$$

dove x rappresenta il valore dell'intervallo temporale espresso in secondi. I fattori di conversione necessari per questa operazione sono: il fattore di conversione da ore in minuti $C_{h\to min} = 60$min/h e quello da minuti a secondi $C_{min\to s} = 60$s/min; quindi:

$$(4 \text{ h } \times C_{h\to min}) \times C_{min\to s} + 18 \text{ min} \times C_{min\to s} + 33 \text{ s} = x \text{ s}$$

$$\left(4 \text{ h} \times 60\frac{\text{min}}{\text{h}}\right) \times 60\frac{\text{s}}{\text{min}} + 18 \text{ min} \times 60\frac{\text{s}}{\text{min}} + 33\text{s} = 15\,513\,\text{s}$$

1.8 Dimensioni fisiche e Analisi Dimensionale

Torniamo sull'esempio del paragrafo precedente, utilizzato per esemplificare il cambiamento delle unità di misura della velocità, esaminandolo da un punto di vista differente. La velocità, con le unità di misura scelte[14], ha un determinato valore numerico. Se cambiamo l'unità di misura della lunghezza dividendola per L (nell'esempio precedente si era posto $L = 1609$) e quella del tempo dividendola per T (nell'esempio precedente si era posto $T = 3600$) allora il valore numerico della velocità è moltiplicato di un fattore LT^{-1}. Analogamente, il valore numerico del volume di un parallelepipedo $V = abc$, se diminuiamo l'unità con cui si misurano le lunghezze dei lati a, b e c di un fattore L, aumenterà di un fattore L^3. Ancora, se nella misura della densità di un corpo ($\rho = m/V$), diminuiamo l'unità di misura della massa di un fattore M e l'unità di lunghezza di un fattore L il valore numerico della densità aumenterà di un fattore ML^{-3}. Per tutte le grandezze derivate[15] è possibile ottenere una espressione simile a quelle che sono state ottenute per la velocità, per il volume e per la densità.

Le espressioni: LT^{-1}, L^3, ML^{-3} e quelle simili che possono essere ricavate per tutte le altre grandezze derivate, che determinano le variazioni dei valori numerici delle grandezze fisiche nel passaggio da un sistema di unità ad un altro, sono dette le *dimensioni fisiche* della grandezza. Così le dimensioni della velocità sono LT^{-1} quelle del volume sono L^3 e quelle della densità sono ML^{-3}.

Più in generale:

> *La funzione che determina il fattore di cui cambia una grandezza fisica nel passaggio da un sistema di unità di misura ad un altro è detto dimensione fisica o, più brevemente, dimensione della grandezza.*

[14] Supponiamo che il sistema di unità che utilizziamo abbia tra le grandezze di base la lunghezza, il tempo e la massa.

[15] In un fissato sistema in cui siano state definite le grandezze di base.

Per indicare le dimensioni fisiche di una generica grandezza G si usa racchiuderla tra parentesi quadre $[G]$. Così per la velocità si scrive $[v] = LT^{-1}$, per il volume $[V] = L^3$, per la densità $[\rho] = ML^{-3}$, eccetera. Nell'espressione delle dimensioni fisiche di una grandezza si utilizza sempre lo stesso simbolo per indicare una grandezza fisica di base: L per la lunghezza, T per il tempo e M per la massa. Le dimensioni fisiche di una fissata grandezza sono indipendenti dalla specifica formula matematica che la esprime in termini delle grandezze di base, così ad esempio se consideriamo tre volumi differenti: quello di una sfera $V_s = 4\pi r^3/3$, di un parallelepipedo $V_p = abc$ e quello di un cubo $V_c = a^3$ abbiamo $[V_s] = [V_p] = [V_c] = L^3$. Il simboli usati per le dimensioni delle grandezze fisiche di base del Sistema Internazionale sono riportate nella tabella 1.1. Nella tabella 1.6 sono riportate le dimensioni delle più comuni grandezze della meccanica nel SI.

E' importante notare che la dimensione fisica di una grandezza dipende dal sistema di unità scelto[16].

Tabella 1.6: Unità di misura e dimensioni di alcune grandezze meccaniche

Grandezza Derivata	Simbolo	Unità di misura	Dimensione
accelerazione	a	m/s^2	LT^{-2}
angolo piano	$\alpha, \beta, \ldots \theta, \phi$	rad	1
angolo solido	Ω	sr	1
area	$A\,, S$	m^2	L^2
densità	ρ	kg/m^3	ML^{-3}
energia, lavoro	E, L	J	ML^2T^{-2}
forza	F	N	MLT^{-2}
frequenza	f, ν	Hz	T^{-1}
momento meccanico		kg m^2/s^2	ML^2T^{-2}
potenza	P, W	W	ML^2T^{-3}
pressione	p	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
velocità	v	m/s	LT^{-1}
velocità angolare	Ω		T^{-1}
volume	V	m^3	L^3

Forma monomia delle dimensioni di una grandezza. Negli esempi del paragrafo precedente le dimensioni di una grandezza sono sempre espresse da una legge di potenza in forma monomia delle "dimensioni" delle grandezze di base. Questa affermazione è generalizzabile, e quindi le dimensioni fisiche di qualsiasi grandezza Q, si esprimono come:

$$[Q] = L^a T^b M^c \tag{1.2}$$

dove gli esponenti a, b, c sono numeri razionali positivi o negativi. La forma monomia espressa dalla relazione (1.2) è conseguenza dell'importante principio che afferma che il rapporto di due realizzazioni di una stessa grandezza fisica deve essere indipendente dall'unità di misura scelta delle grandezze di base usate per definirla[17].

[16] Ad esempio in un sistema nel quale le grandezze di base sono lunghezza, massa e tempo, la dimensione della densità è $[\rho] = ML^{-3}$, mentre in un sistema nel quale le grandezze di base sono lunghezza, forza e tempo, la dimensione della densità è $[\rho] = L^{-4}FT^2$

[17] La dimostrazione della relazione (1.2) è reperibile nei testi [11] oppure [1]

Esercizio. Trovare le dimensioni fisiche della costante elastica k di una molla. La forza esercitata da una molla su un punto materiale di massa m si esprime come: $F = -k\Delta x$ dove Δx è l'allungamento della molla. Per la seconda legge di Newton si ha:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\Delta x$$

Prendendo le dimensioni fisiche dei due membri:

$$\left[m\frac{d^2x}{dt^2}\right] = MLT^{-2} = [k\Delta x] = [k]L, \qquad \text{da cui } [k] = MT^{-2} \tag{1.3}$$

Esercizio. Trovare le dimensioni fisiche della costante di gravitazione universale.

Per la legge di gravitazione universale di Newton la forza F che si esercita tra due masse puntiformi m_1 e m_2 distanti fra loro r è (in modulo)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è la *costante di gravitazione universale*. Per trovare le dimensioni fisiche di G è opportuno riscrivere la formula precedente nel seguente modo:

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

Passando alle dimensioni si ha:

$$[G] = \frac{[F][r^2]}{[m_1][m_2]} = MLT^{-2}\,L^2\,M^{-2} = L^3T^{-2}M^{-1} \tag{1.4}$$

1.8.1 Analisi dimensionale e sue applicazioni

Le grandezze fisiche con le stesse dimensioni sono dette *omogenee*. Solo grandezze omogenee possono essere sommate o comparate

1.8.2 Controllo delle formule con l'Analisi Dimensionale.

Le dimensioni fisiche delle grandezze a destra e sinistra del segno di uguale debbono essere le stesse, così come la loro somma è lecita solo se hanno le stesse dimensioni. Se le dimensioni sono differenti la formula è sicuramente errata, tuttavia *il contrario non è vero*. Per il controllo delle dimensioni è necessario scrivere le formule in modo letterale sostituendo i valori numerici solo alla fine. Come esempio si consideri il calcolo della traiettoria di un proiettile che parte dall'origine degli assi (x, y) con velocità iniziale $(v_o \cos\theta, v_o \sin\theta)$. Nella formula che dà la soluzione, riportata qui di seguito, sono stati inseriti due "errori" con l'intento di illustrare quando l'analisi dimensionale aiuta a scoprirli e quando invece non è in grado di evidenziarli.

$$\text{Formula con 2 errori} \qquad y = \frac{g}{2v_o \cos^2}x^2 + x\sin\theta$$

Il lettore verifichi che il primo termine a destra del segno uguale non ha le dimensioni di una lunghezza come dovrebbe; anche il secondo termine per quanto dimensionalmente corretto è errato (la correzione è $\tan\theta$ al posto di $\sin\theta$).

Argomenti delle funzioni trascendenti Mediante l'analisi dimensionale si deduce che gli argomenti di tutte le funzioni trascendenti[18] debbono essere *adimensionali*. Infatti le funzioni trascendenti sono esprimibili come una serie infinita di potenze crescenti dell'argomento, ovvero come una serie infinita di termini *non omogenei tra loro*. Ne consegue che l'argomento delle funzioni trascendenti deve essere un numero puro.

Come esempio consideriamo la funzione esponenziale (e^x) che descrive un'ampia classe di fenomeni fisici. Attorno a x=0, la funzione esponenziale ammette il seguente sviluppo in serie di potenze:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \tag{1.5}$$

Questo sviluppo in serie conferma che x deve essere un numero puro. Infatti se x avesse una dimensione fisica, diciamo una lunghezza, nel termine di destra della (1.5) ci sarebbe la somma di un numero puro "1" con una lunghezza "x", con un area "x^2" con un volume "x^3", cosa priva si senso. Come esempio di corretta scrittura degli argomenti delle funzioni trascendenti in fisica, consideriamo il moto armonico di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza elastica di costante k. Si dimostra che, con un'opportuna scelta delle condizioni iniziali, la posizione $x(t)$ del punto materiale in funzione del tempo t si esprime in termini della funzione seno come:

$$x(t) = X_o \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Si verifica facilmente, utilizzando la (1.3), che l'argomento della funzione seno ($t\sqrt{k/m}$) è adimensionale. Sempre per ragioni dimensionali la costante X_o, ampiezza massima delle oscillazioni, deve avere le stesse dimensioni di $x(t)$, una lunghezza.

1.8.3 Deduzioni di leggi fisiche

In alcune circostanze l'analisi dimensionale permette di dedurre la forma delle leggi fisiche. L'analisi dimensionale permette di trovare soltanto la dipendenza dalle variabili con dimensioni fisiche mentre non può determinare le costanti adimensionali. Esaminiamo alcuni esempi.

Periodo di oscillazione del pendolo. Consideriamo un pendolo di lunghezza l di massa m in un campo gravitazionale g, e ci chiediamo quale sia l'espressione del periodo di oscillazione del pendolo. Per la soluzione di questo problema abbiamo a disposizione le tre grandezze fisiche l, m e g. Cerchiamo quindi di ottenere una grandezza con le dimensioni di un tempo utilizzando le sole grandezze a disposizione. Scriviamo quindi l'equazione dimensionale:

$$T = [l]^\alpha[m]^\beta[g]^\gamma = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\gamma}M^\beta T^{-2\gamma}$$

Dove compaiono tutte le grandezze a disposizione e le potenze a cui sono elevate α, β e γ sono incognite da determinare. Dovendo essere uguali le dimensioni a destra e sinistra del segno uguale dovrà essere:

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad -2\gamma = 1$$

[18] Le funzioni trascendenti sono quelle funzioni non esprimibili come combinazione finita di operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza razionale). Esempi di funzioni trascendenti sono $\log(x)$, e^x, tutte le funzioni trigonometriche, $\sin x, \cos x, , \dots$x e tutte le funzioni che li contengono. Tali funzioni sono esprimibili in termini algebrici solo come una *serie infinita*

da cui

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = -\frac{1}{2}$$

Con questi valori otteniamo per il periodo la nota espressione :

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove k è un fattore adimensionale che non può essere ottenuto dall'analisi dimensionale. Risolvendo il problema con il metodo "standard", ovvero risolvendo l'equazione differenziale, si ottiene $k = 2\pi$.

Deduzione della terza legge di Keplero. Consideriamo un pianeta di massa m che orbita attorno al sole la cui massa indichiamo con M ($M \gg m$). Supponiamo che la traiettoria del satellite possa essere considerata circolare[19] di raggio r. Vogliamo ottenere con l'ausilio dell'analisi dimensionale il periodo di rivoluzione T del pianeta. Le grandezze fisiche da cui dipende T sono la costante di gravitazione universale G , le cui dimensioni fisiche sono data dalla (1.4), dalla massa del sole M e dal raggio della traiettoria (si noti che la massa del pianeta non compare nelle equazioni del moto). Potremo quindi scrivere:

$$[\text{Periodo}] = T = [G]^{\alpha}[M]^{\beta}[r]^{\gamma} = L^{3\alpha}T^{-2\alpha}M^{-\alpha}M^{\beta}L^{\gamma}$$

Da questa eguaglianza ricaviamo il seguente sistema:

$$0 = 3\alpha + \gamma, \quad 1 = -2\alpha, \quad 0 = -\alpha + \beta$$

la cui soluzione è:

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}$$

Utilizzando queste soluzioni, il periodo del pianeta al quadrato (perché così usualmente si scrive la terza legge di Keplero) è dato da

$$T^2 = \frac{k}{GM}r^3 \tag{1.6}$$

che è proprio la terza legge di Keplero ottenuta con la sola analisi dimensionale. Nella (1.6), come nel caso precedente, k è un fattore adimensionale che non può essere ottenuto dall'analisi dimensionale. Risolvendo il problema con il metodo "standard" si ottiene $k = 2\pi$.

Dimostrazione del teorema di Pitagora. L'analisi dimensionale permette di ottenere una elegante dimostrazione del teorema di Pitagora. Consideriamo il triangolo rettangolo di figura 1.5 con c ipotenusa e a e b cateti. La conoscenza di un angolo, in figura indicato con θ, e dell'ipotenusa c è sufficiente per risolvere completamente il triangolo (infatti sono noti due angoli e un lato). Quindi l'area A di questo triangolo si può esprimere come una certa funzione di c e θ: $A = \mathcal{A}'(c, \theta)$, dove $\mathcal{A}'$ è un funzione incognita. Poiché le aree hanno le dimensioni di una lunghezza al quadrato e l'unica variabile a disposizione con le dimensioni di una lunghezza è c, dovrà essere:

$$A = \mathcal{A}'(c, \theta) = c^2\mathcal{A}(\theta) \tag{1.7}$$

[19]In realtà le orbite dei pianeti sono ellittiche ma per queste considerazioni l'eccentricità dell'orbita dei pianeti è trascurabile.

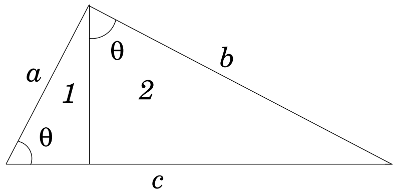


Figura 1.5

con $\mathcal{A}$ funzione incognita[20]. Consideriamo ora i due triangoli rettangoli indicati in figura con 1 e 2 con ipotenusa rispettivamente a e b. Entrambi i triangoli sono simili al triangolo dal quale sono stati ricavati. Potremo quindi esprimere le loro aree A_1 e A_2 usando la formula (1.7), ovvero:

$$A_1 = a^2\mathcal{A}(\theta) \qquad \text{e} \qquad A_2 = b^2\mathcal{A}(\theta)$$

Tenendo conto che $A = A_1 + A_2$, possiamo scrivere:

$$c^2\mathcal{A}(\theta) = a^2\mathcal{A}(\theta) + b^2\mathcal{A}(\theta)$$

da cui semplificando[21] $\mathcal{A}(\theta)$, otteniamo il teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

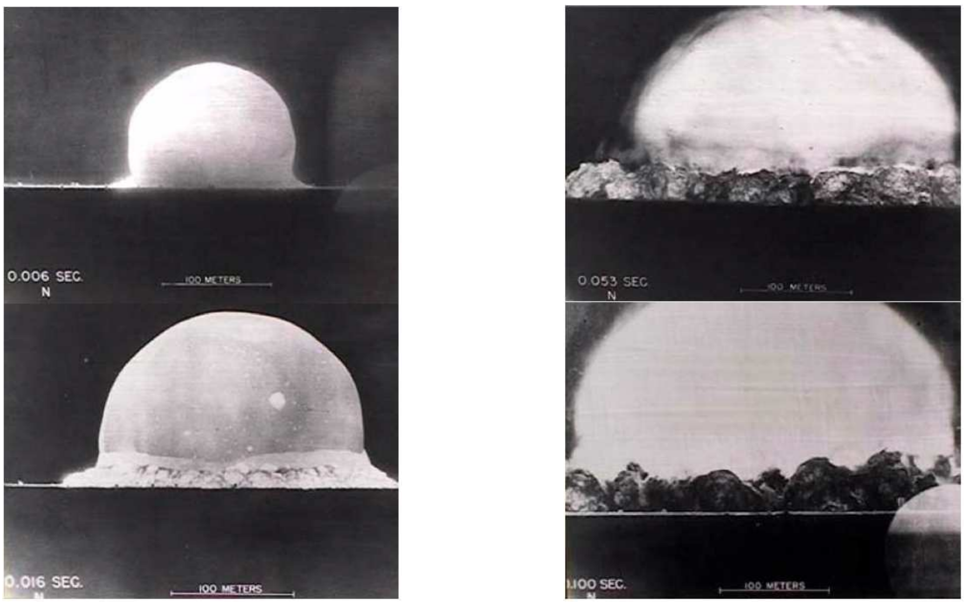


Figura 1.6: Immagini della prima esplosione atomica

Energia nella bomba atomica. Negli anni '50 vennero pubblicate in un giornale inglese le immagini della prima esplosione di una bomba atomica. Nelle immagini, alcune delle quali sono mostrate nella figura 1.6, è riportato il tempo trascorso dell'esplosione e la scala delle

[20]Si lascia al lettore dimostrare che $\mathcal{A}(\theta) = \sin(2\theta)/4$.

[21]Si noti che elidere $\mathcal{A}(\theta)$ è lecito in quanto non è nullo per triangoli con lati finiti.

distanze. Il fisico inglese G.I. Taylor ha ricavato da queste immagini il raggio dell'esplosione in funzione del tempo e applicando l'analisi dimensionale è stato in grado di determinare l'energia totale sviluppata nell'esplosione. Per questo motivo fu sospettato di essere coinvolto in attività di spionaggio in quanto questo dato ara classificato.

Il ragionamento di Taylor è il seguente: il raggio R dell'esplosione dipende dall'energia E rilasciata in un tempo brevissimo dall'esplosione, dalla densità dell'aria ρ, e ovviamente dal tempo t:

$$R = f(E, \rho, t)$$

Passando alle dimensioni dei due membri si ha:

$$[R] = L = [f(E, \rho, t)] = [E]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[t]^{\gamma} = M^{\alpha}L^{2\alpha}T^{-2\alpha}M^{\beta}L^{-3\beta}T^{\gamma} = L^{2\alpha-3\beta}T^{-2\alpha+\gamma}M^{\alpha+\beta}$$

con α, β, γ costanti da determinare con l'analisi dimensionale. Le dimensioni della funzione f devono essere quella di una lunghezza e quindi si deve avere:

$$2\alpha - 3\beta = 1, \quad -2\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta = 0$$

E' facile verificare che la soluzione di questo sistema è: $\alpha = 1/5,\ \beta = -1/5,\ \gamma = 2/5$. La f cercata è quindi:

$$R = cE^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5} \tag{1.8}$$

dove c è una costante adimensionale che Taylor ipotizzò essere dell'ordine dell'unità. Infine la determinazione dell'energia dell'esplosione si ricava dalla (1.8) come:

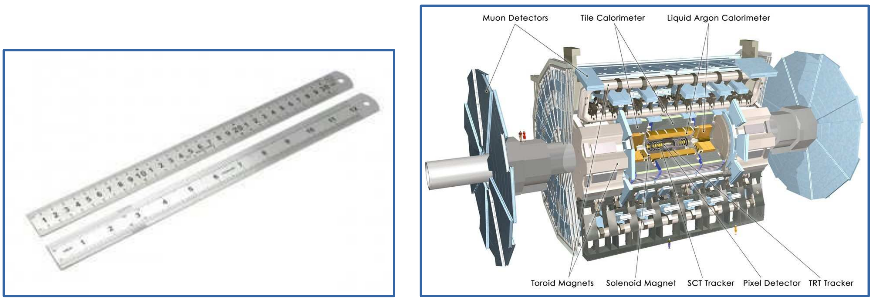
$$E = c^{-5}\frac{R^5\rho}{t^2}$$

Capitolo 2

Strumenti di misura

Con *strumento di misura* si intende un dispositivo adatto ad ottenere il valore numerico (la misura) di una o più grandezze fisiche. L'insieme di operazioni che si compiono usando uno strumento di misura allo scopo di ottenere la misura di una grandezza, prende il nome di *misurazione*. Gli strumenti di misura possono essere molto semplici, come un regolo millimetrato, come mostrato in figura 2.1*a*) oppure estremamente complessi come i rivelatori di interazioni subnucelari costruiti presso le zone di interazione degli acceleratori di particelle (vedi la figura 2.1*b*).

Iniziamo occupandoci di strumenti "semplici" ovvero dispositivi che misurano un'unica grandezza fisica per esempio un regolo millimetrato usato per la misurazione di una lunghezza oppure un cronometro usato per la misurazione di un intervallo temporale oppure una bilancia usata per la misurazione della la massa di un oggetto e così via.



a) *b*)

Figura 2.1: Esempi di strumenti di misura: *a*) righelli metallici graduati in millimetri e in pollici e *b*) rivelatore "ATLAS" utilizzato per la misurazione di molti parametri che caratterizzano le interazioni subnucleari presso l'acceleratore LHC del CERN a Ginevra.

2.1 Come funziona uno strumento di misura

Il funzionamento di uno strumento di misura si basa su i principi fisici che coinvolgono specificamente la grandezza che si intende misurare Tuttavia è possibile enunciare alcuni principi generali validi per la maggior parte delle misurazioni eseguite con gli strumenti di misura. In generale una misurazione consiste nelle seguenti fasi:

1. lo strumento di misura viene fatto *interagire*[1] con il misurando
2. si attende, quando è necessario, che lo strumento *si stabilizzi* ovvero che entri in equilibrio con la grandezza da misurare
3. infine sullo strumento appare il risultato numerico[2] della misurazione.

Come esempio esaminiamo le fasi della misurazione della temperatura di un liquido con un termometro a mercurio: 1) il termometro è immerso nel liquido, 2) si attende che il termometro si metta in equilibrio termico con il mezzo da misurare, ovvero che raggiunga la stessa temperatura del mezzo in cui è stato immerso, e infine 3) si legge il livello raggiunto del mercurio in una scala graduata.

2.2 Strumenti analogici e digitali

Gli strumenti di misura sono classificati come analogici o digitali secondo la modalità con cui lo strumento presenta il risultato numerico della misurazione.

Strumenti analogici. Gli strumenti analogici indicano il valore della misura tramite un indice oppure il livello di un liquido che si posiziona su una scala graduata come esemplificato nella figura 2.2. Lo strumento funziona sfruttando il comportamento di una grandezza *analoga* a quella misurata. Ad esempio in una bilancia a molla si sfrutta l'allungamento di una molla soggetta alla forza peso della massa da misurare per ottenere il valore della massa. La stima del valore di una grandezza fisica ottenuta con uno strumento analogico è un valore continuo così come è continuo il valore della grandezza misuranda (nell'esempio precedente l'allungamento della molla varia in modo continuo così come può variare la massa del peso misurando).

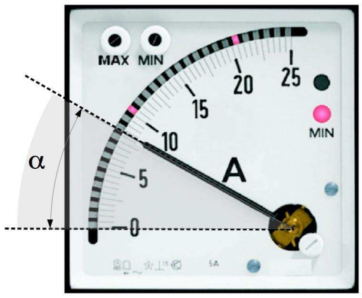


Figura 2.2: Esempio di strumento analogico. In questo strumento il valore della grandezza da misurare (la corrente) è proporzionale all'angolo α formato dall'indice con la linea orizzontale corrispondente a corrente nulla.

[1] Le modalità con cui uno strumento di misura interagisce con il misurando sono estremamente varie: lo strumento viene semplicemente giustapposto alla grandezza da misurare come accade con un regolo, oppure lo strumento è immerso nella sostanza come accade per la misurazione della temperatura con un termometro ad immersione, oppure connesso tramite conduttori per le misure elettriche di tensione e di corrente oppure avvicinato a sorgenti radioattive oppure costruito nei pressi delle zone di interazione tra fasci di particelle dove avvengono le reazioni di fisica subnucleare di alta energia nei moderni acceleratori di particelle.

[2] Questa modalità di acquisire il valore della misura in molti strumenti attuali (soprattutto nei sistemi complessi) è sostituito dal trasferimento diretto dei dati dallo strumento ad un calcolatore dedicato all'acquisizione dei dati senza che il valore della misura appaia sullo strumento.

Strumenti digitali. Negli strumenti digitali[3], diversamente da quelli analogici, la misura è data da un numero formato da un certo numero di cifre eventualmente seguito da un'unità di misura. Un esempio è mostrato in figura 2.3. In generale nel funzionamento di uno strumento

Figura 2.3: Voltmetro digitale con 8 "digit". Nel "Display" è mostrata l'unità di misura (mV).

digitale si distinguono due fasi principali: 1) un trasduttore[4] trasforma la grandezza fisica che si vuole misurare in un segnale elettrico di ampiezza proporzionale alla grandezza fisica e 2) in uno stadio successivo il segnale elettrico generato dal trasduttore è trasformato tramite un opportuno circuito elettronico, detto ADC[5], in un segnale digitale cioè in un numero. Nella figura 2.4 mostriamo un esempio di come un ADC trasforma un segnale analogico in un segnale digitale.

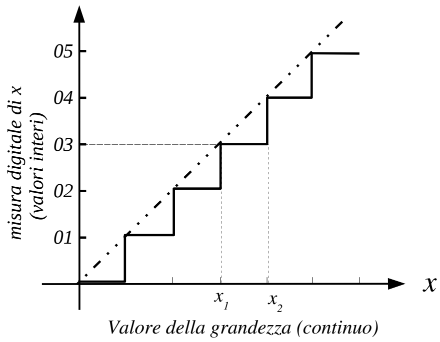


Figura 2.4: Grafico che schematizza il funzionamento di uno strumento digitale (ideale). In particolare nel grafico è evidenziato come ai valori della grandezza fisica x compresi tra x_1 e x_2 lo strumento dia la risposta digitale "3".

2.3 Caratteristiche degli strumenti di misura

Le caratteristiche di uno strumento sono varie e tipicamente dipendono dal tipo dello strumento. Tuttavia alcune caratteristiche di carattere generale, sono valide per tutti gli strumenti; tra queste:

[3]Gli strumenti digitali sono stati sviluppati nella seconda metà del novecento in concomitanza con lo sviluppo dell'elettronica e al giorno d'oggi hanno quasi completamente soppiantato quelli analogici.

[4]Un trasduttore alle volte detto sensore è un dispositivo in grado di trasformare una determinata grandezza fisica in un segnale misurabile, tipicamente elettrico.

[5]ADC è un acronimo e sta per *Analog to Digital Converter* la cui traduzione in italiano è Convertitore Analogico Digitale, ovvero trasforma un segnale analogico in un segnale digitale "dello stesso valore".

- **Portata** oppure **Fondo scala** oppure più correttamente **Intervallo di misura**: indica il valore massimo (e alle volte anche il minimo) della grandezza che lo strumento può misurare nella configurazione scelta. Nel gergo di laboratorio spesso si usa il termine inglese *Range*

- **Risoluzione.** Con questo termine si intende la capacità dello strumento distinguere due valori prossimi tra loro. Per uno strumento digitale (vedi il paragrafo successivo) la risoluzione è data dal valore dell'ultima cifra che appare nel display; per uno strumento analogico è molto più difficile da determinare e teoricamente potrebbe essere infinita.

- **Sensibilità.** E' il rapporto tra la variazione della risposta dello strumento rispetto alla variazione della grandezza misurata. In modo formale se R indica la risposta dello strumento e g il valore della grandezza misurata, la sensibilità dello strumento è definita come:
$$S(g) = \frac{dR(g)}{dg} \tag{2.1}$$
In generale la sensibilità non è costante in tutto l'*intervallo di funzionamento* ma può dipendere da g.

- **Linearità.** Uno strumento di misura è lineare se il valore della risposta R e il valore della grandezza g misurata sono legati da una relazione lineare $R = \alpha + \beta g$. Si noti che *Linearità* e *Sensibilità* sono legate. Infatti dalla relazione precedente si ottiene una sensibilità $S(g) = dR/dg = \beta$ costante. Se la risposta R non è lineare allora la sensibilità dipende da g.

- **Prontezza** La prontezza è legata al tempo con cui lo strumento risponde ad una sollecitazione. Minore è il tempo di risposta maggiore è la prontezza dello strumento. La prontezza è una caratteristica qualitativa e per quantificarla si deve ricorrere al modello matematico che descrive la risposta in funzione del tempo dello strumento utilizzato. Ad esempio il *tempo caratteristico* di un termometro a mercurio è un modo per misurare la sua prontezza e rende possibile il confronto tra strumenti basati sullo stesso principio fisico.

- **Accuratezza.** L'accuratezza di uno strumento consiste nella sua capacità di fornire per la grandezza fisica in misura un valore quanto più possibile vicino al *valore vero*. L'accuratezza è un concetto *qualitativo*.

- **Precisione.** La precisione è la qualità di uno strumento di riprodurre lo stesso valore misurato quando venga utilizzato nelle stesse condizioni sperimentali. La precisione è un concetto *qualitativo*.

Nota su accuratezza e precisione. Nella terminologia utilizzata in teoria delle misure, *accuratezza* e *precisione* descrivono due proprietà degli strumenti che sono diverse e completamente indipendenti tra loro; così è possibile avere uno strumento (o una misurazione) accurato ma non preciso e viceversa. Per illustrare la differenza tra i concetti *qualitativi*[6] di precisione e accuratezza è utile ricorrere all'analogia, largamente utilizzata in letteratura,

[6] Poiché queste proprietà sono qualitative non è possibile associarvi un valore numerico. Il loro uso deve essere comparativo tra strumenti oppure confrontato alla richiesta di un esperimento.

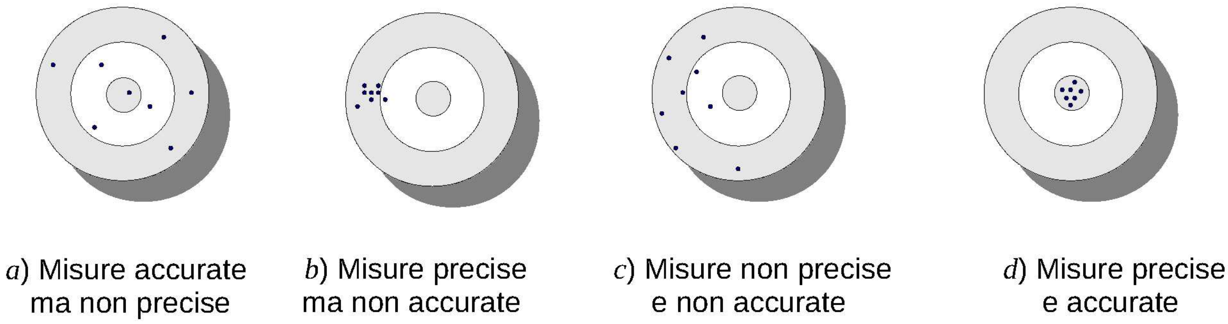


Figura 2.5: Analogia del bersaglio per illustrare qualitativamente la differenza tra i concetti di accuratezza e precisione. Il centro del bersaglio rappresenta il "valore vero" del misurando e i tiri rappresentano l'esito di una misurazione

con il tiro al bersaglio interpretando il centro del bersaglio come il "valore vero" di un misurando e i tiri come le misure eseguite. Nella figura 2.5 sono rappresentate quattro differenti distribuzioni di tiri sul bersaglio (*a, b,c, d*) che possono essere commentate come segue: *a)* misure accurate ma non precise, *b)* misure precise ma non accurate, *c)* misure non accurate e non precise, *d)* misure accurate e precise. In conclusione l'accuratezza è legata alla vicinanza della misura al valore vero mentre la precisione è legata alla dispersione delle misure. Possiamo dedurre che uno strumento "buono" deve essere contemporaneamente accurato e preciso.

2.4 Contatori

Una categoria di strumenti utilizzata in molti esperimenti di fisica è costituita dai cosiddetti *contatori*, dispositivi che generano un segnale binario[7] quando rivelano il tipo di evento per il quale sono stati progettati. Spesso si collegano questi strumenti ad opportune memorie digitali che permettono di misurare quanti eventi sono avvenuti in un determinato intervallo temporale. Esempio tipico di questo tipo di strumenti è il contatore *Geiger* che genera un segnale elettrico di ampiezza standard e di breve durata quando il suo volume sensibile è attraversato da una particella che provoca una ionizzazione. Nella figura 2.6 è mostrato lo schema di un contatore Geiger con i circuiti elettronici necessari per la formazione e il conteggio degli impulsi.

2.4.1 Efficienza dei contatori

Un'importante caratteristica di un *contatore* è la sua efficienza, tipicamente indicata con ϵ, parametro che tiene conto della probabilità che una radiazione una volta entrata nel volume sensibile del contatore venga rivelata. Se N sono le radiazioni che entrano nel contatore e n sono i segnali generati dal contatore, per N e n sufficientemente grandi, una valutazione di ϵ, è data da:

$$\epsilon \simeq \frac{n}{N}$$

[7] Il segnale binario ha due valori 0 e 1 oppure "FALSO" e "VERO".

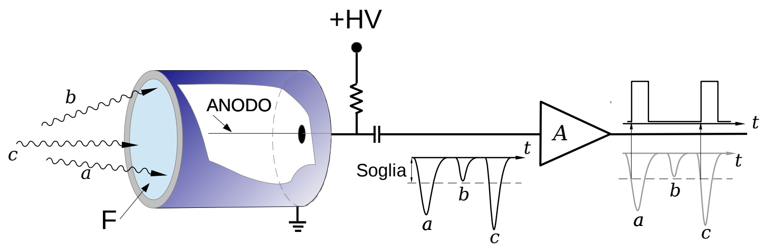


Figura 2.6: Schema di un contatore di radiazioni. Nel disegno è mostrato un esempio di inefficienza: la radiazione indicata con *b* genera un segnale elettrico insufficiente ad attivare l'amplificatore A che genera il segnale di "radiazione rivelata". Le inefficienze sono generate da vari motivi: fluttuazioni statistiche della carica elettrica generata primariamente, oppure insufficiente carica elettrica generata dovuta ad un percorso breve della radiazione ionizzante nel volume sensibile del contatore oppure vicinanza di due radiazioni ionizzanti di cui una maschera l'altra, ...

L'inefficienza η di un contatore, ovvero la probabilità che una radiazione pur entrando nel volume sensibile del contatore non venga rivelata è $\eta = 1 - \epsilon$. Nella figura 2.6 è mostrato lo schema della generazione degli impulsi da un contatore e un esempio di inefficienza. Sulle modalità con cui vanno interpretate e analizzate le misure ottenute tramite contatori torneremo dopo aver introdotto le nozioni basilari di probabilità e statistica.

Capitolo 3

Errori e Incertezze di Misura

3.1 Introduzione

L'esperienza dimostra che nessuna misura, per quanto accurata, può essere completamente libera da "errori". Qui la parola "errore" non ha il significato della conseguenza di un comportamento negligente o non attento di chi esegue la misurazione, ma è il sovrapporsi di numerosissimi effetti fisici che si sommano o si sottraggono in modo imprevedibile alla grandezza che si sta misurando. Ne consegue che il risultato di una misurazione è solo una approssimazione o una stima del valore associato alla grandezza oggetto della misurazione, ovvero il *misurando*. Quindi per determinare la qualità della misura ottenuta e per rendere significativo il confronto della misurazione effettuata con altre misurazioni della stessa grandezza è necessario associare alla misura un valore, detto **incertezza di misura**, che descrive il grado di accuratezza e precisione con cui la grandezza è nota. In questo capitolo saranno introdotti i concetti di errore e di incertezza di misura con le loro classificazioni[1].

3.2 Definizione di Errore di misura

Nel paragrafo precedente sono stati introdotti i termini di *errore di misura* e di *incertezza*, che per quanto indichino quantità evidentemente connesse, in teoria della misura sono due concetti ben distinti che non devono essere confusi. L'*errore di misura* è definito come la differenza tra *un* "valore vero" di una grandezza e la sua misura. Indicando con x il valore della misura, con μ il suo valore vero, l'errore ϵ è dato da:

$$\epsilon = \mu - x \tag{3.1}$$

[1] Una profonda revisione delle modalità con cui si valutavano e si esprimevano le incertezze nelle misurazioni è stata elaborata da un gruppo di lavoro formato da esperti nominati dalle più autorevoli organizzazioni mondiali di metrologia, di fisica, di chimica e dell'industria. Le organizzazioni che hanno promosso questo studio sono: il *Bureau International de Poids e Measures* (BIPM), la *International Electrotechnical Commission* (IEC), la *International Federation of Clinical Chemistry* (IFCC), la *International Organization for Standardization* (ISO), la *International Organization of Pure and Applied Chemistry* (IUPAC), la *International Organization of Pure and Applied Physics* (IUPAP) e *International Organization of Legal Metrology* (OIML). Il gruppo di esperti nominati da queste organizzazioni ha redatto un documento al titolo "*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*" [6], la cui prima edizione nel 1993 è stata pubblicata a cura del *International Organization for Standardization* (ISO). Questo documento, noto internazionalmente con l'acronimo *GUM* è divenuto il testo di riferimento sulla valutazione e sul trattamento delle incertezze nelle misure nell'ambiente scientifico, in quello della metrologia e in quello industriale. Il documento [8] pubblicato dalla NASA e reperibile in rete descrive con un certo dettaglio i cambiamenti introdotti dalla *GUM* relativi all'analisi degli errori.

Dalla sua definizione (3.1) ricaviamo che l'errore è una grandezza con segno e che è associata ad una ben identificata misura. In altre parole, due misurazioni della stessa grandezza effettuate anche una immediatamente dopo l'altra possono avere errori completamente differenti. Si noti inoltre che essendo ignoto il valore vero della grandezza anche *l'errore di misura è in grandezza inconoscibile*.

Nota sul "valore vero". Nella definizione di errore si è usato l'articolo indeterminativo per sottolineare la circostanza che una grandezza può avere più "valori veri" ammissibili del misurando. Ad esempio si consideri la misurazione della lunghezza di un tavolo: all'aumentare della precisione della misura, ad esempio al di sotto del decimo di millimetro, il bordo del tavolo avrà una forma frastagliata e quindi ci saranno molti valori compatibili con la definizione di lunghezza del tavolo. Un altro tipico esempio è la misurazione dell'accelerazione di gravità g, grandezza compatibile con più valori veri; infatti g, oltre a dipendere dal punto della terra dove si esegue la misurazione, dipende anche dalle maree generate dalla luna e dal sole[2].

Tradizionalmente si classificano le componenti dell'errore come

- Errore casuale[3]. Deriva da variazioni imprevedibili temporali e/o spaziali delle variabili di influenza[4]. Tali variazioni sono tanto positive quanto negative, *in media nulle*.

- Errore sistematico[5]. Una variabile di influenza varia in una direzione (sistematicamente) il valore del misurando. Se analizzando i dati il fenomeno che influenza la misurazione è riconosciuto ed è possibile calcolarne l'entità allora la misura può essere corretta, ma anche la correzione avrà la sua incertezza. Ovvero *gli effetti sistematici potranno essere ridotti ma mai completamente eliminati*.

Come esempio dei concetti di errore casuale ed errore sistematico consideriamo la figura 3.1 che riporta graficamente una simulazione delle misurazioni di una grandezza. L'ordinata dei punti riportati nel grafico rappresenta il valore della misura e la sua ascissa rappresenta il numero progressivo della misurazione. La fluttuazione delle misure evidenzia la presenza di una componente casuale dell'errore e la conoscenza del "valore vero" , noto in quanto i dati sono simulati, mette in evidenza la presenza di un errore sistematico. Arriviamo quindi alla conclusione che:

> la presenza inevitabile degli errori casuali e sistematici nelle misurazioni inserisce nei valori misurati una indeterminazione che viene detta *incertezza* e la cui valutazione è una parte fondamentale dell'attività sperimentale.

3.3 Le Incertezze di misura

L'incertezza di misura, introdotta nel paragrafo precedente, caratterizza la qualità del risultato ottenuto e permette il confronto fra misure diverse della stessa grandezza e il con-

[2] In linea di principio il valore di g dipende da valore e posizione istantanea di tutte le masse dell'universo!

[3] Nei testi inglesi questo errore è detto *random error*

[4] Con "variabili di influenza" si intendono tutte quelle grandezze fisiche che influenzano il fenomeno che si sta osservando. Ad esempio nella misura del periodo del moto di un pendolo l'attrito della sospensione, i moti dell'aria attorno al pendolo, l'ampiezza delle delle vibrazioni del punto di sospensione sono tutte variabili di influenza.

[5] Nei testi inglesi questo errore è detto *systematic error*.

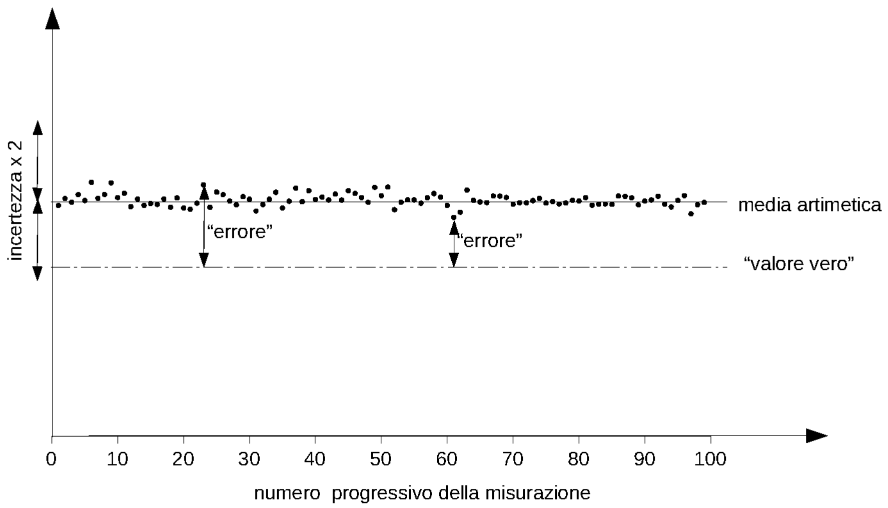


Figura 3.1: *Simulazione di misure ripetute di una grandezza fittizia. L'ordinata di ogni punto rappresenta il valore della misura mentre l'ascissa è il numero d'ordine della misura. Le misure fluttuano attorno a un valore (indicato con media aritmetica) rivelando la presenza di errori casuali presenti nelle misurazioni. Poiché i dati sono simulati è possibile conoscere il "valore vero" della grandezza indicato da una linea orizzontale. Nella figura sono anche indicati due errori di due particolari misurazioni; anche gli errori come il valore vero sono inconoscibili nelle misure reali. Nella figura è indicata anche quella che potrebbe essere l'incertezza da associare alla misurazione.*

fronto con le eventuali predizioni teoriche. La definizione di *incertezza di misura*, seguendo l'atteggiamento pragmatico[6] della GUM[6], può essere formulata nel seguente modo:

> *L'incertezza è il parametro, associato con il risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.*

Il risultato di una misurazione avrà quindi la seguente espressione:

$$(x \pm u)u.m.$$

dove x è il risultato della misurazione, u è l'incertezza (standard[7]) che le si attribuisce e $u.m.$ è l'unità di misura con cui viene espresso il risultato.

Vale inoltre la seguente regola pratica: *L'incertezza va indicata con una o massimo 2 cifre significative*. Per una nota su cifre significative, approssimazione e arrotondamento si rimanda all'appendice A.

Esempi di scrittura di risultati di una misurazione con la sua incertezza: Misure del valore di una massa di incertezza decrescente:

$$(10 \pm 3)\text{kg}, \qquad (10.5 \pm 0.7)\text{kg}, \qquad (10.58 \pm 0.06)\text{kg} \tag{3.2}$$

Si noti che il numero di cifre significative con cui si scrive il risultato deve essere coerente con il numero che rappresenta l'incertezza. Questo vuole dire non ha senso scrivere (10.2 ± 3)kg o anche (10.2 ± 0.03)kg.

[6] L'osservazione su cui si basa questo modo di procedere è che essendo l'errore, come definito dalla 3.1, *inconoscibile* non ha senso differenziarlo in casuale e sistematico. Inoltre se un effetto sistematico è riconoscito allora si può corregerlo e quindi non dà più luogo a un errore sistematico.

[7] Il termine *standard* sarà chiaro dopo l'introduzione dei principi di statisica

3.4 Cause dell'Incertezze di misura

In questo paragrafo sono elencate le possibili cause che determinano l'incertezza nelle misurazioni. L'incertezza su una misurazione può essere generata sia da una singola di queste cause sia da una loro combinazione. Quello che segue è l'elenco delle cause riconosciute di incertezza[8]:
a) Incompleta definizione del misurando
b) Imperfetta realizzazione della definizione del misurando
c) Campione non rappresentativo del misurando
d) Conoscenza non adeguata degli effetti ambientali
e) Letture errate degli strumenti analogici
f) Risoluzione finita o soglia degli strumenti
g) Valori non esatti dei campioni di riferimento
h) Valori non esatti delle costanti e altri parametri
i) Approssimazioni e assunzioni usate nella misurazione
j) Variazioni in osservazioni sotto apparenti condizioni identiche

Ripetiamo questo elenco aggiungendo spiegazioni e qualche esempio.

(a) Incompleta definizione del misurando Non sempre la definizione del misurando è sufficiente a definirlo in modo non ambiguo. Esempio: L'accelerazione di gravità al livello del mare; infatti l'accelerazione di gravità dipende almeno dalla latitudine.

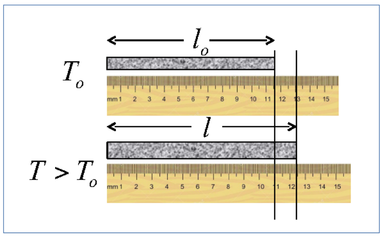
(b) Imperfetta realizzazione della definizione del misurando Esempio 1. Calore specifico dell'acqua. Quanto è puro il campione che si è scelto per la misurazione? Esempio 2. Accelerazione di un grave nel vuoto. Quanto è veramente «vuoto» il volume in cui si effettua la misura?

(c) Campione non rappresentativo del misurando Esempio 1. Datazione con il ^{14}C di un reperto dal quale si preleva un campione che può non essere rappresentativo dell'oggetto (si consideri la storia dell'analisi con il ^{14}C della sindone). Esempio 2. Sondaggi effettuati su un campione ed estrapolati a tutta la popolazione.

(d) Imperfetta conoscenza delle condizioni ambientali. Esempio: la temperatura è una *variabile di influenza* che spesso influenza le misurazioni di precisione delle lunghezze come illustrato in figura

$$l = l_o \frac{1 + \alpha_x (T - T_o)}{1 + \alpha_M (T - T_o)}$$

α_x e α_M sono i coefficienti di dilatazione rispettivamente del misurando e del metro.



(e) Letture errate degli strumenti analogici La lettura degli indici degli strumenti analogici dipende dalla acuità visiva dello sperimentatore ed è inoltre soggetta ad errori di parallasse. Ne segue che l'incertezza da associare ad una misura non dipende unicamente dallo strumento

[8]La classificazione presentata è riportata dalla *GUM* [6]

(f) Risoluzione finita o soglia degli strumenti Esempio. Uno strumento digitale non può distinguere misure che differiscono meno della cifra meno significativa mostrata.

(g) Valori non esatti dei campioni di riferimento I campioni di riferimento possono variare nel tempo, come le varie copie del "chilogrammo campione" di platino-iridio che, in modo tuttora non compreso, accrescono la loro massa.

(h) Valori non esatti delle costanti e altri parametri Nel ottenere il valore di una misura spesso si utilizzano dati di riferimento, presi da libri o articoli, la cui incertezza si *propaga* sulla misura.

(i) Approssimazioni e assunzioni usate nella misurazione. Esempio: il periodo T di un pendolo semplice è indipendente dall'ampiezza angolare di oscillazione α solo se l'angolo tende a zero. La formula della correzione è nota e se è stata misurata l'ampiezza dell'oscillazione si può applicare la correzione ($T = T(\alpha)$). Comunque anche sulla correzione applicata sarà presente un'incertezza della quale si dovrà tenere conto.

(j) Variazioni in osservazioni sotto condizioni apparentemente identiche. Tutte le cause di incertezze elencate a) a i) contribuiscono a questa voce e danno origine a quella che è detta incertezza casuale.

3.5 Incertezza relativa

Un indicazione della qualità di una misura è data, oltre che dal valore dell'incertezza assoluta u_x, dal rapporto tra l'incertezza u_x e il valore della misura x_o.

$$\frac{u_x}{x_o}$$

Questa quantità prende il nome di *incertezza relativa* ed è ovviamente un numero puro e positivo. Spesso viene espresso in percentuale. Per comprendere la rilevanza dell'incertezza relativa si consideri ad esempio che in una misura di lunghezza, un incertezza $u = 1\,\text{mm}$ su una misura $x_o = 1\,\text{cm}$ ha un significato del tutto differente se la misura fosse $x_o = 1\,\text{m}$; nel primo caso abbiamo un'incertezza relativa del 10% nel secondo caso l'incertezza relativa è 0.1%, cento volte più piccola. Come ulteriore esempio consideriamo le misure indicate nella (3.2) in cui le incertezze sono indicate in modo assoluto:

$$(10 \pm 3)\text{kg}, \qquad (10.5 \pm 0.7)\text{kg}, \qquad (10.58 \pm 0.06)\text{kg} \tag{3.3}$$

Esprimendo le stesse incertezze in modo relativo otteniamo:

$$10\text{kg} \pm 0.30, \qquad 10.5\text{kg} \pm 0.066, \qquad 10.58\text{kg} \pm 0.0057$$

oppure con l'uso del per cento:

$$10\text{kg} \pm 30\%, \qquad 10.5\text{kg} \pm 6.6\%, \qquad 10.58\text{kg} \pm 0.57\%$$

3.6 Classificazione delle Incertezze: Incertezze di Tipo A e Tipo B

La classificazione degli errori in casuali e sistematici, data nel paragrafo precedente, era l'unica utilizzata fino a che gli autori della *GUM* nel 1993 non misero in evidenza l'ambiguità di tale classificazione[9]. Infatti una componente di incertezza che viene considerata di natura sistematica in un certo esperimento può diventare casuale in un altro esperimento e viceversa. Ad esempio se misuriamo una tensione elettrica con uno specifico voltmetro[10], la taratura del voltmetro dà origine ad un errore sistematico da associare alla misura mentre se si confrontano misure della stessa tensione con esemplari diversi dello stesso voltmetro (stesso costruttore e stesso modello) l'errore sarà casuale.

Secondo le raccomandazioni degli organismi internazionali competenti contenute nella *GUM*, le incertezze nelle misurazioni si devono classificare, piuttosto che risalendo alla loro origine (casuale o sistematica che come abbiamo visto è ambigua), in modo più pragmatico e operativo secondo *il metodo con cui si stimano*. Seguendo questa indicazione si sono individuati due tipi di incertezze che sono state chiamate incertezze di "Tipo A" e di "Tipo B":

- **Incertezza di Tipo A** quando è calcolata utilizzando con metodi statistici
- **Incertezza di Tipo B** quando è valutata con metodi non statistici.

Prima di dare i primi elementi su come valutare queste incertezze è bene sottolineare che spesso in una misurazione sono presenti entrambi; si veda ad esempio la figura 3.1.

Incertezze di Tipo A. La valutazione dell'incertezza nella categoria A si applica quando sono state eseguite un numero adeguato di misurazioni indipendenti di una grandezza X sotto le stesse (apparenti) condizioni i cui valori sono diversi tra loro. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_N$ gli N valori osservati. Se la misurazione ha una risoluzione sufficiente i valori misurati non saranno tutti uguali. Come sarà giustificato ampiamente nel seguito la *migliore stima* del valore della grandezza X è data dalla *media aritmetica* delle osservazioni individuali:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3.4}$$

La stima quantitativa della fluttuazione del valore della singola misura x_i attorno alla media aritmetica (3.4) è data dalla seguente espressione:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{3.5}$$

La grandezza s è detta *stima della deviazione standard* e, se non ci sono altre cause di incertezza sulla x, rappresenta l'incertezza $u(x)$ della x. Torneremo su queste formule dopo avere introdotto i principi di base del calcolo delle probabilità e della statistica. Quello che qui si vuole sottolineare è che la valutazione delle incertezze per le misurazioni con variazioni casuali si esegue attraverso formule fornite dal calcolo delle probabilità e la statistica come le relazioni (3.4) e (3.5).

[9] La modalità usata nelle misurazioni prima della revisione critica contenuta nella *GUM*, e tuttora usata anche in qualche ambito scientifico (non di metrologia), prevedeva l'uso dell'errore casuale come incertezza da associare alla misura mentre per gli errori sistematici venivano suggeriti trattamenti *ad hoc* per la loro riduzione fino a renderli non rilevanti nella misurazione

[10] Cioè proprio quello che abbiamo appena usato!

Incertezze di Tipo B. Diversamente dal caso precedente, nella esecuzione di una misurazione può succedere che la misura si ripeta uguale a se stessa. Ad esempio se misuriamo la tensione di una batteria carica con un voltmetro digitale otteniamo sempre lo stesso valore. In questi casi in cui non si possono applicare i metodi statistici si parla di incertezze di tipo B. Se il valore di una grandezza non è stato ottenuto da osservazioni ripetute la valutazione della incertezza da associare alla misura va ottenuta principalmente da:

- dati di misurazioni precedenti
- esperienza o conoscenza delle caratteristiche e proprietà dei materiali rilevanti e degli strumenti
- specifiche tecniche del costruttore degli strumenti utilizzati
- taratura della strumentazione
- incertezze prese da manuali di riferimento.

La valutazione di questo tipo di incertezze è un processo meno automatico e spesso più difficile rispetto a quello che si esegue per la valutazione delle incertezze di tipo A e richiede una adeguata analisi della situazione sperimentale e della strumentazione utilizzata.

La lista delle cause che generano le incertezze di misura è riportata nel paragrafo 3.4 in fondo a questo capitolo.

Per concludere è istruttivo riportare la versione originale del commento che appare nella *GUM* [6] sull'importanza della valutazione delle incertezze nelle operazioni di misurazione:

> *Although this Guide provides a framework for assessing uncertainty, it cannot substitute for critical thinking, intellectual honesty, and professional skill. The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement. The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depend on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value.*

3.6.1 Esempi di Misurazioni con incertezze di Tipo A e di Tipo B

In questo paragrafo mostriamo alcuni esempi che illustrano la modalità con cui si eseguono le misurazioni e nei quali si applicano le definizioni relative all'incertezza esposte precedentemente.

Misuriamo il periodo T di un pendolo fisico che esegua "piccole oscillazioni" che possiamo ritenere isocrone. Usando un cronometro con sensibililità di $10\,\mu s$ ed un traguardo ottico, come schematicamente indicato nella figura 3.2, eseguiamo N=10 misurazioni i cui valori sono mostrati nella seguente tabella[11]:

[11] I dati riportati nella tabella sono stati effettivamente registrati con un pendolo reversibile e una scheda di acquisizione dati disponibili nel laboratorio di fisica del dipartimento

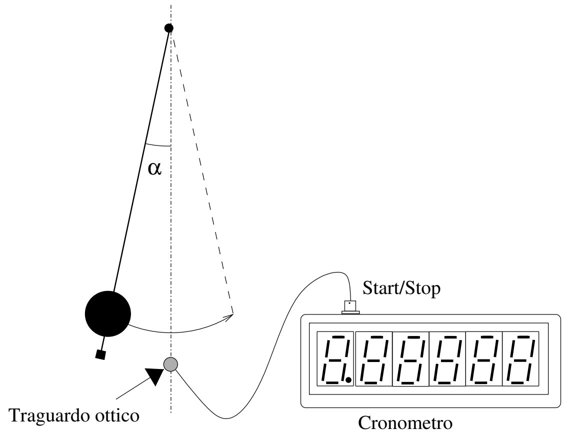


Figura 3.2: Misurazione del periodo del pendolo con un cronometro digitale e un traguardo ottico

i	T_i(s)	i	T_i(s)
1	1.52631	6	1.52594
2	1.52608	7	1.52592
3	1.52596	8	1.52641
4	1.52595	9	1.52596
5	1.52628	10	1.52611

osserviamo che le misure sono tutte diverse tra loro e ciascuno dei questi valori è una stima del misurando. Possiamo quindi dedurre che le misurazioni del periodo siano affette da incertezze di tipo A (vedi pagina 36). Come indicato dalla relazione (3.4), la *migliore stima del misurando* T è la media aritmetica dei valori misurati:

$$\overline{T} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} T_i = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_{10}}{N} = 1.526092\,\mathrm{s} \tag{3.6}$$

La stima dell'incertezza su T_i è, per la (3.5) :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i}^{N}(T_i - \overline{T})^2} = 0.000184\mathrm{s} \tag{3.7}$$

la (3.7) è l'incertezza di tipo A della singola misura T_i che è la valutazione quantitativa dello sparpagliamento dei dati attorno alla loro media aritmetica ($\overline{T}$). L'incertezza sulla media $\overline{T}$, come ci si può aspettare, diminuisce al crescere di N e vale $s/\sqrt{N}$ (anche su questo importante risultato torneremo in seguito). Il risultato finale sarà quindi:

$$T = (1.52609 \pm 0.00006)\,\mathrm{s} \tag{3.8}$$

Non tutte le misure si presentano come quella che abbiamo appena descritto; in molte la trattazione statistica che abbiamo accennato nell'esempio precedente (e che verrà approfondita nei prossimi capitoli) non può essere applicata. A proposito si veda il prossimo esempio.

Esempio 2 - Incertezza di tipo B. Se il cronometro utilizzato nella misura dell'esempio precedente fosse stato meno sensibile, per fissare le idee con una risoluzione di $0.01\,\mathrm{s}$, le 10 misurazioni avrebbero dato 10 valori tutti uguali e pari a $T = 1.52\,\mathrm{s}$ e non avrebbe senso applicare i metodi statistici come nell'esempio precedente. Ovviamente il fatto che tutte le misurazioni abbiano dato lo stesso risultato non ci autorizza ad affermare che siano prive di incertezza. Infatti questo è uno dei casi in cui l'incertezza da associare al risultato della misurazione è di tipo B. Tenendo conto delle cifre significative fornite dalla strumentazione e che le misure acquisite non variano, possiamo dedurre che il periodo del pendolo T è compreso con probabilità uniforme nell'intervallo $T_1 = 1.52\,\mathrm{s}$ e $T_2 = 1.53\,\mathrm{s}$. Vedremo nel seguito che in questi casi si associa alla misura un incertezza standard pari a $(T_2 - T_1)/\sqrt{12}$ (Vedi il paragrafo 5.9.1). Quindi in questo caso il risultato della misurazione sarà:

$$T = (1.525 \pm 0.003)s \tag{3.9}$$

C'è un ulteriore tipo di incertezza che è stata trascurata e che invece è presente in entrambi gli esempi illustrati; questa incertezza è legata alla *qualità* dei cronometri utilizzati. Entrambi gli strumenti usati per le misurazioni nei due esempi devono essere stati tarati e le incertezze di taratura, ricavate dai manuali d'uso, potrebbero contribuire, anche in modo significativo, all'incertezza totale delle misurazioni.

Capitolo 4

Presentazione e analisi grafica dei dati

Lo studio dei fenomeni fisici spesso si effettua progettando ed eseguendo esperimenti nei quali si osserva come il valore di una grandezza fisica dipenda da un'altra tipicamente variata dallo sperimentatore[1]. Esminiamo un semplice esperimento in cui si studia il comportamento di una molla elastica alla quale vengono applicati pesi di valore differente. L'esperimento consiste nella misurazione dell'allungamento della molla in funzione del peso che si applica all'estremo libero della molla. Eseguite le misurazioni, è opportuno organizzare i dati in tabelle in cui si riportano in modo quanto più possibile ordinato i valori delle grandezze misurate. Per una compilazione ordinata di una tabella si intende che i valori delle grandezze variate dallo sperimentatore siano riportate in modo possibilmente monotòno (crescente o decrescente), annotando le misure eseguite in colonne intestate con il simbolo della grandezza e unità di misura usata. Se si è in grado di valutarle, le incertezze delle singole misure di devono riportare nella tabella. Compilare correttamente le tabelle è estremamente utile nel lavoro di analisi dei dati sperimentali infatti la lettura attenta di tabelle ordinate può mettere in evidenza banali errori di trascrizione o incompletezze nell'esecuzione dell'esperimento. La tabella 4.1 è un esempio concreto su come si possano organizzare i dati acquisiti nell'esperimento dell'allungamento della molla precedentemente citato.

4.1 Rappresentazione grafica dei dati

I grafici delle grandezze fisiche sono un'utile strumento per la comprensione degli andamenti delle grandezze fisiche e forniscono un supporto indispensabile all'analisi dei dati. Inoltre i grafici costituiscono una fondamentale modalità di presentazione e illustrazione dei risultati scientifici ottenuti. I grafici possono essere usati per suggerire relazioni fisiche, per confrontare i dati sperimentali con un andamento matematico previsto e per determinare facilmente alcuni parametri delle funzioni rappresentate quali, ad esempio, la pendenza di una linea retta. Nei grafici l'andamento rettilineo giuoca un ruolo particolare e in questo capitolo saranno illustrate alcune tecniche atte a far apparire rettilinei i tracciati di alcune funzioni non lineari. Il ruolo particolare dell'andamento rettilineo è legato anche alla capacità dell'occhio umano di distinguere molto efficacemente se dei punti su di un piano sono allineati tra loro.

Descriviamo nel seguito i vari tipi di grafico che si utilizzano in fisica.

[1] Non per tutti i fenomeni fisici, come quelli astrofisici e geofisici, è possibile progettare ed eseguire esperimenti e pertanto ci si deve limitare alle sole osservazioni.

Tabella 4.1: Dati dell'esperimento sull'allungamento di una molla. Nella tabella sono riportate nella prima colonna il numero progressivo della misurazione, nelle due colonne di successive le misure della grandezza variata dello sperimentatore, cioè la massa (m) applicata alla molla con la sua incertezza (u_m) e nelle ultime due colonne la misura della grandezza "dipendente" (l'allungamento (x) della molla) con la sua incertezza (u_x). Si noti che il numero di cifre significative di ogni misura è coerente con il valore della sua incertezza .

N. misura	Massa		Allungamento	
	m (g)	$u_m(g)$	x (cm)	u_x (cm)
1	10.0	0.1	22.7	0.4
2	20.0	0.1	25.1	0.4
3	30.0	0.1	27.9	0.4
4	40.0	0.1	30.7	0.4
5	50.0	0.1	33.6	0.4
6	60.0	0.1	36.9	0.4

4.1.1 Grafici lineari

Nel grafico lineare entrambi gli assi, ascisse e ordinate, hanno scale lineari. Per la creazione di un grafico lineare[2] è opportuno seguire una specifica sequenza di passi che sono validi sia se si riportano manualmente i dati su un foglio reale di carta millimetrata sia se, come sta diventando prassi, si utilizzano programmi di grafica computerizzata per l'esecuzione dei grafici[3]. Le operazioni da eseguire per la compilazione dei grafici, che la pratica renderà automatiche, sono elencate qui di seguito:

1. Organizzare in una tabella i dati da inserire nel grafico (come già detto precedentemente) .

2. Decidere quale grandezza è da mettere sull'asse x (ascisse); di solito nell'asse x si pone la variabile indipendente e in quello y (ordinate) la variabile dipendente.

3. Decidere se l'origine deve apparire sul grafico. In alcuni casi è richiesto che l'origine appaia nel grafico, anche se il valore "zero" non è parte dei dati; per esempio, nel caso in cui si voglia determinare graficamente un'intercetta.

4. Scegliere una scala per ogni asse, ovvero determinare il valore iniziale da da cui parte la scale e a quanti centimetri corrispondono un numero opportuno di unità di misura della grandezza da riportare nel grafico (Esempio: valore iniziale 0 grammi e a 5 grammi corrispondono 20 cm). Le scale devono essere scelte in modo che i dati da graficare si estendano su quasi tutta la carta millimetrata e inoltre la scelta della scala deve essere "razionale" ovvero in modo da rendere facile localizzare quantità arbitrarie sul grafico. (Esempio: 5 divisioni = 23 centimetri è una pessima scelta.) Solo le divisioni principali devono essere riportate su ciascun asse.

5. Scrivere accanto a ciascun asse la variabile che indica la grandezza rappresentata *con le sue unità*. E' buona pratica dare un titolo al grafico, scrivendolo nel margine superiore

[2]La sequenza di azioni descritte è valida oltre che per i grafici lineari anche per gli altri tipi di grafici che verranno descritti nei prossimi paragrafi.

[3]Usando programmi di *computer* alcuni passi, come ad esempio la scelta delle scale degli assi sono fatte in modo automatico, anche se non sempre nel modo migliore. Tuttavia altre azioni, come il riportare nome ed unità delle variabili sugli assi, richiedono sempre un intervento umano.

del grafico eventualmente aggiungendo la data nella quale sono stati raccolti i dati. (Esempio: "Allungamento della molla vs massa, Data: gg/mmm/yyyy")

6. Marcare ogni punto sperimentale nel grafico. Lo stile consigliato è marcare un punto circondato da un piccolo cerchio ($\odot$). Equivalentemente si può usare il segno per ($\times$) o il segno più ($+$).

7. Non unire i punti sperimentali con una linea spezzata. La "spezzata" rende più difficile capire l'andamento generale della relazione fra le due grandezze e inseguendo le fluttuazioni casuali dei dati può indurre a ipotizzare andamenti inesistenti.

8. Nel caso molto comune in cui si ipotizzi un andamento lineare fra le grandezze misurate si può utilizzare un righello trasparente per tracciare ad "occhio" una ragionevole retta in modo da lasciare un numero uguale di punti su ciascun lato della linea. Questo modo di procedere per quanto non rigoroso porta spesso ad un risultato molto vicino a quello che si ottiene con più complesse procedure di elaborazione matematica dei dati che saranno spiegate nel seguito.

9. Per determinare la pendenza della linea, scegliere due punti sulla linea i cui valori sono facilmente leggibili e che si estendano per quasi l'intera larghezza del grafico. Questi punti non dovrebbero essere, se non per caso, i punti dei dati sperimentali. Si ricordi che la pendenza ha unità di misura pari al rapporto tra le unità di misura dei due assi.

10. L'incertezza sul valore della pendenza può essere stimata come rapporto tra la maggiore delle incertezze dei due punti finali, e la distanza tra i due punti stessi.

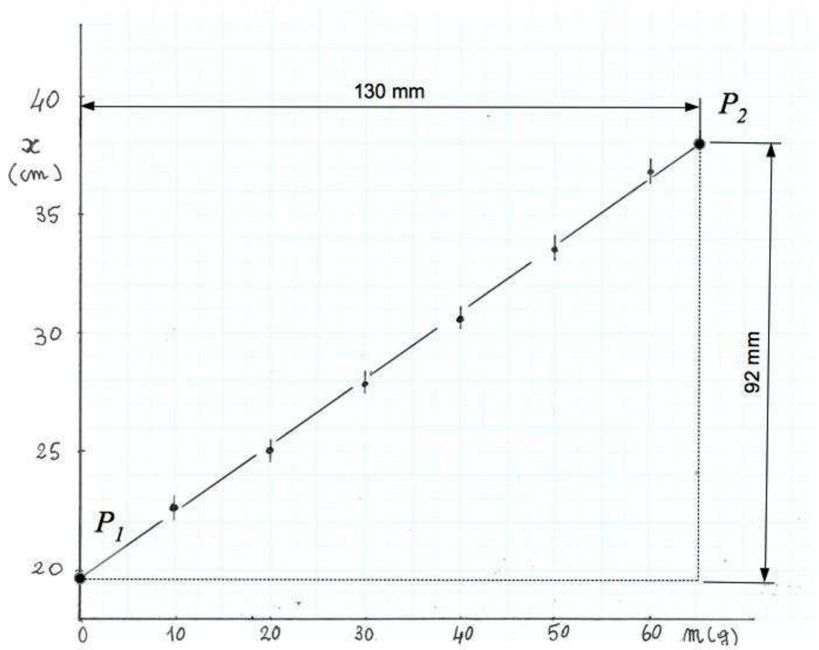


Figura 4.1: Grafico su carta millimetrata lineare fatto a mano con i dati di tabella 4.1. Nel grafico sono indicate le misurazioni sulla retta disegnata effettuate con un righello millimetrato e quindi rapportate alle scale scelte per la valutazione del coefficiente angolare della retta tracciata. Vedi il testo per ulteriori dettagli.

Come applicazione delle regole esposte creiamo un grafico in carta lineare con i dati della tabella 4.1. Nell'asse delle ascisse poniamo il valore della massa applicata alla molla scegliendo una scala in cui 1cm nel grafico corrisponde a 5 g e nell'asse delle ordinate riportiamo l'allungamento scegliendo una scala in cui 1 cm nel grafico corrisponde a 2 cm di allungamento della molla. Nella figura 4.1 sono riportati i punti sperimentali ed è stata tracciata "ad occhio[4]" una retta che approssima i dati. Da questi dati possiamo calcolare la costante elastica (k) della molla. La teoria prevede infatti che per una molla in equilibrio ci sia una relazione lineare tra la forza applicata F (nel nostro caso $F = mg$) e il conseguente allungamento $x - x_o$: $F = k(x - x_o)$ con k *costante della molla* e x_o lunghezza della molla a riposo. La retta disegnata descrive la dipendenza dell'allungamento in funzione della massa applicata: $x = (g/k)m + x_o$. Per il calcolo di k dal grafico scegliamo due punti P_1 e P_2 e misuriamo il coefficiente angolare della retta che è dato da:

$$\text{coeff. angolare} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{9.4\text{cm}\, C_x}{13.0\text{cm}\, C_m} = 0.723 \frac{C_x}{C_m}$$

dove C_m e C_x sono fattori di conversione; il primo trasforma i centimetri misurati nell'asse delle ascisse in kg il secondo trasforma i centimetri misurati nell'asse delle ordinate nell'allungamento espresso in metri. Dai dati sulle le scale delle ascisse e delle ordinate è facile calcolare i valori di C_m e di C_x:

$$C_m = 5 \frac{\text{g}}{\text{cm}} 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{g}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}, \qquad C_x = 2 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{cm}} = 0.02 \frac{\text{m}}{\text{cm}}$$

Ricordando che il coefficiente angolare della retta è uguale a g/k si ha:

$$k = \frac{g}{0.732} \frac{C_m}{C_x} = \frac{9.81 \times 5 \cdot 10^{-3}}{0.723 \times 0.02} = 3.39 \text{ kg s}^{-2}$$

Si lascia al lettore come facile esercizio la stima del valore di x_o.

Linearizzazione. Come mostrato anche nel precedente esempio l'uso dei grafici evidenzia facilmente una dipendenza lineare tra le grandezze fisiche riportate sugli assi per cui, come già notato nel punto 7 del paragrafo precedente, alle volte è opportuno *linearizzare* la relazione matematica che descrive i dati. Cosicché se dovessimo riportare su di un grafico una relazione matematica tra spazio e tempo in un moto uniformemente accelerato, descritta dall'equazione $s = (1/2)at^2$, potremo riportare nell'asse delle ascisse i valori di t^2 e su quelle delle ordinate i valori di s. In questo modo si ottiene una dipendenza lineare tra le variabili s e t^2 il cui coefficiente angolare è $a/2$. Operando in questo modo diremo che abbiamo linearizzato la relazione studiata.

4.1.2 Grafici Logaritmici

Nello studio delle grandezze fisiche oltre ai grafici lineari sono molto utilizzati per vari scopi i grafici logaritmici. I grafici logaritmici permettono di linearizzare certe classi di funzioni molto utilizzate nella descrizione di fenomeni fisici, e inoltre comprimono la scala permettendo di concentrare in uno stesso grafico diversi ordini di grandezza di una variabile.

[4] Esistono tecniche matematiche che permettono di trovare la *retta migliore* che approssima i dati sperimentali come vedremo nei prossimi capitoli. Tracciare una retta ad occhio potrebbe sembrare una procedura arbitraria e imprecisa, tuttavia se tracciata con attenzione la retta a mano differisce di poco da quella che si ottiene dal calcolo matematico

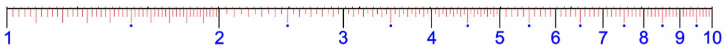


Figura 4.2: Scala logaritmica

Una scala logaritmica è un asse sul quale sono riportati segmenti di lunghezza proporzionale al logaritmo dei numeri rappresentati. Di solito gli interi sono indicati sulla scala come mostrato nella figura 4.2. Fissata la base a del logaritmo, al numero 1 corrisponde un segmento di lunghezza nulla, ovvero l'origine dell'asse logaritmico; al numero 2 corrisponde un segmento di lunghezza $\log_a 2$, al numero 10 corrisponde un segmento $\log_a 10$, al numero 100 corrisponde un segmento di lunghezza $\log_a 100 = 2\log_a 10$, al numero 20 corrisponde un segmento di lunghezza $\log_a 20 = \log_a 2 + \log_a 10$, e così via. Si noti che, poiché $\log_a 10^n = n \log_a 10$, la lunghezza del segmento che rappresenta una "decade", da 1 a 10 , da 10 a 100, da 100 a 1000,... ha sempre la stessa lunghezza. Questa lunghezza è "1" se la base del logaritmo è 10.

La scelta della base del logaritmo corrisponde ad un semplice fattore di proporzionalità della scala, infatti, utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \log_b x = \text{cost } \log_b x$$

Esistono due tipi di grafici bidimensionali che utilizzano scale logaritmiche *i*) i grafici di tipo

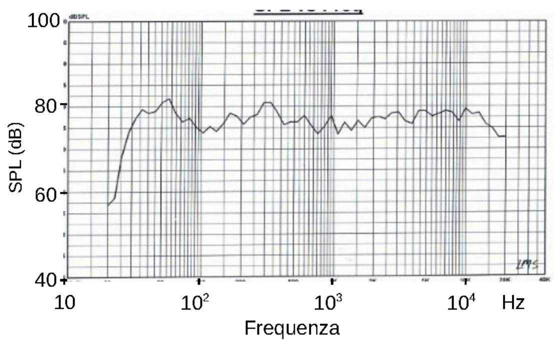


Figura 4.3: Esempio di grafico semi-log che mostra la SPL, misura dell'intensità sonora di un altoparlante, in funzione della frequenza nell'intervallo 10 Hz – 40 kHz. Si noti che l'uso della scala logaritmica permette di rappresentare nell'asse delle ascisse tre ordini di grandezza.

semi-logaritmico che presentano un asse lineare e un asse logaritmico e *ii*) i grafici di tipo doppio-logaritmico con entrambi gli assi logaritmici. Esistono in commercio diversi tipi di carte millimetrate sia semi-log che doppio-log prestampate con i vari numeri di decadi anche se oggi il loro utilizzo è stato soppiantato dalla grafica computerizzata. Esaminiamo ora in dettaglio le caratteristiche di questi due tipi di grafici.

Grafico semi-logaritmico. In un grafico semi-logaritmico (alle volte abbreviato in semi-log) l'asse con scala logaritmica può essere quello delle ascisse o quello delle ordinate; è nel primo caso il grafico è tipicamente utilizzato per comprimere la scala in modo da contenere vari ordini di grandezza come ad esempio è mostrato nella figura 4.3 .

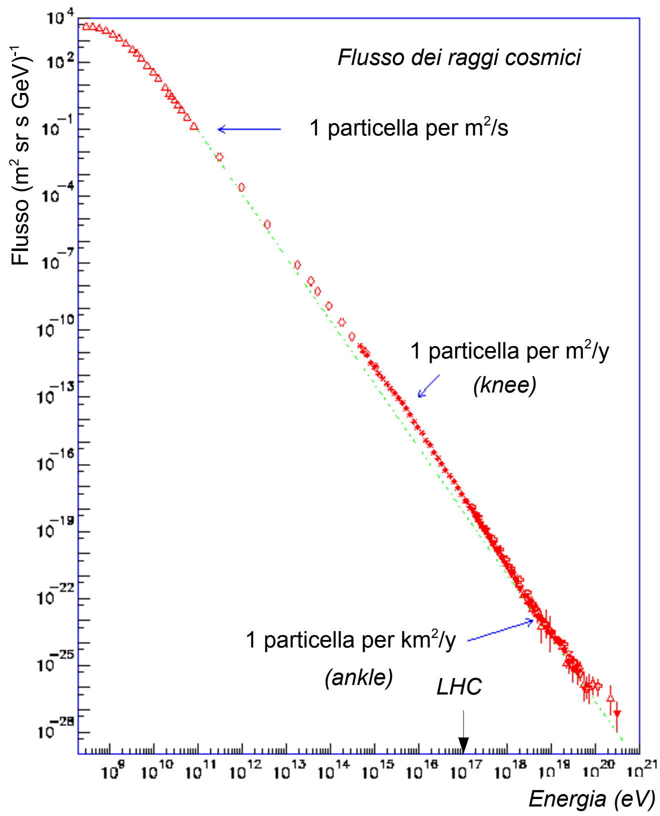


Figura 4.4: Questo grafico illustra come la scala logaritmica metta in evidenza strutture dei dati che l'uso di una scala lineare non sarebbe in grado di mostrare. Questo grafico, noto come *"All particle spectrum*, rappresenta il numero dei raggi cosmici che colpiscono l'atmosfera terrestre per unità di superficie, di angolo solido, di tempo e di energia in funzione dell'energia.

Il grafico semi-log con l'asse delle ordinate ha, oltre all'utile proprietà di comprimere la scala come è mostrato ad esempio nella figura 4.4, la proprietà di *linearizzare gli andamenti esponenziali* del tipo $y = C\mathrm{e}^{kx}$ dove C e k sono delle costanti[5]. Infatti prendendo il logaritmo in una generica base a di entrambi i membri di questa equazione si ha

$$\log_a y = \log_a C\mathrm{e}^{kx} = kx \log_a \mathrm{e} + \log_a C \tag{4.1}$$

Questa equazione mostra che il logaritmo di y è legato a x da una relazione lineare e quindi il grafico della (4.1) eseguito in carta in cui l'asse delle ordinate è logaritmico avrà un andamento rettilineo come mostrato nella figura 4.5 *b*). Il coefficiente angolare di questa retta è $(k \log_a \mathrm{e})$ e la sua intercetta $\log_a C$. Supponiamo ora di avere tracciato una retta in una carta semi-log, come quella di figura 4.5*b*), e di volere valutare dal grafico i parametri k e C. Sia inoltre 10 la base del logaritmo della scala come accade per tutte le carte millimetrate commerciali. Per valutare k si può procedere in due modi: per via algebrica o per via grafica.

Via algebrica. Si scelgono due punti, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sulla retta quanto più possible lontani tra loro per minimizzare le incertezze relative di di lettura e si ricava il parametro k

[5]Si noti che se x è una grandezza fisica con le sue dimensioni, la costante k deve avere le dimensioni inverse per quanto detto nel paragrafo 1.8.2

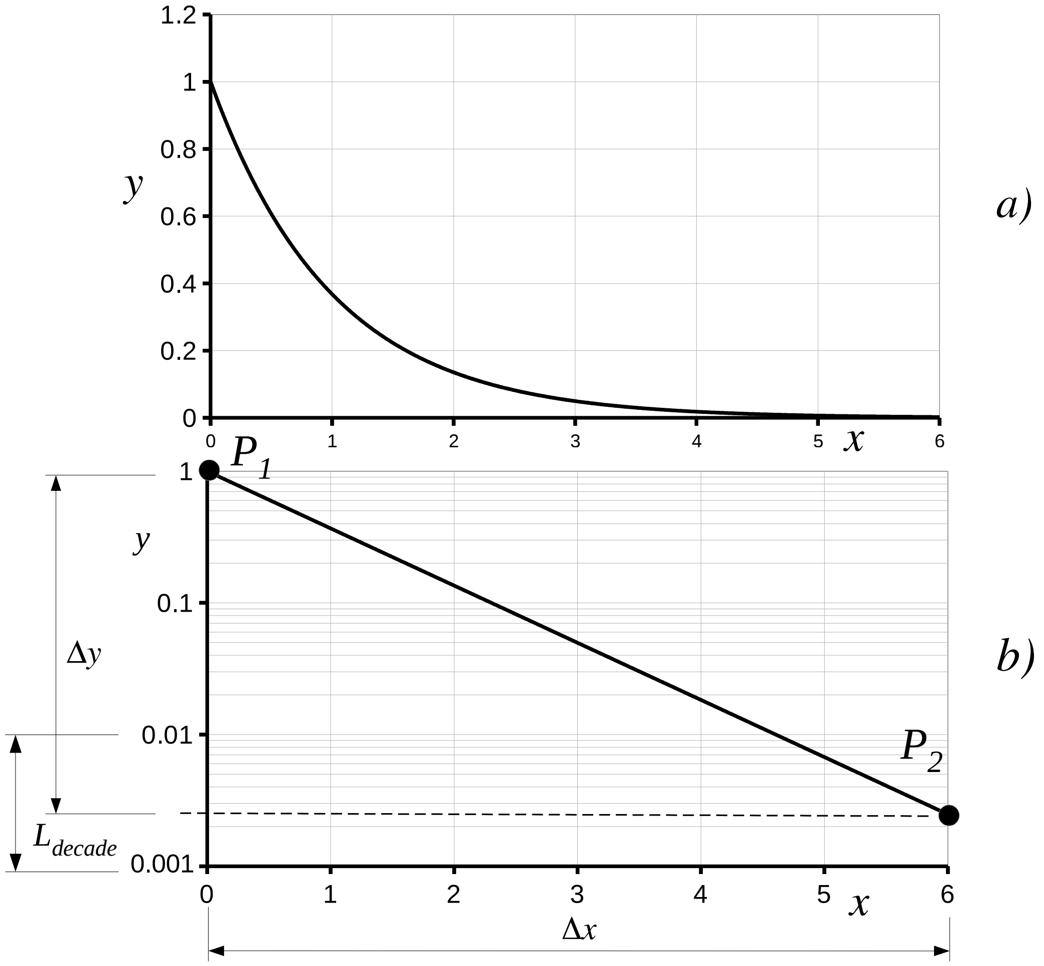


Figura 4.5: Grafico della funzione $y = \mathrm{e}^{-kx}$ (con $k = 1$) in scala lineare nel grafico *a*) e in scala semi-logaritmica nel grafico *b*). Nel grafico in carta semi-log, *b*), sono mostrate le misurazioni da eseguire (le lunghezze Δx e Δy) per stimare graficamente il parametro k che appare nella definizione della funzione. Vedi il testo per i dettagli.

come:

$$k = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

si noti che i logaritmi delle ordinate y_1 e y_2 sono naturali!

Via grafica. Per via grafica, si deve misurare con un righello la distanza Δy in millimetri (vedi la figura 4.5) e rapportala all'unità di misura scelta (tipicamente si sceglie la lunghezza in millimetri di una decade L_{Decade}). Questa misura è la differenza dei logaritmi nella base scelta. In formule:

$$k = \frac{\Delta y}{L_{Decade}} \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} \ln 10$$

Una volta stimato k è facile ottenere il valore di C considerando un qualsiasi punto che appartiene alla retta ad esempio P_1. Per definizione $y_1 = C\mathrm{e}^{-kx_1}$, da cui isolando C, si ha $C = y_1 \mathrm{e}^{kx_1}$.

Esercizio. Tracciare su un foglio di carta semi-log a tre decadi la retta che descrive la funzione $y(x) = C\mathrm{e}^{-kx}$ con $k = 1$ e $C = 1$. Allo scopo impostare la scala dell'asse lineare, quello delle x, da 0 a 6 unità[6]; scegliere l'unità della x pari a 2 cm. Con l'uso di una calcolatrice trovare i valori di y corrispondenti ad almeno due valori di x (tre o quattro è la scelta migliore). Tracciata la retta applicare i metodi descritti (algebrico e grafico) per la stima del parametro k. Stimare infine C.

Grafico doppio-logaritmico. I grafici doppio-logaritmici (abbreviato in doppio-log) hanno scale logaritmiche sia nelle ascisse sia nelle ordinate. La particolarità dei grafici doppio-log è che una retta tracciata in questo grafico rappresenta una legge di potenza; infatti consideriamo la funzione:

$$y = Ax^{\alpha} \tag{4.2}$$

prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ha

$$\log y = \alpha \log x + \log A \tag{4.3}$$

Questa relazione rappresenta una retta nelle variabili $(\log y)$ e $(\log x)$ con coefficiente angolare α e intercetta $\log A$. Si noti che il coefficiente angolare di questa retta è l'esponente della variabile x nella (4.2). Per la valutazione dei parametri α e A si usa lo stesso procedimento illustrato nel paragrafo precedente per la scala logaritmica nei grafici semi-logaritmici. Come esempio dell'uso di un grafico doppio-logaritmico per verificare la veridicità di una legge fisica prendiamo in considerazione la terza legge di Keplero applicata ai dati del nostro sistema solare planetario. La terza legge di Keplero dice che il quadrato del periodo orbitale di un pianeta T è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole R. In formule

$$T^2 \propto R^3 \qquad \text{oppure, isolando } R: \quad R \propto T^{2/3} = T^{0.66} \tag{4.4}$$

La relazione (4.4) è una legge di potenza del tipo (4.2) per cui in un grafico doppio-log i dati di periodo e distanza media dal sole dei pianeti si dovrebbero allineare per conferemare la terza legge di Keplero. In tabella 4.2 sono riportati i dati planetari presi da sito della NASA. L'ispezione dei dati in tabella indica che nell'asse delle ascisse, dove metteremo il

Tabella 4.2: Periodo di rivoluzione in anni (y) e distanza media dal sole in AU (Astronomic Units) dei pianeti del sistema solare (dati NASA).

Pianeta	Periodo T (y)	R (AU)
Mercurio	0.2411	0.387
Venere	0.6156	0.723
Terra	1.001	1.00
Marte	1.882	1.52
Giove	11.87	5.21
Saturno	29.44	9.58
Urano	83.81	19.20
Nettuno	163.8	30.05
Plutone	248.1	39.48

[6] Le scale lineari dei fogli di carta millimetrata commerciali sono lunghi tipicamente 18 cm.

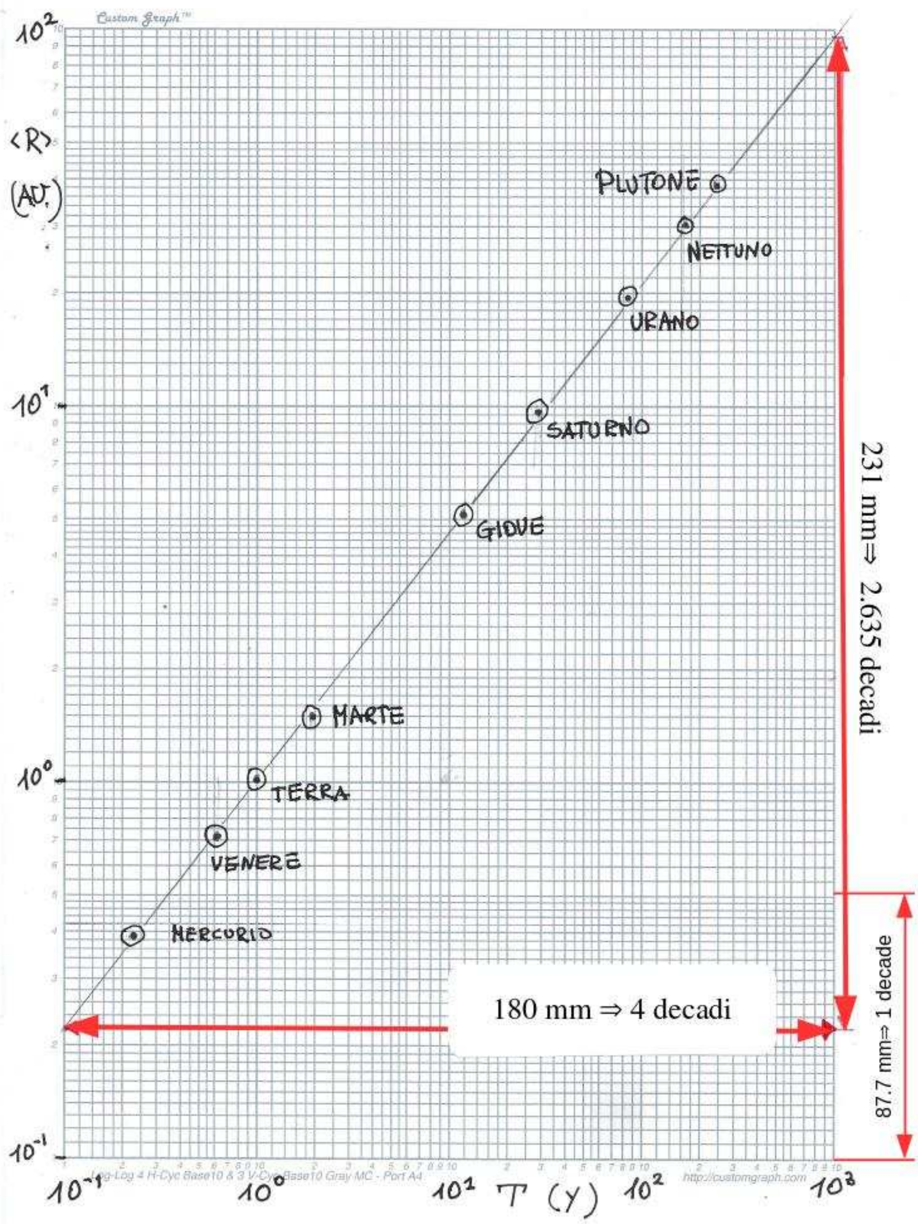


Figura 4.6: Grafico doppio-log che mostra la verifica della terza legge di Keplero con i dati del sistema solare (vedi testo).

periodo T ci devono essere almeno 4 decadi e nell'asse delle ordinate almeno tre decadi se desideriamo che tutti i punti sperimentali stiano nel grafico. Fissato il numero di decadi per il grafico doppio-log[7] con il criterio appena esposto, si riportano i punti sperimentali sul grafico e quindi si traccia una retta cercando di farla passare, per quanto possibile, per tutti i punti sperimentali come mostrato ad esempio nella figura 4.6. Per misurare nel modo

[7]E' possibile scaricare dalla rete carte millimetrate lineari, logaritmiche e doppio logaritmiche scegliendo il numero di decadi desiderate nei due assi

migliore[8] i parametri della retta disegnata è opportuno prolungarla attraverso tutto il foglio. La misurazione dell'inclinazione della retta disegnata nel grafico è stato ottenuta per via grafica (vedi il paragrafo 4.1.2) con il seguente risultato:

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.635 \text{ decadi}}{4.0 \text{ decadi}} = 0.66$$

valore in ottimo accordo con quello previsto la terza legge di Keplero.

4.1.3 Altri tipi di grafico – Grafici polari

Le funzioni che dipendono da un angolo piano possono essere rappresentate anche in modo polare. Questa modalità si basa sul sistema di coordinate polari del piano in cui ogni punto P del piano è identificato dalla sua distanza r da un punto O, detto polo, e dall'angolo θ tra il segmento $\overline{OP}$ e una prefissata semiretta uscente dal polo O, asse del sistema. Il grafico polare della funzione $r = f(\theta)$ si ottiene tracciando sulla semiretta uscente dal polo con un angolo θ rispetto all'asse, un punto ad una distanza dal polo proporzionale a r. Come esempio di un grafico polare consideriamo la gittata R di un proiettile che parta con velocità in modulo pari a v_o in funzione di θ, angolo di tiro o "alzo". E' un facile esercizio di meccanica arrivare alla relazione $R(\theta) = 2v_o^2 \sin 2\theta / g$. Il grafico polare di R in funzione di θ è mostrato nella figura 4.7.

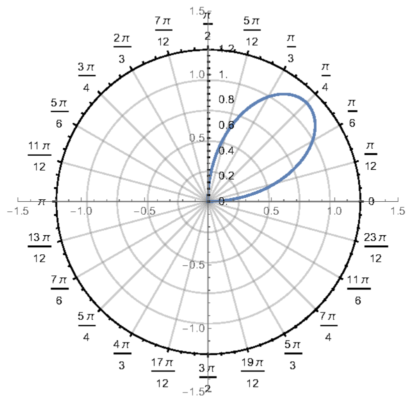


Figura 4.7: Esempio di grafico polare. Il grafico mostra l'andamento della gittata di un proiettile che parte con velocità in modulo costante in funzione dell'angolo di "alzo" , limitato nell'intervallo $[0, \pi/2]$. Per questo grafico si è scelto $v_o = 7.5\,\text{ms}^{-1}$ Come è noto e come si deduce dal grafico, la massima gittata si ottiene per $\theta = \pi/4$.

4.1.4 Istogrammi

Le rappresentazioni grafiche illustrate nei paragrafi precedenti sono utilizzate nello studio di dipendenze funzionali di una grandezza in funzione di un'altra come ad esempio è rappresentato nelle figure 4.1, 4.5 e 4.6.

Nelle misurazioni ripetute di una grandezza fisica continua, come quella citata nell'esempio 1 del paragrafo 3.6.1 oppure quella mostrata nella figura 3.1, l'intento non è quello di evidenziare una dipendenza funzionale (anche perché tipicamente si misura una sola grandezza) ma di studiare come i valori misurati si distribuiscono e attorno a quali valori si

[8] Maggiore è la lunghezza che si misura, minore è l'incertezza relativa della misura ottenuta.

addensano. Per analizzare graficamente queste caratteristiche si utilizza l'istogramma. Il primo passo nella costruzione di un istogramma è quello di dividere l'intervallo di variabilità della grandezza di cui si vuole l'istogramma in un certo numero di sotto-intervalli, detti classi o "*bin*", usualmente consecutivi e della stessa ampiezza[9]. Da un punto di vista più formale possiamo dire che l'istogramma è una rappresentazione grafica della distribuzione di dati numerici continui divisi in classi (*bin*). L'istogramma appare come una successione di rettangoli contigui che hanno come base l'ampiezza del *bin* e un altezza proporzionale al numero di volte che il valore della grandezza è compreso tra i limiti del *bin*. Un criterio per la definizione dell'ampiezza dei *bin* è che ogni bin contenga un numero *congruo* di eventi. Come esempio supponiamo di avere ottenuto le seguenti $N = 20$ misure di una grandezza fisica (nelle opportune unità di misura): $2.36, 4.34, 2.03, 3.71, 4.28, 4.42, 3.75, 6.71, 6.53, 4.21, 6.98, 7.00, 0.87, 3.61, 5.31, 4.16, 7.31, 8.07, 5.78, 4.24$, e di volere analizzare graficamente come queste misure si distribuiscono. Come abbiamo già detto, iniziamo con il dividere l'intervallo di variabilità della grandezza in esame in *bin*. Una possibile scelta è quella di avere 9 *bin* tra i valori minimo e massimo delle misure, entrambi approssimati a valori ragionevolmente interizzati della grandezza. Il minimo è $x_{min} = 0.87$ approssimato a 0.0, il massimo è $x_{max} = 8.07$ approssimato a 9.0, ne segue che la larghezza del *bin* è $(9-0)/9 = 1$, misurato nelle stesse unità di x. Il passo successivo consiste nel contare il numero di volte che i valori sono contenuti in ognuno dei *bin* e riportare questo numero come altezza del corrispondente rettangolo come mostrato nella figura 4.8.

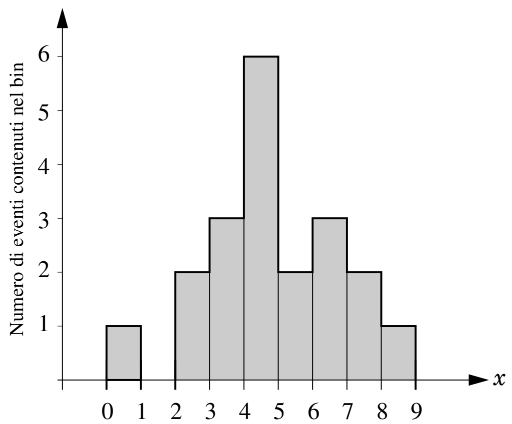


Figura 4.8: Esempio di istogramma dei 20 valori della variabile x indicati nel testo e raggruppati in 9 *bin*

Istogramma delle frequenze. Un altro modo di mostrare il contenuto dei *bin* è quello di dividerlo per il numero totale di eventi contenuti nell'istogramma. In questo caso si parla di istogramma delle frequenze. Se n_i è il contenuto del *bin* i-esimo, l'istogramma delle frequenze nell'i-esimo *bin* avrà il valore n_i/N.

L'espressione di istogramma è spesso riferita anche se in modo improprio a variabili casuali intere per le quali di dovrebbe parlare più correttamente di diagramma a barre. Come ad esempio consideriamo i valori usciti in un certo numero di lanci di un dado, come descritto nel seguente esempio. Lanciamo il dado $N = 200$ volte e annotiamo per ogni lancio il risultato. Contiamo quante volte è uscito 1, quante volte 2, . . . , quante volte 6. Riportiamo

[9] La uguale dimensione dei *bin* non è obbligatoria anzi in certe circostanze, come vedremo nel seguito, è necessario utilizzare *bin* di dimensione differente

questi conteggi ottenuti nell'asse delle ordinate disegnando una barra di altezza proporzionale al conteggio ottenuto, come mostrato nella figura 4.9. In questo modo abbiamo ottenuto l'istogramma o meglio il diagramma a barre degli N valori della variabile aleatoria "numero

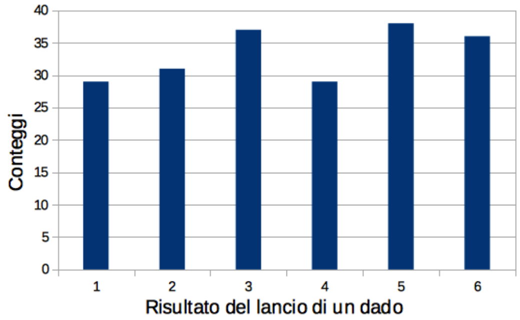


Figura 4.9: Istogramma, o più correttamente diagramma a barre, dei numeri usciti in una serie di 200 lanci di un dado. Nell'asse delle ordinate "Conteggi" indica il numero delle volte che il numero indicato nelle ascisse è uscito nella serie dei 200 lanci.

uscito nel lancio del dado".

Sottolineiamo l'importanza dell'istogramma come strumento fondamentale per l'analisi dei dati di fisica; infatti anche attualmente importanti risultati di fisica sono annunciati mostrando degli istogrammi, come è accaduto quando è stata resa nota la notizia della scoperta del bosone di Higgs.