

## Appendice D

# I conteggi in fisica

Il conteggio di eventi è un'importante modalità di indagine delle leggi che governano alcuni fenomeni fisici. In un esperimento di conteggio si raccolgono e analizzano i numeri di eventi registrati dai *contatori*<sup>1</sup> usati nell'esperimento. I conteggi ottenuti nell'esperimento derivano dalle distribuzioni di probabilità delle grandezze fisiche misurate e dall'analisi delle distribuzioni è possibile stimare il valore dei parametri fisici di interesse. Gli esperimenti di conteggio sono utilizzati in particolare nello studio di fenomeni di fisica atomica, fisica nucleare e fisica delle particelle elementari, campi della fisica in cui a molte grandezze non si possono assegnare valori deterministici ma solo distribuzioni di probabilità.

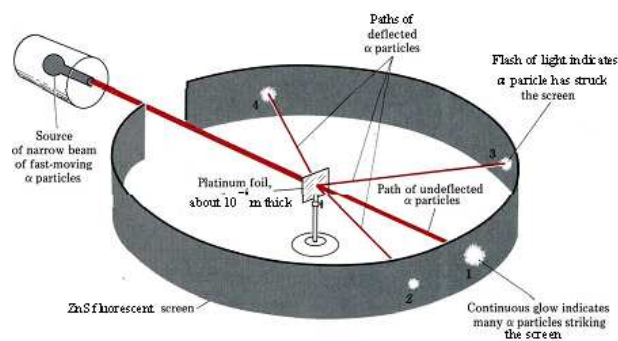


Figura D.1: Schema di un esperimento simile a quello di Geiger e Marsden. In particolare nell'esperimento mostrato il bersaglio è formato da una foglio di platino al posto di quello d'oro usato da Geiger e Marsden.

### D.1 Urti di particelle

L'urto fra particelle è la modalità standard con cui si eseguono esperimenti nella fisica delle particelle elementari. Le grandezze che definiscono lo stato finale delle particelle (dopo l'urto) sono variabili aleatorie con una loro distribuzione di probabilità. Un esempio, tra i tanti che si potrebbero fare, è il famoso esperimento di Geiger e Marsden (anche detto esperimento di Rutherford) con il quale si è iniziato ad comprendere la struttura degli atomi. Questo esperimento, probabilmente il primo esperimento della storia in cui si studia l'urto di due particelle per indagarne la struttura, consiste in una sorgente radioattiva  $\alpha$  che fornisce il fascio incidente e in una sottile foglia d'oro, i cui atomi sono il bersaglio delle particelle  $\alpha$

<sup>1</sup>Qui con "contatore" si intende uno strumento di misura. Vedi il paragrafo 2.4.

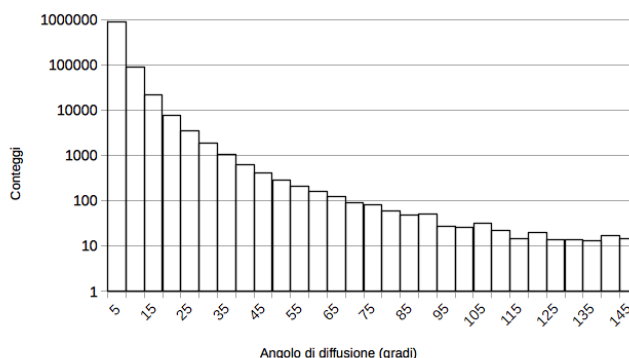


Figura D.2: Esempio di distribuzione angolare dovuta a diffusione Rutherford

emesse dalla sorgente. Nella figura D.1) è riportato uno schema dell'esperimento di Geiger e Marsden.

Le particelle  $\alpha$  del fascio interagendo<sup>2</sup> con i nuclei atomici degli atomi d'oro vengono deviate dal loro percorso e vanno ad urtare uno schermo di materiale fosforescente emettendo nell'urto un lampo di luce. Tutti i componenti di questo apparato sperimentale devono essere sotto vuoto per evitare che le particelle  $\alpha$  siano rallentate e fermate dall'aria. Contando il numero di lampi che si hanno ai vari angoli di deviazione  $\theta$  in un fissato intervallo di tempo si ottiene un istogramma come quello mostrato nella figura D.2 che descrive come si distribuiscono le particelle  $\alpha$  dopo l'urto con gli atomi della fogliolina d'oro. Questa distribuzione è determinata dalla probabilità che una particella  $\alpha$  sia deviata di un certo angolo ( $\theta$ ) nell'urto. L'istogramma della figura D.2 può essere interpretato come una distribuzione multinomiale e, come si può dimostrare facilmente, il contenuto di ciascuno dei *bin* dell'istogramma è una variabile aleatoria binomiale. Il valore atteso ( $\mu_i$ ) e la varianza ( $\sigma_i^2$ ) di ciascuno dei *bin* sono:

$$\mu_i = N \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} f(\theta) d\theta, \quad \sigma_i^2 = N\mu_i(1 - \mu_i)$$

dove  $f(\theta)$  è la distribuzione angolare e  $N$  è il numero totale degli eventi.

Geiger e Marsden confrontando i dati sperimentali della distribuzione angolare con la formula di Rutherford furono in grado di comprendere la struttura dell'atomo [5]. Infatti ai dati sperimentali si adatta un andamento, derivato da quello di Rutherford, del tipo:

$$f(\theta) \propto \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

che descrive la distribuzione angolare di particelle cariche puntiformi che urtano.

ESERCIZIO Si lascia come esercizio quello di applicare il metodo dei minimi quadrati per trovare la costante  $K$  che adatta la funzione

$$f(\theta) = \frac{K}{\sin^4(\theta/2)}$$

ai dati della tabella D.1 (graficati nell'istogramma D.2) e successivamente quello di applicare il test del  $\chi^2$  di Pearson per verificare la *bontà del fit* ottenuto.

<sup>2</sup>In questo caso l'urto è un'interazione elettromagnetica tra la carica delle particelle  $\alpha$  e la carica dei nuclei degli atomi di oro. Gli elettroni degli atomi d'oro giocano un ruolo marginale in questa interazione.

Tabella D.1: Esperimento di Geiger-Marsden. Dati di diffusione angolare in bin di ampiezza di  $5^\circ$  tra  $5^\circ$  e  $150^\circ$ . Il valore dell'angolo che appare in tabella è l'estremo inferiore del bin cui si riferisce.

angolo ( $^\circ$ )	conteggi	angolo ( $^\circ$ )	conteggi	angolo ( $^\circ$ )	conteggi	angolo ( $^\circ$ )	conteggi
5	874104	45	409	85	48	125	14
10	87746	50	291	90	52	130	14
15	21632	55	207	95	28	135	13
20	7849	60	165	100	26	140	17
25	3427	65	124	105	32	145	15
30	1832	70	91	110	22		
35	1041	75	82	115	15		
40	623	80	61	120	20		

## D.2 Decadimenti radioattivi

Si consideri un sistema di particelle di una sostanza radioattiva, e sia  $N_0$  il loro numero all'istante  $t = 0$ . Ognuna delle particelle della sostanza radioattiva ha una probabilità  $\lambda$  di decadere nell'unità di tempo indipendentemente da tutte le altre. Nell'istante in cui la particella decade essa scompare e il numero delle particelle radioattive diminuisce di una unità. Ci chiediamo quante particelle restano dopo un intervallo di tempo  $t$ ?

Osservando che tipicamente il numero di particelle considerate è decisamente grande (dell'ordine del numero di Avogadro), possiamo approssimare questo numero con una variabile continua e quindi siamo autorizzati a servirci del calcolo differenziale. In formule, se  $N(t)$  è il numero di particelle radioattive all'istante  $t$ , nell'intervallo  $dt$  decadranno, in media,  $\lambda N(t) dt$  particelle, valore che è pari alla diminuzione del numero di quelle che non sono ancora decadute ( $-dN$ ). Potremo allora scrivere:

$$dN = -\lambda N dt \quad \text{ovvero} \quad \frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \text{o ancora} \quad d(\ln N) = -\lambda dt$$

Integrando

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t, \quad \ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

infine:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (\text{D.1})$$

Questa è la *legge esponenziale del decadimento radioattivo* da cui si ricava che il numero medio delle particelle di una sostanza radioattiva che non sono decadute (sono sopravvissute) al tempo  $t$  ha una distribuzione esponenziale.

La legge esponenziale (D.1) può essere interpretata come la probabilità di decadimento di una singola particella radioattiva di decadere nell'intervallo di tempo  $dt$  attorno al tempo  $t$ . Indicando con  $p(t)$  questa distribuzione, tenendo conto che deve essere normalizzata, si ottiene:

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \left( \text{infatti} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 \right) \quad (\text{D.2})$$

**Vita media.** Si definisce *vita media* della particella radioattiva e tipicamente si indica con  $\tau$ , la grandezza:

$$\tau = \int_0^\infty t p(t) dt = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{D.3})$$

**Tempo di dimezzamento.** Un altro parametro molto usato in radioattività è il tempo di dimezzamento  $T_{1/2}$  definito come la mediana (vedi pagina 81) della distribuzione (D.1). Il tempo di dimezzamento è il tempo occorrente per ridurre del 50% il numero delle particelle radioattive. È facile dimostrare che:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2$$

**Attività.** Una grandezza importante nello studio della radioattività è la cosiddetta *attività* che indica il numero di decadimenti di una data sorgente nell'unità di tempo e si misura in numero di decadimenti al secondo. Il numero dei decadimenti,  $\Delta N$ , osservati nell'intervallo di tempo  $t, t + \Delta t$  si ottiene dalla (D.1) come:

$$\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t) = N_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

Passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  otteniamo l'attività della sorgente al tempo  $t$ : la seguente espressione:

$$\mathcal{A}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta N}{\Delta t} \right| = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = N(t) \lambda$$

Ne segue perciò che l'attività di una sorgente diminuisce nel tempo seguendo una legge esponenziale analoga a quella del numero delle particelle non ancora decadute (D.1).

### D.3 Statistica dei decadimenti radioattivi

Consideriamo una sostanza radioattiva che, al tempo  $t = 0$ , consista di  $N_0$  particelle instabili. Sia  $\tau = 1/\lambda$  la vita media della singola particella. Fissato un intervallo temporale  $\Delta t$  la probabilità che una certa particella decada in questo intervallo temporale è  $1 - e^{-\lambda \Delta t}$ . Indicando come evento favorevole il decadimento di una particella, il numero  $N(\Delta t)$  delle particelle decadute in  $\Delta t$ , delle  $N_0$  iniziali, è una variabile aleatoria che segue una distribuzione binomiale con  $p = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$ :

$$P(N(\Delta t)) = \binom{N_0}{N(t)} (1 - e^{-\lambda \Delta t})^N e^{-\lambda \Delta t}$$

Se come accade nella pratica  $N_0$  è un numero molto grande (dell'ordine del numero di Avogadro) e la probabilità di decadimento della singola particella  $(1 - e^{-\lambda \Delta t})$  sufficientemente piccola in modo tale che  $N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}) \simeq N_0 \lambda \Delta t$  sia finito, la distribuzione binomiale si approssima con una distribuzione di Poisson

$$P(N(\Delta t)) = \frac{\mu^N}{N!} e^{-\mu}$$

dove  $\mu = N_0 \lambda \Delta t$  è il numero medio delle particelle che decadono in  $\Delta t$ . Al crescere del numero medio  $\mu$  la distribuzione di Poisson converge verso la gaussiana di espressione:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-(N-\mu)^2/2\mu}$$

La convergenza della poissoniana verso la gaussiana è *precoce* e già per  $\mu = 6$  si può utilizzare la formula della gaussiana per il calcolo dei valori delle probabilità in luogo della poissoniana.

**Esecizio.** Una contatore di radiazione è posto a 1 m da una sorgente radioattiva. La superficie sensibile del contatore è di  $20 \text{ cm}^2$  e la sua efficienza è del 95%. Se in 13 min si ottengono 49 conteggi, stimare l'attività della sorgente.

### D.3.1 Assorbimento di radiazione

Il fenomeno fisico dell'assorbimento da parte della materia dei raggi gamma (un tipo di radiazione ionizzante) fornisce un altro esempio di applicazione della distribuzione esponenziale e l'utilizzo di contatori per la misurazione dell'intensità di questa radiazione implica l'uso della distribuzioni di Poisson per l'analisi statistica dei dati acquisiti.

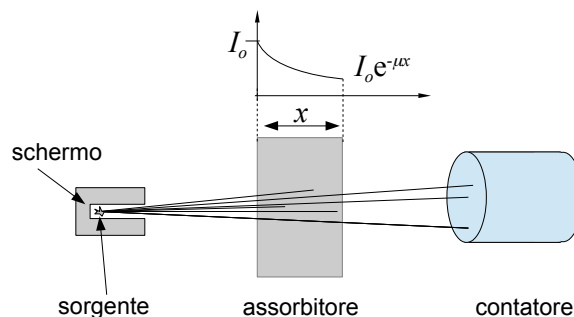


Figura D.3: Schema di un esperimento per misurare l'assorbimento della radiazione di un materiale.

Sperimentalmente si osserva che interponendo uno spessore di materia (l'assorbitore) di spessore  $x$  tra una sorgente di raggi gamma e un contatore (vedi la figura D.3), l'intensità della radiazione, ovvero il numero medio di conteggi nell'unità di tempo, misurata dal contatore diminuisce in modo esponenziale secondo la legge

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (\text{D.4})$$

dove  $I_0$  è l'intensità misurata senza l'assorbitore e  $\mu$  è un parametro detto coefficiente di attenuazione, che dipende dalla materia interposta tra sorgente e contatore. Lo schema dell'esperimento mostrato nella figura D.3 è quello tipicamente utilizzato per la misurazione del coefficiente di attenuazione di radiazione.

**ESEMPIO.** Supponiamo di volere misurare il coefficiente di assorbimento di un certo materiale per i raggi gamma di una sorgente radioattiva che supponiamo di intensità costante durante l'esperimento. La situazione sperimentale è quella mostrata nella figura D.3. Si hanno a disposizione 5 spessori dello stesso materiale (compreso lo spessore nullo) i cui valori, con incertezze trascurabili, sono elencati nella tabella D.2. Per ogni spessore (compreso quello nullo) si acquisiscono dati per un certo intervallo di tempo  $\Delta t_i$ ; conteggi e i tempi di acquisizione sono mostrati nella tabella D.2. L'analisi dei dati consisterà nel fare un fit dopo avere linearizzato il modello dato dalla equazione (D.4). Per chiarire la procedura creiamo una nuova tabella, la D.3, in cui a sinistra della doppia riga verticale si ripetono i dati della tabella D.2 mentre a destra si inseriscono le colonne con i calcoli dell'analisi. Come prima operazione calcoliamo le incertezze sui conteggi che essendo decadimenti radioattivi rispettano la statistica di Poisson e sono quindi pari alla radice quadrata dei conteggi. Per confrontare tra loro le misurazioni che sono state eseguite con durate differenti calcoliamo i conteggi per secondo inserendoli nella colonna successiva. Per poter eseguire un fit lineare calcoliamo il logaritmo naturale dei conteggi al secondo ottenuti (colonna 6) con la loro

Tabella D.2: Dati Esperimento misurazione di  $\mu$ 

$x_i$ (cm)	Conteggi	$\Delta t_i$ (s)
0.00	99	100.00
0.50	59	150.00
1.00	31	230.00
1.50	25	420.00
2.00	15	500.00

Tabella D.3: Analisi dei dati Esperimento misurazione di  $\mu$ 

$x_i$ (cm)	Cont.	$\Delta t_i$ (s)	Cont./ $\Delta t_i$ ( $s^{-1}$ )	$u_i$ ( $s^{-1}$ )	$\ln(\text{Cont.}/\Delta t_i)$	$u_{\ln}$	<i>fit</i>
0.00	310	100.00	3.100	0.176	1.131	0.057	1.127
0.50	168	150.00	1.120	0.086	0.113	0.077	0.139
1.00	103	230.00	0.448	0.044	-0.803	0.099	-0.850
1.50	65	420.00	0.155	0.019	-1.866	0.124	-1.839
2.00	35	500.00	0.070	0.012	-2.659	0.169	-2.827

incertezza (colonna 7). Eseguito il fit lineare si ottengono i seguenti risultati: *Intercetta*:  $I_0 = (1.127 \pm 0.052) s^{-1}$ , *Coefficiente angolare*:  $\mu = (-1.977 \pm 0.078) cm^{-1}$ , *Coefficiente di correlazione*:  $\rho = -0.656$ . Infine nella colonna 8 è riportato il risultato del fit lineare ottenuto. Il calcolo del  $\chi^2$  del *fit* dà come risultato  $\chi^2 = 1.37$ , che con 3 gradi di libertà corrisponde ad

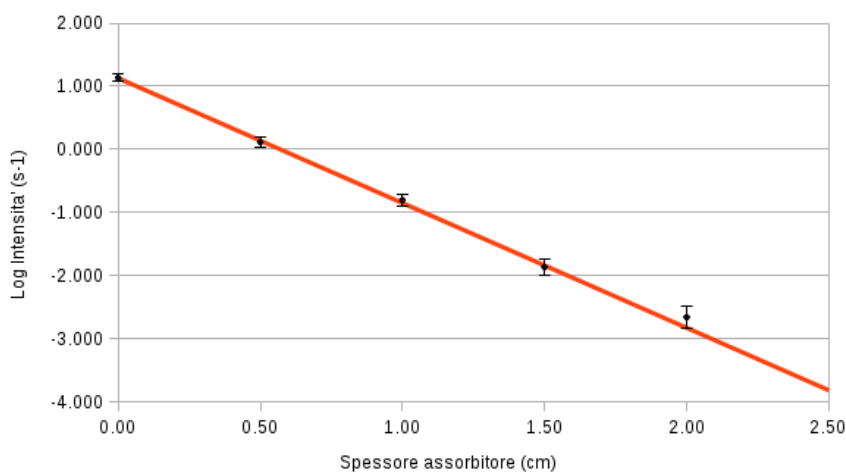


Figura D.4: Grafico del logaritmo dell'intensità verso lo spessore dell'assorbitore

un  $\chi^2$  ridotto pari a  $\tilde{\chi}^2 = 0.46$ ; dalle tabelle si ricava una probabilità  $P(\tilde{\chi}^2 > 0.46) \simeq 70\%$  il che conferma la buona qualità del *fit* ottenuto.