

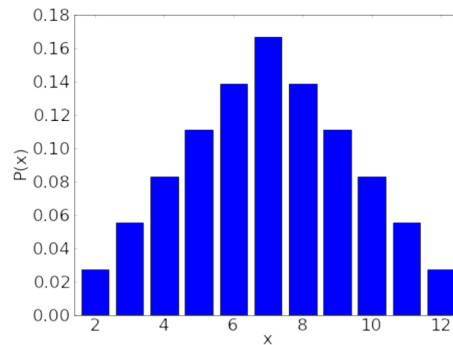


Figura 5.1: Istogramma della Distribuzione della probabilità della variabile aleatoria  $X$ : somma delle uscite di due dadi. Ad ogni valore della variabile corrisponde una barra di altezza proporzionale alla probabilità di uscita della variabile

Riassumendo, per una variabile aleatoria discreta  $X$  che possa assumere valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (eventualmente anche con  $n = \infty$ ) diremo che la sua distribuzione di probabilità è rappresentata dall'insieme dei valori di probabilità  $p_i$  delle  $x_i$ , in formula

$$P(x_i) = p_i \quad (5.8)$$

Se  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  è un insieme completo di eventi mutualmente esclusivi, ovvero la variabile  $X$  non può assumere altri valori oltre a quelli indicati, allora è valida la condizione di normalizzazione:

$$\sum_i p_i = 1$$

### 5.6.1 Distribuzioni di probabilità - Variabili continue

Una variabile continua  $X$  può assumere un'infinità non numerabile di valori  $x$ . Quindi, diversamente da quanto accade per le variabili discrete, la probabilità che una variabile continua assuma esattamente uno specifico valore reale è nulla. Per una variabile continua  $X$  è possibile assegnare una probabilità all'evento *la variabile  $X$  è contenuta nell'intervallo  $x, x + \Delta x$* , che scriveremo  $P(x < X < x + \Delta x)$ . Se l'intervallo  $\Delta x$  è infinitesimo allora anche la probabilità è infinitesima e potremo scrivere  $dP = (dP/dx)dx = f(x)dx$ . La funzione  $f(x)$  è detta **funzione di densità di probabilità**, spesso abbreviata con *pdf*<sup>8</sup>.

**Proprietà della funzione densità di probabilità.** La funzione densità di probabilità gode delle seguenti proprietà

- La funzione densità di probabilità è definita positiva (o nulla) per ogni  $x$  nel dominio di definizione ( $\Omega$ ).

$$f(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega$$

- La funzione densità di probabilità è *normalizzata* ovvero il suo integrale esteso a tutto il dominio di definizione della variabile aleatoria vale 1.

$$\int_{\Omega} f(x)dx = 1$$

<sup>8</sup>L'acronimo deriva dal termine inglese *probability density function*

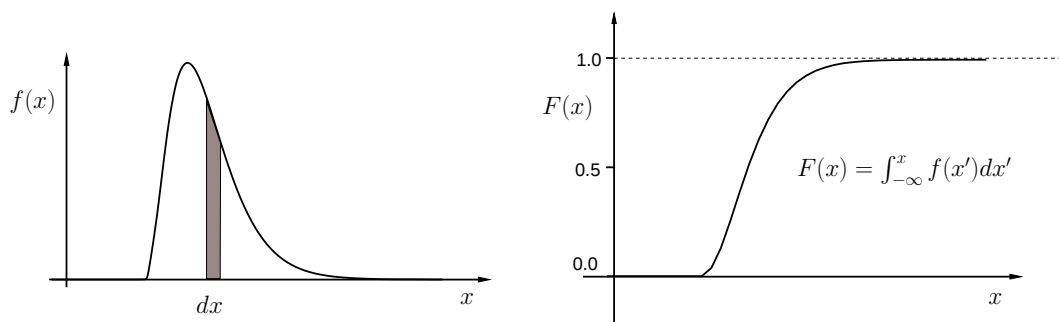


Figura 5.2: Esempio di funzione di distribuzione di densità di probabilità (pdf) per una variabile continua  $x$  (grafico di sinistra). Il grafico di destra è la funzione cumulativa di probabilità relativa alla pdf mostrata a sinistra. Si noti che il valore di  $F(x)$  per  $x \rightarrow \infty$  tende a 1 (certezza).

Oltre alla *pdf* per le variabili aleatorie continue si definisce la *funzione di distribuzione cumulativa*  $F(x)$  definita come la probabilità che la variabile  $x$  assuma un qualsiasi valore minore di un determinato valore  $X$

$$F(x) \equiv P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (5.9)$$

## 5.7 Proprietà delle distribuzioni di probabilità

Le distribuzioni di probabilità sono individuate completamente dalla loro forma matematica, tuttavia possono essere caratterizzate in modo sintetico da un numero limitato di parametri che indicano le loro proprietà essenziali. Tra questi:

1. un parametro che indichi la posizione (il “centro”) della distribuzione (valore medio)
2. un parametro che indichi come i valori si accumulano attorno al centro della distribuzione (varianza)
3. un parametro che sia legato alla simmetria della distribuzione
4. un parametro che sia legato alla forma della distribuzione

Lo strumento matematico che utilizzeremo per ottenere i valori di questi parametri è il *Valore Atteso*. (I parametri 3 e 4 verranno descritti nel paragrafo 5.10).

### 5.7.1 Valore atteso

Consideriamo la variabile aleatoria  $X$ , se supponiamo che sia una variabile discreta assumerà i valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con le probabilità  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , se invece supponiamo che sia continua avrà una *pdf*  $f(x)$ . Sia  $g(X)$  una generica funzione di  $X$ , definiamo valore atteso di  $g(X)$  l'espressione:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i \quad \mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g(x) f(x) dx \quad (5.10)$$

Dove la prima espressione è valida per variabili discrete e la seconda per quelle continue. Una importante proprietà dell'*operatore* valore atteso è la *linearità*. Ovvero se  $g(X)$  e  $h(x)$  sono due generiche funzioni e  $a$  e  $b$  sono due costanti, allora vale la relazione

$$\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a \mathbb{E}[g(X)] + b \mathbb{E}[h(X)]$$

Il valore atteso di una costante è la costante stessa:

$$\mathbb{E}[c] = c \quad (5.11)$$

come si deduce dalla definizione stessa di valore atteso. Come corollario della (5.11) vale la relazione:  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[x]] = \mathbb{E}[x]$ .

### 5.7.2 Valore Medio e Varianza

Un importante caso particolare della (5.10) si ha quando la funzione  $g(x)$  coincide con la variabile stessa ( $g(x) = x$ ). Il valore atteso di  $x$  è detto anche *Valore Medio* della variabile aleatoria  $x$  e spesso è indicato con  $\mu$ . Per distribuzioni di probabilità discrete e continue abbiamo rispettivamente le seguenti definizioni di *Valore Medio*:

$$\mathbb{E}(X) \equiv \mu = \sum_i x_i p_i \quad \mathbb{E}(X) \equiv \mu = \int_{\Omega} x f(x) dx \quad (5.12)$$

Dove, come nella relazione precedente, la prima espressione è valida per variabili discrete e la seconda per quelle continue.

**Varianza.** Il valore atteso dello *scarto quadratico* definito dalla espressione  $(X - \mu)^2$ , è detto *Varianza* ( $\mathbb{V}\text{ar}[X]$  oppure  $\sigma^2$ ).

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[X] &\equiv \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \mathbb{E}[X] + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

In parole: *la varianza della variabile aleatoria  $X$  è pari al valore atteso della variabile al quadrato meno il valore quadrato del suo valore atteso.*

La quantità  $\sigma$ , radice quadrata della varianza, è detta *deviazione standard* della variabile  $X$ .

**Alcune proprietà della varianza.** Dalla definizione (5.13) si deduce che la l'operazione di valutare la varianza non è lineare e in particolare, se  $a$  e  $b$  sono delle costanti, valgono le relazioni

$$\mathbb{V}\text{ar}[aX] = a^2 \mathbb{V}\text{ar}[x] \quad (5.14)$$

e

$$\mathbb{V}\text{ar}[aX + b] = a^2 \mathbb{V}\text{ar}[x] \quad (5.15)$$

Le dimostrazioni sono lasciate come facile esercizio per il lettore.

Il valore medio e la deviazione standard di una distribuzione di probabilità discreta o continua danno due importanti informazioni sulla distribuzione: il valore medio indica genericamente (e generalmente!) la zona dove la probabilità è più grande e la deviazione standard indica quanto è ampia questa zona<sup>9</sup>.

Si deve notare che il valore medio e la varianza di una distribuzione *non sempre esistono*. Vedi ad esempio il paragrafo 5.9.5

Esempi di calcolo del valore medio e della varianza (e deviazione standard) di distribuzioni di probabilità discrete e continue saranno date nei prossimi paragrafi.

<sup>9</sup>Questa affermazione è valida approssimativamente in molti casi e serve per dare un'idea di come vanno in genere le cose, ma si possono fare controesempi che la contraddicono

## 5.8 Distribuzioni di variabili discrete

Nei paragrafi che seguono saranno illustrate alcune distribuzioni discrete con le loro caratteristiche più importanti. Le distribuzioni illustrate sono quelle che maggiormente ricorrono nello studio dei fenomeni fisici.

### 5.8.1 Il Processo di Bernoulli

Consideriamo un evento che abbia due modalità di presentarsi usualmente dette successo e insuccesso. Esempio classico di questo tipo di eventi è il lancio di una moneta nel quale si hanno i due esiti: Testa (diciamo successo) e Croce (insuccesso). Sia  $p$  la probabilità di successo e  $q = 1 - p$  quella dei insuccesso. Associamo all'evento la variabile a due valori  $X$ :  $X = 1$  per successo e  $X = 0$  per insuccesso. L'evento con due esiti esclusivi è detto *esperimento di Bernoulli* oppure *prova di Bernoulli* e la variabile  $X$ , associata all'esperimento, è detta *variabile di Bernoulli*.

Con l'espressione *processo di Bernoulli* si intende una successione (anche infinita) di esperimenti di Bernoulli di uguale parametro  $p$ , tra loro indipendenti.

**Distribuzione di Bernoulli.** La distribuzione di probabilità della variabile a due valori  $X$  di Bernoulli è ovviamente:

$$\begin{cases} P(X = 0) = 1 - p \\ P(X = 1) = p \end{cases} \quad (5.16)$$

Calcoliamo valore medio e varianza della variabile di Bernoulli  $X$ :

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p \quad \mathbb{E}[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}[X]]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

### 5.8.2 Distribuzione binomiale

La distribuzione Binomiale dà la probabilità del numero  $k$  di successi in  $N$  processi di Bernoulli. Si consideri ad esempio un evento che si presenta con due sole modalità successo o insuccesso (un processo di Bernoulli come testa o croce, probabilità che esca "6" nel lancio di un dado, ...). Sia  $p$  la probabilità di successo e (ovviamente)  $q = 1 - p$  quella di insuccesso. Ad esempio nel lancio di una moneta  $p = q = 1/2$ , per l'uscita di "6" nel lancio di un dado (successo)  $p = 1/6$  e  $q = 1 - 1/6 = 5/6$  per l'insuccesso. Prendiamo in considerazione  $N$  prove ripetute di un evento che si può presentare con due modalità e sia  $p$  la probabilità della modalità che riteniamo successo; supponiamo inoltre che le  $N$  prove siano indipendenti l'una dalle altre; vogliamo calcolare la probabilità di ottenere  $k$  successi in  $N$  prove. Vista l'indipendenza delle prove possiamo applicare la regole delle probabilità composte per cui la probabilità di avere  $k$  successi nelle prime  $k$  prove e  $N - k$  insuccessi nelle rimanenti prove è data da:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k \text{ volte}} \cdot \underbrace{(1 - p) \cdot \dots \cdot (1 - p)}_{N - k \text{ volte}} = p^k (1 - p)^{N - k}$$

Poiché non siamo interessati all'ordine con cui otteniamo i  $k$  successi, dovremo contare tutte le configurazioni in cui si hanno  $k$  successi in  $N$  prove, e queste sono le combinazioni<sup>10</sup> di

<sup>10</sup>si veda in proposito l'appendice B.

$N$  oggetti di classe  $k$ . Otteniamo infine l'espressione della *distribuzione binomiale*:

$$\mathcal{B}_N(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k q^{N-k} \quad (5.17)$$

**Normalizzazione.** Verifichiamo che la distribuzione binomiale è normalizzata.

$$\sum_{k=0}^N \mathcal{B}_N(k) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = (p+q)^N = 1 \quad (5.18)$$

**Valore medio.**

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{k=0}^N k \mathcal{B}_N(k) = \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \sum_{k=1}^N \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} p^k q^{N-k} \\ &= Np \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-j)!j!} p^j q^{N-1-j} = Np \end{aligned} \quad (5.19)$$

dove sono state fatte le posizioni  $j = k - 1$ ,  $M = N - 1$  e si è usata la proprietà di normalizzazione (5.18) della binomiale.

**Varianza.**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[k^2] &= \sum_{k=0}^N k^2 \mathcal{B}_N(k) = \sum_{k=0}^N k^2 \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \sum_{k=1}^N \frac{N!k}{(N-k)!(k-1)!} p^k q^{N-k} \\ &= Np \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) \frac{(N-1)!}{(N-1-j)!j!} p^j q^{N-1-j} = Np(Np+1) = Np(Np-p+1) \end{aligned} \quad (5.20)$$

dove sono state usate le stesse posizioni utilizzate per il calcolo del valore medio. Infine con l'uso della (5.13) otteniamo:

$$\text{Var}[k] = Np(Np-p+1) - N^2p^2 = Npq \quad (5.21)$$

**Somma di variabili binomiali.** La somma di due variabili binomiali è ancora una variabile binomiale.

### 5.8.3 Distribuzione di Poisson o poissoniana

In molti esperimenti si osservano eventi che accadono in un certo intervallo temporale, o in una certa area, o all'interno di un volume, o di una lunghezza eccetera. Gli eventi a cui ci riferiamo devono essere indipendenti tra loro e se accadono nel tempo la loro probabilità di successo deve essere una costante nell'unità di tempo. Esempi tipici di questi eventi sono il numero di decadimenti radioattivi di una certa sorgente in un intervallo di durata prefissata; oppure il numero di automobili che passano in una strada di traffico non congestionato in un orario prefissato della giornata; oppure il numero di raggi cosmici che attraversano la superficie di un contatore di radiazione ionizzante in un dato intervallo temporale. Ciascuno degli eventi indicati è caratterizzato da un numero intero (gli eventi accaduti) e questo

numero appartiene ad una distribuzione di Poisson. La forma matematica della distribuzione di Poisson è:

$$P_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad (5.22)$$

dove  $\mu$  è il parametro legato alla probabilità di successo di cui si è appena accennato. La distribuzione di Poisson si ottiene come limite della distribuzione binomiale per  $N \rightarrow \infty$  e per  $p \rightarrow 0$  ma con il prodotto  $Np = \mu$  che resta finito.

**Normalizzazione.** Verifichiamo che la distribuzione di Poisson (5.22) è normalizzata. Infatti:

$$\sum P_\mu(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}$$

Essendo l'espressione nel simbolo di sommatoria lo sviluppo in serie di Taylor dell'esponenziale  $e^\mu$ , l'enunciato è dimostrato.

**Valore Medio.** Per definizione il valore medio di una variabile aleatoria con una distribuzione di probabilità discreta  $P(k)$  è  $\sum kP(k)$ . Nel caso di una distribuzione di Poisson si ha

$$\sum kP_\mu(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} = \mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} = \mu$$

Dove si è posto  $j = k - 1$ .

**Varianza.** Per definizione la varianza è il valore atteso dello scarto quadratico:  $\text{Var}[k] = \mathbb{E}[(k - \mu)^2] = \mathbb{E}[k^2] - \mu^2$ . Nel caso della distribuzione di Poisson:

$$\mathbb{E}[k^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = k \sum_{k=1}^{\infty} \mu \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu}$$

e ponendo  $j = k - 1$ :

$$\mathbb{E}(k^2) = \mu \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} = \mu \left( \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} \right) = \mu^2 + \mu$$

Da questo risultato si ottiene immediatamente:

$$\text{Var}[k] = \mathbb{E}[k^2] - (\mathbb{E}[k])^2 = \mu$$

Caratteristica della distribuzione di Poisson è che il valore medio e varianza hanno lo stesso valore.

**La distribuzione di Poisson come limite della binomiale.** La distribuzione di Poisson si può ottenere come limite della distribuzione binomiale quando il numero delle prove  $N$  tende all'infinito, la probabilità di successo  $p$  tende a zero mentre il prodotto  $Np$ , che rappresenta il valore medio della binomiale, rimane finito. Dimostriamo questa affermazione con il seguente esempio. Consideriamo eventi casuali che possano accadere in un intervallo di tempo  $\Delta T$ . Ad esempio il numero di raggi cosmici che fanno scattare un contatore di particelle ionizzanti nell'intervallo di tempo  $\Delta T$ . Dividiamo l'intervallo  $\Delta T$  in  $n$  intervallini temporali di durata  $\Delta T/n$  e supponiamo che:

- La probabilità che un evento capiti in ciascuno intervallino di durata  $\Delta T/n$  sia costante.
- La probabilità che si verifichino due o più eventi nello stesso intervallino sia nulla.
- Gli eventi siano indipendenti tra loro.

Avendo diviso l'intervallo di tempo  $\Delta T$  in  $n$  parti e assumendo le ipotesi elencate, l'arrivo dei raggi cosmici nell'intervallo  $\Delta T$  può essere considerato come  $n$  processi di Bernoulli con probabilità di successo  $p = \lambda \Delta T/n$  dove  $\lambda$  è una costante con le dimensioni dell'inverso di un tempo. Quindi la probabilità di avere  $k$  eventi nell'intervallo  $\Delta T$  è data dalla binomiale con parametri  $n$  e  $p$ :

$$\mathcal{B}_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda \Delta T}{n} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda \Delta T}{n} \right)^{n-k}$$

Se passiamo al limite per  $n \rightarrow \infty$  si avrà che  $p \rightarrow 0$ , tuttavia il prodotto  $np = \lambda \Delta T$  rimane costante. Il limite della binomiale in queste condizioni è la distribuzione di Poisson, infatti:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left( \frac{\Delta T \lambda}{n} \right)^k \left( 1 - \frac{\Delta T \lambda}{n} \right)^{n-k} \\ &= \frac{(\Delta T \lambda)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \left( 1 - \frac{\Delta T \lambda}{n} \right)^{-k} \left( 1 - \frac{\Delta T \lambda}{n} \right)^n \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$= \frac{(\Delta T \lambda)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right) \left( 1 - \frac{\Delta T \lambda}{n} \right)^{-k} \left( 1 - \frac{\Delta T \lambda}{n} \right)^n \quad (5.24)$$

nel passaggio dalla (5.23) alla (5.24), nella prima frazione nel limite, è stato messo in evidenza  $n^k$  tra i  $k$  termini del numeratore:  $(n(n-1) \dots (n-k+1))$  semplificandolo con il denominatore. Per  $n \rightarrow \infty$  tutti i termini della (5.24) tendono a 1 tranne l'ultimo. Per calcolare il limite a cui tende l'ultimo termine, poniamo  $y = -n/\Delta T \lambda$ , e calcoliamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\Delta T \lambda}{n} \right)^n = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{-\Delta T \lambda} = e^{-\Delta T \lambda}$$

dove si è fatto uso del limite notevole  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x = e$ . Riprendendo la (5.24) otteniamo proprio l'espressione della distribuzione di Poisson:

$$\frac{(\Delta T \lambda)^k}{k!} e^{-\Delta T \lambda} = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

dove nell'ultimo passaggio si è posto  $\mu = \lambda \Delta T$ .

**Esercizio.** L'intensità al livello  $I$  del mare dei raggi cosmici penetranti è  $I = 1.2 \times 10^2$  particelle  $/(m^2 \text{ s})$ . Un rivelatore di raggi cosmici ha una superficie  $A = 10^2 \text{ cm}^2$  e viene tenuto acceso per vari intervalli temporali tutti della durata di  $\Delta t = 6 \text{ s}$ .

Determinare quale distribuzione di probabilità seguono i conteggi dei vari intervalli.

**Soluzione.** Il numero dei conteggi del rivelatore segue la distribuzione di Poisson, infatti sono soddisfatte le condizioni che la caratterizzano:

- Il passaggio di ogni raggio cosmico è un evento (largamente) indipendente dal passaggio di tutti gli altri – eventi indipendenti –
- Il numero degli eventi registrati dal contatore per unità tempo è costante. La “pioggia” di raggi cosmici è uniforme

- due eventi non possono arrivare allo stesso tempo
- la probabilità di contare un raggio è proporzionale alla lunghezza dell'intervallo di tempo

Il valore medio e deviazione standard di questa distribuzione di Poisson sono:

$$\mu = I \cdot A \cdot \Delta t = (1.2 \times 10^2) \times (10^2 \times 10^{-4}) \times 6 = 7.2, \quad \sigma = \sqrt{\mu} = 2.7$$

Infine la distribuzione è:

$$P(k) = \frac{7.2^k}{k!} e^{-7.2}$$

**Somma di variabili di Poisson.** La somma di due variabili di Poisson indipendenti di valori medi  $\mu_1$  e  $\mu_2$  è ancora una variabile di Poisson di valore medio  $\mu_1 + \mu_2$ . Per dimostrare questa affermazione consideriamo due variabili di Poisson  $n_1$  e  $n_2$  di valori medi  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Le variabili  $n_1$  e  $n_2$  hanno distribuzioni di probabilità  $P_{\mu_1}(k) = \mu_1^k e^{-\mu_1} / k!$  e  $P_{\mu_2}(k) = \mu_2^k e^{-\mu_2} / k!$ . Indichiamo con  $N$  la loro somma:

$$N = n_1 + n_2$$

Poiché  $N$  si ottiene da tutti i valori di  $n_1 < N$  sommati a  $n_2 = N - n_1$ , la probabilità di ottenere il valore  $N$  è data da:

$$P(N) = \sum_{n_1=0}^{n_1=N} P_{\mu_1}(n_1) P_{\mu_2}(n_2 = N - n_1)$$

essendo le due variabili  $n_1$  e  $n_2$  indipendenti. Sostituendo l'espressione esplicita delle distribuzioni si ha:

$$\begin{aligned} P(N) &= \sum_{n_1=0}^{n_1=N} \frac{\mu_1^{n_1}}{n_1!} e^{-\mu_1} \cdot \frac{\mu_2^{(N-n_1)}}{(N-n_1)!} e^{-\mu_2} = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \frac{1}{N!} \sum_{n_1=0}^{n_1=N} \frac{N!}{(N-n_1)! n_1!} \mu_1^{n_1} \mu_2^{N-n_1} = \\ &= e^{-(\mu_1+\mu_2)} \frac{1}{N!} \sum_{n_1=0}^{n_1=N} \binom{N}{n_1} \mu_1^{n_1} \mu_2^{N-n_1} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^N}{N!} e^{-(\mu_1+\mu_2)} \end{aligned}$$

che è proprio una distribuzione di Poisson con valore medio  $\mu_1 + \mu_2$ . Questo risultato si ottiene in modo ancora più semplice con l'uso delle *funzioni generatrici dei momenti delle distribuzioni* come è mostrato nell'appendice C.

## 5.9 Distribuzioni di variabili continue

In questo paragrafo saranno descritte alcune fra le più comuni distribuzioni di probabilità di variabili aleatorie continue assieme alle loro principali caratteristiche e applicazioni.

### 5.9.1 Distribuzione uniforme

La variabile aleatoria con una distribuzione uniforme o distribuzione rettangolare in un intervallo  $a-b$  è tale che tutti gli intervalli della stessa lunghezza nell'intervallo di definizione sono equiprobabili. In altre parole la *pdf* è costante in  $a-b$  (vedi la figura (5.3)). La forma del distribuzione uniforme è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (5.25)$$

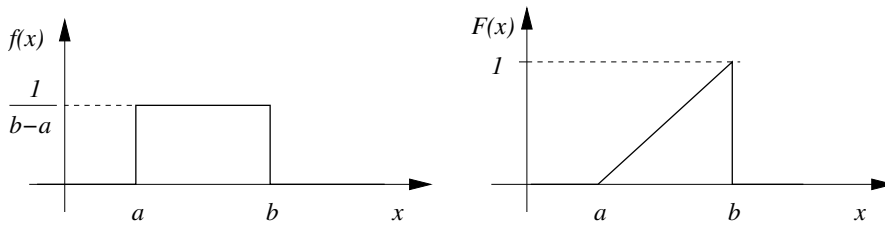


Figura 5.3: La distribuzione uniforme  $f(x)$  e la relativa distribuzione cumulativa  $F(x)$ .

**Normalizzazione.** La verifica che distribuzione uniforme è normalizzata è immediata.

**Valore medio.** Per ragioni di simmetria il valore medio della distribuzione uniforme con l'espressione data dalla (5.25) è :  $\mu = (a + b)/2$

**Varianza.** Per ottenere la varianza è necessario calcolare il seguente integrale:

$$\mathbb{E}[x^2] = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{3}(b^2 + a^2 + ab)$$

e tenendo conto dell'ultima delle (5.13) si ha:

$$\mathbb{V}\text{ar}[x] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Distribuzione cumulativa** .La distribuzione cumulativa per la distribuzione uniforme è:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(x')dx' = \int_a^x \frac{dx'}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

**Esercizio.** Una persona arriva ad una fermata di autobus diretti alla stazione ferroviaria. La persona sa che i bus passano ogni 15 minuti senza però conoscere la tabella degli orari. Sapendo che se il bus non passa entro 5 minuti perde il treno, calcolare la probabilità che la persona riesca a prendere il treno.

**Soluzione.** La pdf dei tempi di arrivo del bus, per le conoscenze della persona è una costante e vale  $(1/15) \text{ min}^{-1}$ . La probabilità che il bus arrivi in 5 min è quindi  $\int_0^5 (1/15)dt = 1/3$ .

**Applicazione.** La distribuzione del valore “vero” di una grandezza misurata con uno strumento digitale è uniforme all'interno dell'intervallo definito dall'ultima cifra del *display* (quella meno significativa). Quindi l'incertezza dovuta alla sola interizzazione della grandezza è  $1/\sqrt{12}$  del valore dell'ultima cifra.

### 5.9.2 Distribuzione triangolare

La distribuzione  $f(x)$  di probabilità triangolare della variabile aleatoria continua  $x \in (a, b)$  con  $a < c < b$ , è definita come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(c-a)(b-a)}(x-a) & \text{per } a < x < c \\ \frac{2}{(b-a)(b-c)}(b-x) & \text{per } c < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (5.26)$$

Un esempio di questa distribuzione è mostrato nella figura 5.4. Valore medio della distribuzione triangolare è:

$$\bar{x} = \int_a^b f(x) dx = \int_a^c x \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} dx + \int_c^b x \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} dx = \quad (5.27)$$

$$= \frac{(c-a)(a+2c)}{3(b-a)} + \frac{(b-c)(b+2c)}{3(b-a)} = \frac{a+b+c}{3} \quad (5.28)$$

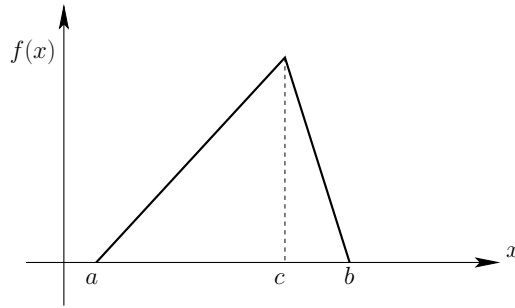


Figura 5.4: Distribuzione triangolare generica.

Nel caso particolare, ma molto comune, in cui la distribuzione triangolare sia simmetrica (con la forma di un triangolo isoscele) allora  $c = (a+b)/2$  e la distribuzione (5.26) diviene:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(b-a)^2}(x-a) & \text{per } a < x < c \\ \frac{4}{(b-a)^2}(b-x) & \text{per } c < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (5.29)$$

In questo caso il valore medio della  $x$  è:

$$\bar{x} = \frac{a+b+(a+b)/2}{3} = \frac{a+b}{2}$$

Per il calcolo della varianza operiamo una traslazione della distribuzione centrandola sullo zero dell'asse delle ascisse:  $x \rightarrow x - (a+b)/2$ . Ovviamente questa operazione non influisce sul valore della varianza. Per semplificare la notazione poniamo inoltre  $\Delta = b - a$  per cui  $b - a = 2\Delta$ . La (5.29) si riduce a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^2}(x+\Delta) & \text{per } -\Delta < x < 0 \\ \frac{1}{\Delta^2}(\Delta-x) & \text{per } 0 < x < \Delta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (5.30)$$

Tenendo conto che  $\mathbb{E}[x] = 0$ , la varianza di una distribuzione triangolare simmetrica è data da:

$$\text{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] = \int_{-\Delta}^0 \frac{x^2}{\Delta^2}(x+\Delta) + \int_0^{\Delta} \frac{x^2}{\Delta^2}(\Delta-x) = \frac{\Delta^2}{6} = \frac{(b-a)^2}{24}$$

### 5.9.3 Distribuzione gaussiana o normale

La distribuzione di densità di probabilità gaussiana o normale della variabile aleatoria continua  $x$  si scrive come:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.31)$$

dove  $\mu$  e  $\sigma$  sono due parametri costanti. Come vedremo nel seguito il parametro  $\mu$  è il valore medio della  $x$  e  $\sigma^2$  è la sua varianza. Per brevità la distribuzione normale (5.31) spesso è indicata con  $N(\mu, \sigma)$ . Nella figura (5.5) sono riportati i tipici andamenti a campana della gaussiana per alcuni valori di  $\mu$  e  $\sigma$ .

La variabile  $z$  definita come:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (5.32)$$

è detta *variabile normale standardizzata*; è facile rendersi conto che la variabile  $z$  è una variabile gaussiana con  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ , la cui distribuzione è:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (5.33)$$

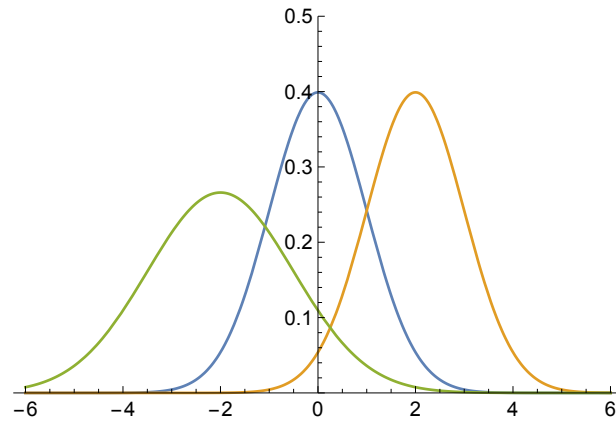


Figura 5.5: Tre distribuzioni di probabilità normali. Partendo da sinistra la prima con  $\mu = -2$  e  $\sigma = 1.5$  la seconda con  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1.0$  (variabile normale standardizzata) e la terza con  $\mu = 2$  e  $\sigma = 1.0$ . Si noti che la distribuzione normale è simmetrica e centrata sul suo valore medio. La larghezza della curva è determinata dal valore del parametro  $\sigma$  (*deviazione standard*).

Si può dimostrare che la (5.31) è normalizzata<sup>11</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

Si lasciano come semplici esercizi di calcolo integrale, trovare valore medio e varianza della  $x$ , che risultano essere:

$$\mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu, \quad \text{Var}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

<sup>11</sup>Per verificare la normalizzazione è necessario calcolare l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ . Un modo ingegnoso ed elegante per il calcolo di questo integrale si può trovare in [4] oppure in [9].

**Distribuzione cumulativa.** La funzione cumulativa di probabilità per la distribuzione normale è usualmente indicata con  $\Phi(x)$  e vale:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x'-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx' \quad (5.34)$$

l'integrale non può essere espresso attraverso funzioni elementari ed esistono tabelle nelle quali sono riportati i valori numerici dell'integrale <sup>12</sup>

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

### Calcolo della probabilità per la distribuzione normale

Nella teoria degli errori in vari casi è necessario calcolare la probabilità che la variabile normale  $x$  sia contenuta in un certo intervallo di estremi  $a$  e  $b$  (con  $a < b$ ). Utilizzando la (5.31) avremo

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \quad (5.35)$$

Per il calcolo di questo integrale, che dipende sia da  $\mu$  sia da  $\sigma$ , procediamo ad un cambiamento di variabili utilizzando la variabile normale standardizzata definita nella (5.32). Dalla definizione di  $z$  ricaviamo che  $dx = \sigma dz$  e l'integrale precedente prende la forma

$$P(a < x < b) = \int_{z_a}^{z_b} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \quad (5.36)$$

dove gli estremi di integrazione sono dati da:

$$z_a = \frac{a - \mu}{\sigma} \quad z_b = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

Poiché le tabelle forniscono la funzione cumulativa di probabilità  $\Phi(x)$ , definita nella (5.34), la probabilità cercata è data da:

$$P(a < x < b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Con questo modo di operare si ottengono le probabilità che la variabile normale  $x$  si contenuta in un intervallo di  $2$ ,  $4$  e  $6$   $\sigma$  centrato attorno al valore medio (vedi la figura 5.6)

- $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = P(-1 < z < 1) = 0.6826$

<sup>12</sup>In letteratura si trovano diverse funzioni che si basano sull'integrale della gaussiana; il loro numero e l'uso di una simbologia spesso non coerente può generare confusione. Per fare un po' di chiarezza ecco un elenco di queste funzioni con la loro definizione matematica:

- Funzione cumulativa di probabilità  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$
- Funzione degli errori:  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
- Funzione degli errori complementare:  $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz$

E' facile verificare che vale la relazione:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

- $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(-2 < z < 2) = 0.9544$
- $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < 3) = 0.9973$

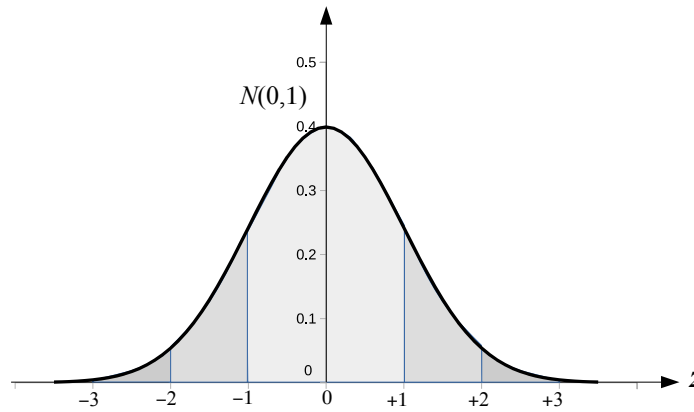


Figura 5.6: Distribuzione della variabile normale standardizzata  $z$ . L'area in colore più chiaro indica  $P(-1 < z < 1) = 0.6826$ , con l'aggiunta dell'area di colore intermedio si ottiene  $P(-2 < z < 2) = 0.9544$  e infine aggiungendo l'area di colore più scuro si ottiene  $P(-3 < z < 3) = 0.9973$ .

#### 5.9.4 Distribuzione $t$ di Student

Con distribuzione  $t$  di Student (o *distribuzione  $t$* ) si indica un qualunque membro di una famiglia di distribuzioni continue di particolare utilità quando si voglia stimare il valore medio di una grandezza distribuita in modo normale ma di varianza non nota. L'espressione esplicita della distribuzione  $t$  di Student è:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu} B(1/2, \nu/2)} \left( 1 + \frac{t^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (5.37)$$

dove il termine  $\sqrt{\nu} B(1/2, \nu/2)$ , nel quale compare la funzione speciale Beta<sup>13</sup>, è necessario per normalizzare la distribuzione ( $\int f(t) dt = 1$ ).

**Valore medio.** Il valore medio della  $t$  di Student è zero (tranne quando  $\nu = 1$  nel qual caso è indefinito) in quanto la funzione è simmetrica  $f(t) = f(-t)$ .

**Varianza.**

$$\text{Var}[t] = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad \text{Esiste solo per } \nu > 2$$

Per  $\nu \leq 2$  l'integrale  $\int t^2 f(t) dt$  diverge.

<sup>13</sup>La funzione Beta, detta anche integrale di Eulero di prima specie, è una funzione speciale definita come:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

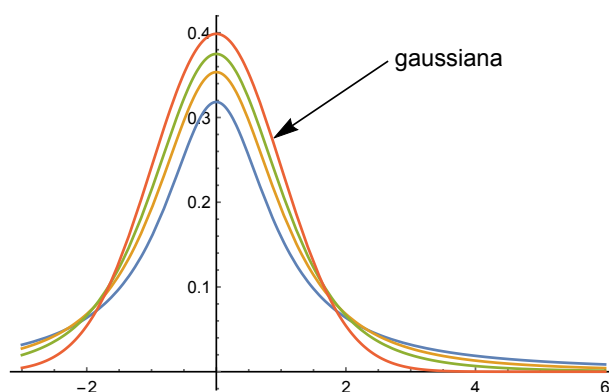


Figura 5.7: Quattro distribuzioni di probabilità  $t$  di Student con valore medio nullo e varianza pari 1. Le curve si distinguono per il valore del numero  $\nu$  dei gradi di libertà:  $\nu = 1$  (curva più bassa),  $\nu = 2$ ,  $\nu = 4$  e  $\nu = \infty$  (curva più alta). La curva con  $\nu = \infty$  coincide con una gaussiana con lo stesso valore medio e stessa varianza.

La distribuzione  $t$  di Student riveste particolare importanza in statistica, infatti descrive la distribuzione di probabilità dell'importante variabile

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s\sqrt{n}}$$

dove  $\bar{x}$  è la media aritmetica di  $n$  realizzazioni della variabile aleatoria  $x$  distribuita in modo normale e  $s$  è la stima della varianza di  $x$  pari a

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{n - 1}}$$

Torneremo sull'utilizzo della distribuzione  $t$  di Student in statistica nel capitolo 6.

### 5.9.5 Distribuzione di Cauchy o Breit-Wigner o lorenziana

Questa distribuzione è usata in fisica per descrivere i cosiddetti fenomeni di risonanza in fisica atomica e in fisica nucleare e subnucleare. Nei testi di fisica è citata come Breit-Wigner. La densità di probabilità di questa distribuzione è:

$$f(x) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{(x - x_o)^2 + \Gamma^2} \quad (5.38)$$

dove  $x_o$  e  $\Gamma$  sono dei parametri reali; il primo rappresenta il centro di simmetria della distribuzione e il secondo, definito positivo, è legato alla larghezza della curva.

La funzione cumulativa è:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{(x' - x_o)^2 + \Gamma^2} dx' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x - x_o}{\Gamma}$$

La distribuzione di Cauchy (5.38) non ha valore medio né varianza, infatti come si può facilmente verificare, l'integrale con cui si calcolano il valore medio e la varianza divergono.

La distribuzione di Cauchy è spesso citata come esempio di distribuzione patologica proprio perché priva di valore medio e di varianza.

Diamo alcuni esempi di variabili che seguono la distribuzione di Cauchy. Il rapporto di due variabili gaussiane segue la distribuzione di Cauchy. Consideriamo un angolo  $\theta$  come

variabile aleatoria con una distribuzione uniforme tra  $-\pi/2$   $\pi/2$  allora la sua tangente  $\tan \theta$  ha una distribuzione di Cauchy. La somma di  $N$  variabili di Cauchy è ancora una variabile di Cauchy. Questa ultima affermazione potrebbe essere erroneamente interpretata come una contraddizione del teorema del limite centrale che sarà esposto nel prossimo capitolo.

### 5.9.6 Distribuzione del $\chi^2$

Una distribuzione di probabilità che ha un importante ruolo nella valutazione della qualità dei risultati che si ottengono con l'analisi statistica (argomento che verrà trattato nel capitolo 8) è quella nota come la distribuzione del  $\chi^2$  (pronunciare “chi quadro”).

Consideriamo  $n$  variabili casuali  $z_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), dove ciascuna delle  $z_i$  sia distribuita in modo normale con valore medio nullo e varianza unitaria ( $\mathcal{N}(0, 1)$ ). Supponiamo inoltre le variabili  $z_i$  siano tra loro indipendenti.

La variabile casuale  $\chi^2$  definita come somma dei quadrati delle  $z_i$  (variabili normali standard):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (5.39)$$

ha una distribuzione di densità di probabilità detta *distribuzione del  $\chi^2$  con  $n$  gradi di libertà* la cui distribuzione<sup>14</sup> è :

$$f(x|n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{(n/2-1)} e^{-x/2} \quad (5.40)$$

dove si è sostituito  $x$  a  $\chi^2$  per maggiore chiarezza grafica.

Riassumendo: *La variabile casuale  $\chi^2$  definita come la somma dei quadrati di  $n$  variabili indipendenti gaussiane standard  $z_i^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ha una distribuzione di probabilità data dalla (5.40). Come appare evidente dalla (5.39) e dalla (5.40) la distribuzione della variabile  $\chi^2$  ha come unico parametro il numero intero  $n$  che viene detto *numero di gradi di libertà*. Nella figura 5.8 è mostrata una distribuzione del  $\chi^2$  per alcuni valori del numero di gradi di libertà.*

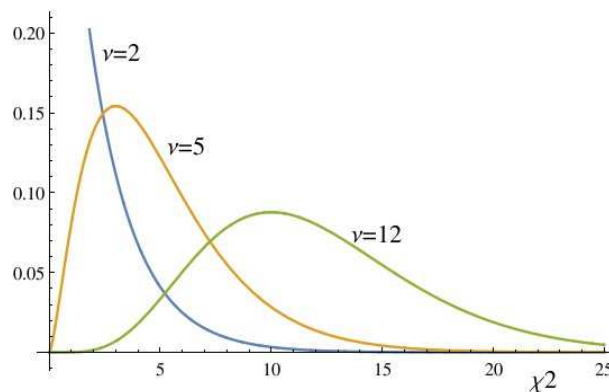


Figura 5.8: Distribuzioni di probabilità della variabile  $\chi^2$  per alcuni valori del numero dei gradi di libertà

<sup>14</sup>L'espressione (5.40) della pdf del  $\chi^2$  contiene, tra le costanti di normalizzazione, la funzione speciale  $\Gamma(x)$ . La  $\Gamma(x)$  è l'estensione del fattoriale a variabili reali (e complesse). Se  $n$  è un intero positivo allora  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ; in generale  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ .

**Valore medio.** Dalla definizione di valore medio e utilizzando l'integrazione per parti si ha

$$\mathbb{E}[\chi^2] = \int_0^\infty x f(x|n) dx = \int_0^\infty \frac{x}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{(n/2-1)} e^{-x/2} dx = n \quad (5.41)$$

Il valore medio del  $\chi^2$  è pari al *numero di gradi di libertà* come può essere anche intuito esaminando la sua definizione in (5.39).

**Varianza.**

$$\mathbb{V}\text{ar}[\chi^2] = \int_0^\infty (x - n)^2 f(x|n) dx = \int_0^\infty \frac{(x - n)^2}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{(n/2-1)} e^{-x/2} dx = 2n \quad (5.42)$$

**Il  $\chi^2$  ridotto.** Il  $\chi^2$  ridotto è una nuova variabile casuale definita come il rapporto tra il  $\chi^2$  e il numero di gradi di libertà

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{n} \quad (5.43)$$

Dalla questa definizione si deduce immediatamente che:

- il valore medio del  $\chi^2$  ridotto è 1:  $\mathbb{E}[\tilde{\chi}^2] = 1$
- la varianza del  $\chi^2$  ridotto diminuisce come l'inverso del numero dei gradi di libertà:  $\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{\chi}^2] = 2/n$

## 5.10 Momenti di variabili aleatorie

Il *momento di ordine n* di una variabile aleatoria, indicato con  $m'_n$ , è definito come il valore atteso della potenza n-esima della variabile; per variabili aleatorie discrete e continue si ha rispettivamente:

$$m'_n = \sum_k k^n P_n \quad m'_n = \int_{\Omega} x^n f(x) dx$$

Il momento del primo ordine non è altro che il valore medio della variabile:  $m'_1 = \mu$ .

**Momenti centrali di variabili aleatorie.** Il *momento centrale di ordine n*  $m_n$  di una variabile aleatoria è definito come il valore atteso della potenza n-esima dello scarto della variabile dal suo valore medio; per variabili aleatorie discrete e continue si ha rispettivamente:

$$m_n = \sum_k (k - \mu)^n P_n \quad m_n = \int_{\Omega} (x - \mu)^n f(x) dx$$

dove  $\mu$  è il valore medio della variabile. E' facile verificare che  $m_1 = 0$  e  $m_2 = \sigma^2$ . I momenti delle distribuzione possono essere ottenuti tramite le *funzioni generatrici dei momenti* che sono introdotte nell'appendice C.

I momenti centrali di ordine 3 e 4 vengono utilizzati per definire due parametri che caratterizzano la forma delle distribuzioni: l'*indice di asimmetria* e la *curtosi*.

**Indice di Asimmetria o Skewness.** Il parametro con cui si caratterizza l'asimmetria di una distribuzione di probabilità rispetto al suo valore medio è detto *Indice di Asimmetria o Skewness*, è indicato con  $\gamma_1$  ed è definito dalla relazione:

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{1}{\sigma^3} (\mathbb{E}[x^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3)$$

Nella figura 5.9 sono mostrate due distribuzioni con *skewness* positiva e negativa confrontate con una distribuzione simmetrica e quindi con *skewness* nulla.

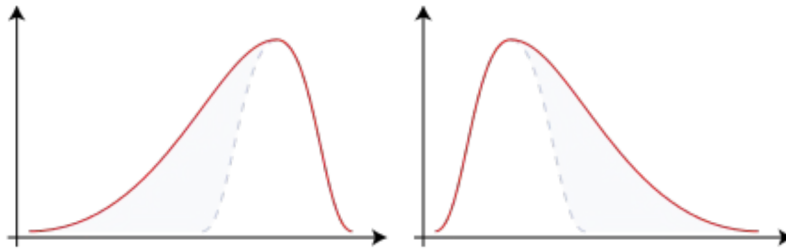


Figura 5.9: Distribuzioni con indice di simmetria (*skewness*) diverso da zero. A sinistra una distribuzione con *skewness* negativa, a destra una distribuzione con *skewness* positiva. La curva tratteggiata nelle figure rappresenta una distribuzione simmetrica (una normale) con *skewness* nulla.

**Curtosi o Kurtosis.** Questo parametro il cui nome è derivato dal greco  $\kappa\rho\tau\omega\zeta$  (deformato), indica di quanto una distribuzione di probabilità si “allontana” nella forma dalla distribuzione normale. Il parametro curtosi (o coefficiente di curtosi), è definito dalla espressione:

$$\beta_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

Poiché per una gaussiana  $m_4/\sigma^4 = 3$ , le distribuzioni con  $\beta_2 < 0$  sono più “piatte” della gaussiana, quelle con  $\beta_2 > 0$  più “appuntite” della gaussiana (vedi la figura 5.10).

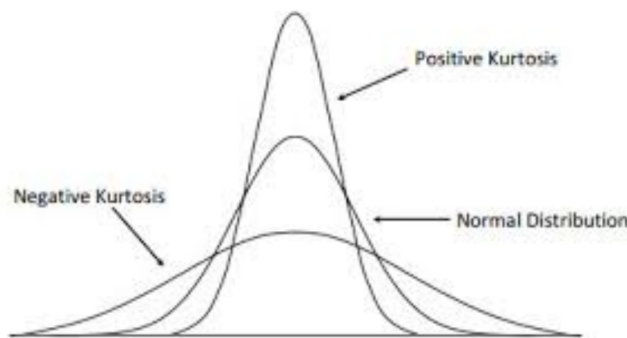


Figura 5.10: Distribuzioni con indice di curtosi negativo, nullo e positivo

Oltre ai parametri già descritti nei paragrafi precedenti una distribuzione di probabilità è caratterizzata da ulteriori parametri tra i quali:

- il *Valore Modale o Moda*: che rappresenta il valore della variabile aleatoria al quale corrisponde il massimo della densità di probabilità. Se la distribuzione è simmetrica, la moda coincide con il valore medio. Se la *pdf* ha più di un massimo si dice che la distribuzione è multimodale.
- la *Mediana*: è il valore  $x_{0.5}$  della variabile aleatoria che divide a metà la probabilità. Cioè  $P(x < x_{0.5}) = P(x > x_{0.5}) = 0.5$ . Se la distribuzione è simmetrica la mediana coincide con il valore medio.

Nella figura 5.11 è mostrata una generica *pdf* con l'indicazione della posizione della moda della mediana e del valore medio.

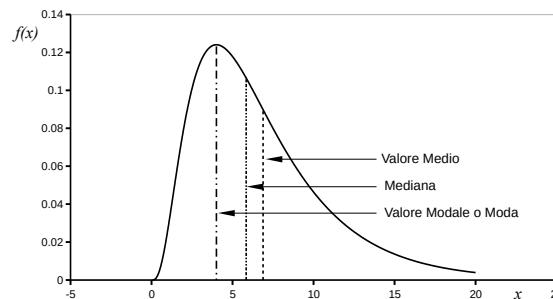


Figura 5.11: Generica distribuzione di probabilità in cui sono indicati i valori della moda della mediana e del valore medio

## 5.11 Cenni alle Distribuzioni Multivariate

Fino ad ora ci siamo occupati di variabili aleatorie singole, tuttavia in generale un evento può dipendere da più di una variabile aleatoria. In questo caso le distribuzioni di probabilità discrete e continue vengono dette *multivariate*.

Per introdurre i concetti relativi alle distribuzioni multivariate consideriamo il seguente esempio sul lancio contemporaneo di due dadi riconoscibili per esempio dal colore. Prendiamo in considerazione le due variabili aleatorie  $n_1$ , valore del dado del colore prescelto, e  $n_t$  somma delle uscite dei due dadi. Per ogni coppia delle possibili realizzazioni dell'evento  $(n_1, n_t)$  è facile calcolarne la probabilità  $P(n_1, n_t)$  che si realizzi. La tabella 5.1 riporta le  $P(n_1, n_t)$  in funzione della coppia di valori di  $n_1$  e  $n_t$ . La tabella 5.1 rappresenta un esempio di una distribuzione multivariata, in particolare *bivariata*, delle due variabili aleatorie discrete  $n_1$  e  $n_t$ .

In generale si potranno avere distribuzioni multivariate di variabili tutte discrete, tutte continue oppure mescolate in parte discrete e in parte continue.

**Distribuzioni Marginali.** Da una distribuzione multivariata è possibile ottenere la distribuzione di ogni singola variabile sommando sulla probabilità di quelle restanti. Con questa operazione si ottengono le distribuzioni dette *marginali*. Così tornando all'esempio, appena fatto le distribuzioni marginali di  $n_1$  e  $n_t$  si ottengono sommando su tutte le modalità di realizzazione della variabile che non interessa: così

$$P(n_1) = \sum_{n_t} P(n_1, n_t) \quad P(n_t) = \sum_{n_1} P(n_1, n_t)$$