Capitolo 5

Elementi di calcolo delle probabilità

Come si è visto nel capitolo 3 la misura di una grandezza fisica è sempre affetta da errori il cui valore è, entro certi limiti, inconoscibile ovvero c'è un certo grado di incertezza da associare al valore misurato di ogni grandezza fisica. In matematica le variabili che si comportano in questo modo sono dette *aleatorie* o *casuali* e il *Calcolo delle Probabilità* fornisce gli strumenti matematici e logici con cui trattarle. Quindi considerando le misure delle grandezze fisiche come variabili aleatorie utilizzeremo il calcolo delle probabilità, i cui principi basici sono esposti in questo capitolo, per la costruzione della cosiddetta *Teoria delle Incertezze di Misura*.

Si ritiene che il calcolo delle probabilità nasca nel XVII secolo da uno scambio di corrispondenza tra Fermat e Pascal su come risolvere un problema posto da un giocatore d'azzardo sul lancio dei dati[1]. Nel XVII secolo Lagrange lega la probabilità agli errori di misura e nel 1812 Laplace scrive il primo trattato matematico sulla probabilità[2].

In questo capitolo forniamo una prima trattazione di base del calcolo delle probabilità con l'intento di introdurre i concetti necessari alla trattazione delle incertezze di misura. Per l'approfondimento del calcolo della probabilità si possono consultare i testi riportati in bibliografia ([8],[3]) nei quali si trovano anche numerosi esercizi, che sono un indispensabile complemento per la comprensione del calcolo delle probabilità.

La probabilità, nell'uso comune che si fa di questo termine, riguarda situazioni nelle quali ci si trova in condizioni di incertezza sia per effettuare delle scelte sia di prendere delle decisioni. Tipiche affermazioni qualitative nel linguaggio comune sono:

- è probabile che nel pomeriggio pioverà
- è probabile che se ho lasciato la mia auto in divieto di sosta in centro, troverò una multa.
- è probabile che il governo cadrà in autunno.

Il calcolo delle probabilità permette di fare *valutazioni quantitative* su eventi che hanno esiti incerti.

5.1 Definizioni di probabilità

La probabilità è la misura quantitativa della possibilità che un evento si verifichi. Per convenzione la probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1, dove 0 indica l'evento

[1] Su questo problema, noto come il "problema di De Méré" si trova un'ampia documentazione in rete.

[2] Il titolo originale del trattato di Laplace, reperibile in rete, è: "Théorie analytique des probabilités".

impossibile e 1 l'evento certo. L'esempio classico è il lancio di una moneta perfettamente simmetrica (ma con la possibilità di distinguere il lato testa da quello croce). Data la simmetria le probabilità di testa e croce sono uguali e valgono 0.5.

Mentre il concetto di probabilità è intuitivo, la sua definizione, a parte quella originaria detta classica, dovuta a Laplace, è complessa al punto che esistono diverse scuole di pensiero. Schematicamente la probabilità di un evento può essere assegnata secondo:

- Definizione classica o combinatoria (Laplace 1812)
- Definizione frequentista (von Mises, 1920)
- Definizione soggettiva(de Finetti 1937)

5.1.1 Probabilità: definizione classica o combinatoria

Questa è la definizione più naturale e riguarda eventi ideali oppure con caratteristiche molto prossime a quelle ideali come il lancio di un dado perfettamente cubico[3] o l'estrazione di una certa carta da un mazzo ben mescolato o l'estrazione di un numero da un bussolotto o .... La definizione classica della probabilità si formula nel seguente modo:

> *La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili*

Si noti che in questa definizione si utilizza il concetto di probabilità per definire la probabilità, infatti l'espressione "eventi ugualmente possibili" equivale ad affermare che sono eventi con la stessa probabilità. Si utilizza quindi il concetto di probabilità per definire la probabilità!

La definizione combinatoria della probabilità è inapplicabile se l'insieme dei casi possibili è infinito.

Questa definizione di probabilità è detta anche "combinatoria" , e nei casi in cui questa definizione è applicabile, l'esecuzione dei calcoli pratici è notevolmente facilitata dall'utilizzo di quella branca della matematica detta *calcolo combinatorio* i cui fondamenti sono esposti nell'appendice B.

5.1.2 Probabilità: definizione frequentista

Consideriamo un esperimento ripetibile, come ad esempio il lancio di un dado o di una moneta o l'estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte, e tra i possibili esiti dell'esperimento definiamo un *evento favorevole* (per esempio l'uscita del 6 nel lancio del dado, l'uscita di testa nel lancio della moneta, l'uscita di una carta di cuori nell'estrazione della carta dal mazzo). Definiamo *frequenza*[4] il rapporto tra k, numero di volte in cui l'evento favorevole si è verificato, e n, numero totale delle prove.

La definizione frequentista della probabilità è:

> *La probabilità P di un evento è il limite a cui tende la frequenza al tendere all'infinito del numero delle prove effettuate*

---

[3] Un dado *reale* perfettamente cubico non esiste è solo un'astrazione.

[4] In alcuni testi di statistica il rapporto k/n è detto frequenza relativa, mentre il termine frequenza assoluta (impropriamente) indica il numero di volte (k) che l'evento favorevole si è presentato nelle n prove.

In formule

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} \tag{5.1}$$

La definizione (5.1) oltre ad essere molto intuitiva è ampiamente utilizzata in vari campi sia della scienza sia delle assicurazioni (vita, responsabilità civile,...) sia del controllo di qualità dei prodotti industriali.

Il grande merito di questa definizione è l'aver stabilito la corretta relazione tra la frequenza e la probabilità, concetti molto diversi, essendo la prima una quantità calcolata a posteriori, cioè dopo aver effettuato l'esperimento, la seconda una quantità, definita a priori.

Nella concezione classica o combinatoria la probabilità è stabilita a priori, prima di guardare i dati. Nella concezione frequentista il valore della probabilità è stimato a posteriori, dall'esame dei dati. La definizione frequentista (5.1) è soggetta ad alcune critiche; per utilizzarla occorre che 1) le prove che originano gli eventi siano illimitatamente ripetibili e 2) le prove successive devono svolgersi sempre nelle medesime condizioni. Entrambe queste condizioni possono essere verificate solo in modo approssimativo negli esperimenti reali. Inoltre questa definizione non si applica a tutta quella classe di eventi che non sono ripetibili ma per i quali è lecito domandarsi quale sia il loro livello di incertezza. Ad esempio potremo chiederci qual è la probabilità che una particolare stella esploda nei prossimi 30 giorni, oppure qual è la probabilità che un miliardo di anni fa ci fosse vita su Marte, oppure qual è la probabilità che domani a Roma piova. A queste domande e a tutte quelle per le quali è impensabile anche ipotizzare di ripetere all'infinito un esperimento, la definizione frequentista della probabilità non è in grado di dare una risposta.

5.1.3 Probabilità: definizione soggettivista

Come detto all'inizio di questo capitolo il concetto primitivo di probabilità è legato all'incertezza sul verificarsi di un evento ovvero a quanta informazione è nota sulla modalità con cui l'evento accade. Consideriamo ad esempio un soggetto che voglia stimare il valore della probabilità che nel lancio di un dado bene equilibrato esca il "6". Con solo questa informazione, il soggetto stimerà 1/6 questa la probabilità. Supponiamo ora che un altro soggetto riesca a vedere, dopo il lancio, una delle facce laterali del dado; per questo secondo soggetto, in possesso di maggiore informazione rispetto al primo, la probabilità del "6" varrà 0 oppure 1/4 in funzione del numero visto. Quindi allo stesso evento soggetti in possesso di informazioni diverse danno valutazioni differenti della probabilità dell'evento: *la probabilità non è una caratteristica intrinseca di un evento ma il suo valore è condizionato dalla quantità di informazioni sull'evento* Basandoci su quanto detto possiamo introdurre la definizione soggettiva, detta anche bayesiana, della probabilità:

> La Probabilità di un evento è la misura del *grado di fiducia* che un individuo coerente attribuisce, in base alle sue informazioni, al verificarsi dell'evento.

Una definizione più operativa della probabilità soggettiva è basata sul concetto di *scommessa coerente* e si formula nel seguente modo:

> *La probabilità è il prezzo p che un individuo coerente ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica*

Per coerenza si intende che il soggetto può assumere indifferentemente, ovvero senza vantaggio, il ruolo dello scommettitore oppure quello di chi accetta la scommessa. In altre parole la coerenza consiste nell'accettazione della scommessa inversa: ricevere p e pagare 1 se l'evento si verifica.

5.2 Teoria Assiomatica della probabilità

Il calcolo della probabilità è stato organizzato in una teoria matematica rigorosa, nota come Teoria Assiomatica della Probabilità, da Kolgomorov nel 1933. Nella teoria assiomatica della probabilità si postula l'esistenza di uno spazio Ω che contiene tutti gli eventi elementari $\{E_i\}$ che possono verificarsi. La probabilità di un evento $P(E)$ è una funzione a valori reali degli eventi che appartengono allo spazio Ω, che soddisfa i seguenti assiomi:

1. Positività: La Probabilità di un evento E_i è un numero positivo o nullo

$$P(E_i) \geq 0$$

2. Certezza (o Unitarietà) : La Probabilità dell'evento certo e quindi dello Spazio Campionario Ω è sempre 1:

$$P(\Omega) = 1$$

3. Unione: Siano E_i e E_j due eventi mutuamente esclusivi (o incompatibili), allora la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità di E_i e E_j:

$$P(E_i \cup E_j) = P(E_i) + P(E_j) \quad \text{con} \quad E_i \cap E_j = \varnothing$$

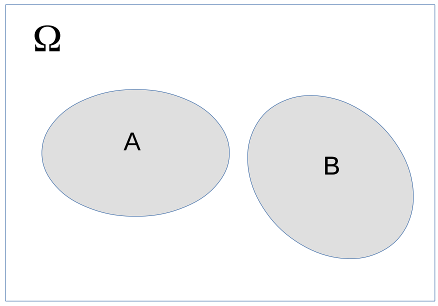
Partendo da questi tre assiomi si possono dedurre tutte le regole e i teoremi che regolano il calcolo delle probabilità.

La teoria assiomatica della probabilità per quanto fornisca un modo rigoroso per la deduzione di regole e teoremi, non fornisce alcuna modalità su come assegnare il valore della probabilità agli eventi. In altre parole nella teoria assiomatica della probabilità non esiste una definizione operativa[5] su come calcolare il valore della probabilità degli eventi e tale valore deve essere assegnato in modo esterno alla teoria.

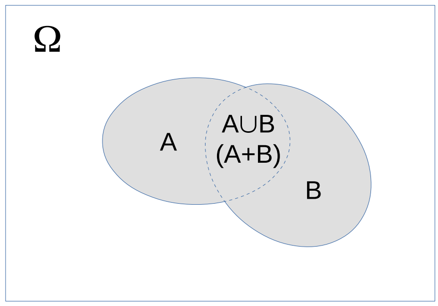
[5]Sul significato di definizione operativa vedi il paragrafo 1.2.

5.3 Probabilità e diagrammi di Wenn

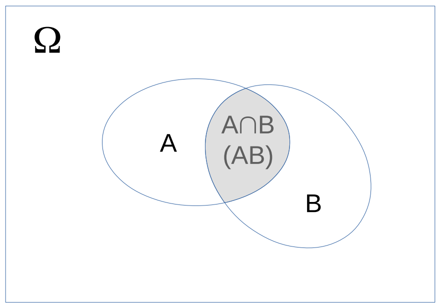
I diagrammi di Wenn forniscono un modo grafico per rappresentare i concetti fondamentali del calcolo delle probabilità, In questa rappresentazione un evento è indicato come una figura chiusa su un piano. Nella figura a) il rettangolo indicato con Ω rappresenta l'insieme di tutti i possibili esiti di un fenomeno aleatorio (o eventi), A e B rappresentano due possibili realizzazioni del fenomeno e con $\varnothing$ si indica l'evento impossibile che non può essere disegnato. Ad esempio supponiamo che Ω rappresenti tutti i possibili esiti del lancio di un dado, A sia l'uscita del numero "3" e B l'evento: uscita del numero "1" oppure del "6". I due eventi sono mutualmente esclusivi e per questo motivo le figure indicate con A e B non si intersecano. Nella figura b) è mostrata una situazione differente: gli eventi A e B non sono mutualmente esclusivi, ad esempio nel lancio di un dado A sia l'uscita del numero "3" oppure del numero "2" e B sia l'uscita di un numero dispari. Il verificarsi dell'evento A *oppure* dell'evento B si indica con $A \cup B$ (notazione insiemistica) oppure con $A + B$ (notazione algebrica, che preferiremo). Nella figura c) è evidenziato il verificarsi dell'evento A *e* dell'evento B che si indica con $A \cap B$ (notazione insiemistica) oppure con AB (notazione algebrica). Usando l'esempio precedente, l'evento AB consiste nell' uscita del numero "3". Nella figura d) è mostrato l'evento A e il suo complementare $\overline{A}$. Come si intuisce dalla figura, l'evento $\overline{A}$ è l'insieme di tutti gli eventi che non sono A. Ovviamente un evento e il suo complementare sono mutualmente esclusivi.



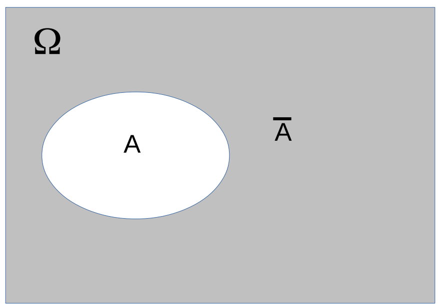
a)



b)



c)



d)

Indicando con $P(x)$ la probabilità che si verifichi l'evento x e riferendosi ai diagrammi di Wenn a lato, avremo, oltre alle proprietà sempre valide: $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$, che:

Figura a)

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A \cup B = \varnothing) = 0$$

che deriva direttamente dal terzo postulato di Kolgomorov

Figura b) e c)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{5.2}$$

Questa relazione, oltre ad essere evidente dal diagramma di Wenn, si dimostra osservando che $A + B = A + \overline{A}B$ da cui

$$P(A + B) = P(A) + P(\overline{A}B) \tag{5.3}$$

poiché A e $\overline{A}B$ sono eventi incompatibili. Inoltre essendo $B = AB + \overline{A}B$, si ha $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$ o anche $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$. Sostituendo questa ultima relazione nella (5.3) si ottiene la (5.2)

Figura d)

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \text{oppure} \quad P(A + \overline{A}) = P(\Omega) = 1$$

relazione che deriva direttamente dai postulati di Kolgomorov

5.4 Probabilità condizionata

La probabilità condizionata è la probabilità del verificarsi di un certo evento, sapendo o supponendo che si è verificato un altro evento. Se A è l'evento di cui si vuole la probabilità e B è l'evento noto o già avvento o che si presume sia avvenuto, "la probabilità condizionata di A dato B" si indica con $P(A|B)$. Questa probabilità è quindi quella che si verifichi l'evento $A \cap B$ una volta che si sia verificato B. Essendosi ridotto lo spazio degli eventi all'evento B potremo scrivere:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{5.4}$$

Esempio1. Consideriamo il lancio di un dado. L'evento A sia l'uscita del numero "3" la cui probabilità è $1/6$ (un caso favorevole su 6 possibili). L'evento B sia l'uscita di un numero dispari la cui probabilità è $P(B) = 1/2$ (3 casi favorevoli su 6 possibili). La probabilità dell'evento $A \cap B$ è: $P(A \cap B) = 1/6$ (l'evento A è totalmente contenuto in B) e infine la probabilità che accada A una volta che si sia realizzato B si ottiene applicando la (5.4): $P(A|B) = P(A \cap B)P(B) = (1/6)/(1/2) = 1/3$.

Esempio 2. Supponiamo che una scatola contenga 7 lampadine opache tra cui due sono "fulminate". Per trovare le lampadine fulminate le provate una ad una. Qual è la probabilità che le prime due lampadine provate siano quelle fulminate?

Siano F_1 e F_2 rispettivamente gli eventi prova della lampadina fulminata prima e seconda. Si deve calcolare la probabilità dell'evento $F_1 \cap F_2$ (o anche F_1F_2). La probabilità di selezionare per prima una delle due lampadine fulminate è $P(F_1) = 2/7$. La probabilità di selezionare la seconda lampadina fulminata avendo già provato la prima, è $P(F_2|F_1) = 1/6$. Per la (5.4) abbiamo:

$$P(F_1F_2) = P(F_2|F_1)P(F_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} = 4.8\%$$

5.4.1 Eventi indipendenti e teorema della probabilità composta

Due eventi A e B sono detti *indipendenti* o *scorrelati* se il verificarsi dell'uno non influisce sul presentarsi dell'altro, ovvero se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{o equivalentemente} \quad P(B|A) = P(B) \tag{5.5}$$

Esempio. Estrazione di due numeri, con reinserimento, da un urna con 30 palline numerate. Consideriamo i due eventi A: *estrazione del numero 30* e B: *estrazione del numero 18*. Si vuole la probabilità che in due estrazioni successive si verifichi l'evento A "e" l'evento B ovvero la probabilità dell'evento AB. I due eventi A e B sono *indipendenti* quindi per la (5.4):

$$P(AB) \equiv P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B) = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{30} = 1.11 \times 10^{-3}$$

Partendo dalle relazioni (5.5) possiamo formulare il *teorema della probabilità composta*:

> Se A, B, C ..., sono eventi tra loro indipendenti, la probabilità dell'evento $ABC\ldots$ è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi. In formule:
>
> $$P(ABC\ldots) = P(A)P(B)P(C)\ldots$$

Esempio 1. Giocando tre volte alla *roulette* un numero (non importa quale), qual è la probabilità di vincere tutte e tre le volte? Alla *roulette* la probabilità che esca un certo numero è $1/37$. I tre eventi descritti sono evidentemente indipendenti quindi la probabilità cercata è: $(1/37)(1/37)(1/37) = 2 \times 10^{-5}$.
Esempio 2. In un sacchetto ci sono 5 biglie rosse e 7 nere. Qual è la probabilità di estrarre in due estrazioni una biglia rossa e una biglia nera, avendo cura di reinserire la biglia dopo la prima estrazione? La probabilità di estrarre la biglia rossa è $5/12$ e quella di estrarre la nera $7/12$, essendo gli eventi indipendenti[6] la probabilità cercata è il prodotto delle due:$35/144$.

5.5 Il Teorema di Bayes

Ovviamente nell'evento $A \cap B$ il ruolo degli eventi A e B si può scambiare (l'operatore $\cap$ è commutativo), per cui $P(A \cap B) = P(B \cap A)$. Quindi possiamo scrivere una relazione analoga alla (5.4)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{5.6}$$

Dalle due relazioni (5.4) e (5.6) otteniamo:

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \tag{5.7}$$

La (5.7) è una delle forme in cui viene scritto il *Teorema di Bayes* anche noto come *formula di Bayes*. Un altro utile modo di scrivere il Teorema di Bayes è il seguente:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

Esempio. Supponiamo che una persona abbia due monete in tasca. Una “ normale”, con testa e croce nei due lati, l'altra “truccata” in cui entrambi i lati riportano testa (indistinguibile dalla testa della prima moneta). La persona prende una delle due monete a caso, la lancia ed esce testa. Qual è la probabilità che la moneta lanciata sia quella normale?

Soluzione. Indichiamo con N la moneta normale, con F quella truccata e con T l'uscita di testa. Le probabilità condizionate utili alla probabilità cercata sono:

$$\begin{aligned}
P(T|N) =& \frac{1}{2}, \quad \text{probabilità che esca testa se la moneta è normale} \\
P(T|F) =& 1, \quad \text{probabilità che esca testa se la moneta è truccata} \\
P(N) =& \frac{1}{2}, \quad \text{probabilità di scegliere la moneta normale} \\
P(F) =& \frac{1}{2}, \quad \text{probabilità di scegliere la moneta truccata}
\end{aligned}$$

[6] Si noti che senza il reinserimento i due eventi descritti non sono più indipendenti

La probabilità che esca testa è:

$$P(T) = P(T|N)P(N) + P(T|F)P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Usando il teorema di Bayes si ottiene la soluzione:

$$P(N|T) = \frac{P(T|N)P(N)}{P(T)} = \frac{(1/2) \cdot (1/2)}{3/4} = \frac{1}{3}$$

La formula di Bayes è molto utilizzata nell'ambito medico per valutare la "bontà" dei test clinici. Riportiamo una tipica applicazione della formula di Bayes in ambito clinico legata al test sull'infezione da HIV. Un test del sangue per rilevare la presenza del virus dell'HIV ha le seguenti caratteristiche:

- Con sangue infetto il test dà un risultato positivo nel 99.7% dei casi
- Con sangue sano il test dà un risultato negativo nel 92.6% dei casi
- Il 0.5% della popolazione è infettata dal HIV.

Se un cittadino "*preso a caso*" nella popolazione è positivo al test qual è la probabilità che sia realmente infettato dal HIV?

Definiamo B: test positivo e A: soggetto infetto. Si vuole P(A|B)?

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \\ &= \frac{0.997 \times 0.005}{0.997 \times 0.005 + (1 - 0.926) \times 0.995} = 6.3\% \end{aligned}$$

Il fatto che la probabilità abbia un valore sorprendentemente piccolo è sostanzialmente dovuto al fatto che la frazione dei cittadini infetti su cui si fa il test è molto piccola (lo 0.5%). Il risultato sarebbe stato completamente differente se il test fosse stato eseguito su un gruppo di cittadini a rischio.

5.6 Distribuzioni di probabilità

La probabilità con cui una variabile aleatoria assume i suoi valori è descritta dalla *Distribuzione di probabilità*. Ad esempio nel lancio di due dadi la variabile aleatoria X somma dei numeri usciti è un numero compreso tra 2 e 12 e la probabilità con cui X assume i valori compresi in questo intervallo è data dal numero di modi in cui X si ottiene dalla somma di due interi compresi tra 1 e 6 diviso per tutte le $6 \times 6 = 36$ possibilità[7]. Calcoliamo esplicitamente qualche valore della distribuzione: i valori $X = 2$ e $X = 12$ si ottengono in un solo modo e quindi $P(1) = P(12) = 1/36 = 0.0278$, mentre $X = 7$ si ottiene delle 6 coppie $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$, e quindi $P(7) = 6/36 = 0.167$ Nella figura 5.1 è mostrata in forma di istogramma la rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità della somma della variabile aleatoria somma delle uscite di due dadi.

[7]Più esattamente si tratta delle disposizioni con ripetizione (vedi l'appendice B) di due oggetti (i dadi) su 6 posti (i risultati del lancio) $D'_{6,2} = 6^2$