

Appendice D

I conteggi in fisica

Il conteggio di eventi è un'importante modalità con cui si ottengono informazioni su leggi e parametri fisici attraverso la raccolta di campioni statistici (ovvero un certo numero esperimenti ripetuti nelle stesse condizioni) che si suppongono generati da distribuzioni di probabilità di riferimento delle grandezze di interesse. Questa modalità è molto utilizzata nei fenomeni di fisica atomica, fisica nucleare e in fisica delle particelle elementari in cui si assegnano a molte grandezze fisiche non valori deterministici ma solo distribuzioni di probabilità.

D.1 Urti di particelle

L'urto fra particelle è la modalità standard con cui si eseguono esperimenti nella fisica delle particelle elementari. Le grandezze che definiscono lo stato finale delle particelle (dopo l'urto) sono variabili aleatorie con una loro distribuzione di probabilità. Un esempio, tra i tanti che si potrebbero fare, è il famoso esperimento di Geiger e Marsden con il quale si è iniziato ad comprendere la struttura degli atomi. Questo esperimento, probabilmente il primo esperimento della storia in cui si studia l'urto di due particelle per indagarne la struttura, consiste in una sorgente radioattiva α che fornisce il fascio incidente e in una sottile foglia d'oro, i cui atomi sono il bersaglio delle particelle α emesse dalla sorgente. Nella figura D.1) è riportato uno schema dell'esperimento di Geiger e Marsden.

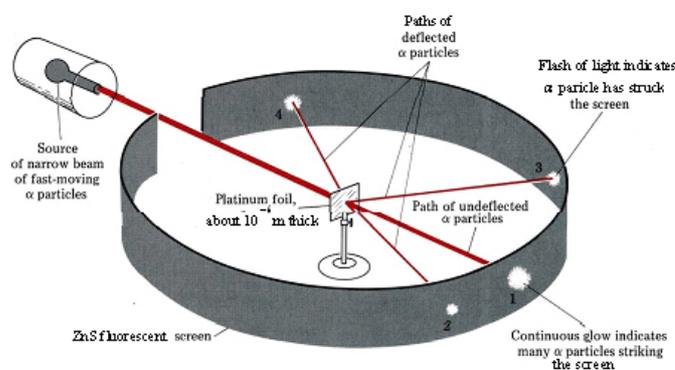


Figura D.1: Schema dell'esperimento di Geiger e Marsden.

Le particelle α del fascio urtano i nuclei atomici degli atomi d'oro, vengono deviate dal loro percorso e vanno ad urtare uno schermo di materiale fosforescente emettendo un lampo

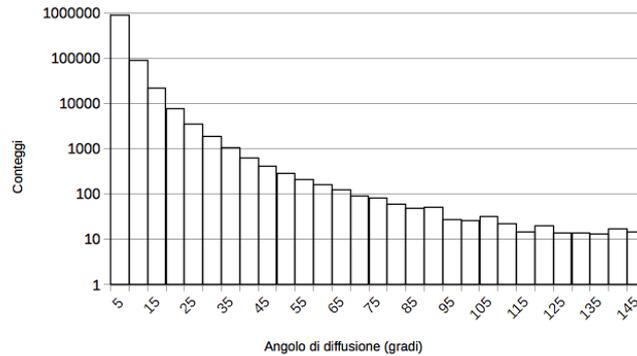


Figura D.2: Esempio di distribuzione angolare dovuta a diffusione Rutherford

di luce. Tutti i componenti di questo apparato sperimentale sono sotto vuoto. Contando il numero di lampi che si hanno ai vari angoli di deviazione θ in un fissato intervallo di tempo si ottiene un istogramma come quello mostrato nella figura D.2 che è la distribuzione angolare delle particelle α dopo l'urto con gli atomi della fogliolina d'oro. Questa distribuzione è proporzionale alla probabilità che una particella α sia deviata di un angolo θ nell'urto. Dall'analisi della distribuzione angolare Geiger e Marsden con l'uso della formula di Rutherford furono in grado di comprendere la struttura dell'atomo [5]. Infatti ai dati sperimentali si adatta un andamento del tipo:

$$f(\theta) \propto \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

che descrive la distribuzione angolare di particelle cariche puntiformi che urtano.

Si lascia come esercizio quello di applicare il metodo dei minimi quadrati per trovare la costante K che adatta la funzione

$$f(\theta) = \frac{K}{\sin^4(\theta/2)}$$

ai dati della tabella D.1 (graficati nell'istogramma D.2) e successivamente quello di applicare il test del χ^2 di Pearson per verificare la *bontà del fit* ottenuto.

Tabella D.1: Esperimento di Geiger-Marsden. Dati di diffusione angolare in bin di ampiezza di 5° tra 5° e 150° . Il valore dell'angolo che appare in tabella è l'estremo inferiore del bin cui si riferisce.

angolo ($^\circ$)	conteggi						
5	874104	45	409	85	48	125	14
10	87746	50	291	90	52	130	14
15	21632	55	207	95	28	135	13
20	7849	60	165	100	26	140	17
25	3427	65	124	105	32	145	15
30	1832	70	91	110	22		
35	1041	75	82	115	15		
40	623	80	61	120	20		

D.2 Decadimenti radioattivi

Si consideri un sistema di particelle di una sostanza radioattiva, e sia N_0 il loro numero all'istante $t = 0$. Ognuna delle particelle della sostanza radioattiva ha una probabilità λ di decadere nell'unità di tempo indipendentemente da tutte le altre. Nell'istante in cui la particella decade essa scompare e il numero delle particelle radioattive diminuisce di una unità. Ci chiediamo quante particelle restano dopo un intervallo di tempo t ?

Osservando che tipicamente il numero di particelle che si considera è decisamente grande (dell'ordine del numero di Avogadro), possiamo approssimare questo numero con una variabile continua e quindi siamo autorizzati a servirci del calcolo differenziale. In formule, se $N(t)$ è il numero di particelle radioattive all'istante t , nell'intervallo dt decadranno, in media, $\lambda N(t) dt$ particelle che è esattamente la quantità dN di cui diminuisce il numero di quelle che non sono ancora decadute. Potremo allora scrivere:

$$dN = -\lambda N dt \quad \text{ovvero} \quad \frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \text{o ancora} \quad d(\ln N) = -\lambda dt$$

Integrando

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t, \quad \ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

infine:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{D.1}$$

Questa è la *legge esponenziale del decadimento radioattivo* da cui si ricava che il numero medio delle particelle di una sostanza radioattiva che non sono decadute (sono sopravvissute) al tempo t ha una distribuzione esponenziale.

La legge esponenziale (D.1) può essere interpretata come la probabilità di decadimento di una singola particella radioattiva di decadere nell'intervallo di tempo dt attorno al tempo t . Indicando con $p(t)$ questa distribuzione, tenendo conto che deve essere normalizzata, si ottiene:

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \left(\text{infatti} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 \right) \tag{D.2}$$

La distribuzione di probabilità (D.2) è detta esponenziale e descrive molti fenomeni fisici oltre al quello del decadimento radioattivo per cui è opportuno soffermarsi su questa distribuzione descrivendone le caratteristiche più importanti.

D.2.1 La Distribuzione esponenziale

Diremo che una grandezza aleatoria t , definita positiva ($t \geq 0$), è distribuita in modo esponenziale se la sua *pdf* è:

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{D.3}$$

Alle volte in luogo del parametro λ nell'espressione della distribuzione esponenziale si utilizza il suo inverso, generalmente indicato con $\tau = 1/\lambda$. Con il parametro τ la (D.3) assume la forma $e^{-t/\tau}/\tau$. Nella figura D.5 è mostrata la distribuzione esponenziale per tre valori del parametro τ .

Valore medio il valore medio di t è:

$$\mathbb{E}[t] = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} t \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt \tag{D.4}$$

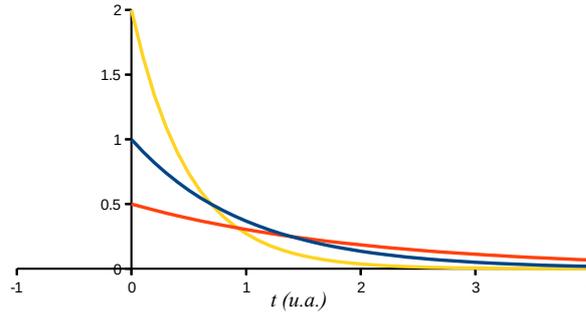


Figura D.3: Tre distribuzioni esponenziali con valori del parametro $\tau = 2, 1$ e 0.5 u.a.

Quando si considera un decadimento radioattivo oppure una particelle subnucleare instabile e in generale tutte le volte che la variabile t rappresenta un tempo il valore medio (D.4) viene detto *vita media* (del livello radioattivo, della particella, . . .)

Varianza La varianza di t è:

$$\text{Var}[t] = \mathbb{E}[t^2] - (\mathbb{E}[t])^2 = \int_0^{\infty} t^2 p(t) dt - \tau^2 = \int_0^{\infty} t^2 \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt \quad (\text{D.5})$$

La distribuzione esponenziale gode della proprietà di essere senza memoria (memoryless). Questa proprietà si esprime nel seguente modo: si considerino due eventi A e B che appartengano ad una distribuzione di probabilità esponenziale di tempo caratteristico τ . Definiamo i due eventi nel seguente modo:

- $A =$ "non si sono verificati eventi di interesse fino a $t + \Delta t$ ", ovvero: $A = \{T > t + \Delta t\}$
- $B =$ "non si sono verificati eventi di interesse fino a t ", ovvero: $B = \{T > t\}$.

Vogliamo determinare la probabilità (condizionata) di A dato B : $P(T > t + \Delta t | T > t)$. Per definizione:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\int_{t+\Delta t}^{\infty} e^{-x/\tau} dx / \tau}{\int_t^{\infty} e^{-x/\tau} dx / \tau} = e^{-\Delta T/\tau}$$

Questa probabilità è uguale a quella che si calcola per l'evento B , ovvero: $P(A|B) = P(B)$.

Come esempio per comprendere la proprietà della distribuzione esponenziale di essere *priva di memoria*, si supponga che la probabilità di passaggio di un autobus in una certa fermata sia esponenziale a partire da un certo istante che consideriamo come origine dei tempi. Arrivando al tempo zero alla fermata la probabilità di aspettare l'autobus per un tempo maggiore di ΔT è

$$P(t > \Delta T) = \int_{\Delta T}^{\infty} \frac{e^{-x/\tau}}{\tau} dx = e^{-\Delta T/\tau}$$

Arrivando alla fermata al tempo $t = s > 0$ la probabilità di attendere l'autobus per un tempo maggiore di ΔT , condizionata dall'evento $t \geq s$, è

$$P(t > s + \Delta T | t > s) = \frac{\int_{s+\Delta T}^{\infty} \frac{e^{-x/\tau}}{\tau} dx}{\int_s^{\infty} \frac{e^{-x/\tau}}{\tau} dx} = e^{-\Delta T/\tau}$$

che è uguale a quella calcolata se si fosse arrivati al tempo $t = 0$. Quindi a qualsiasi tempo si arrivi la distribuzione dei tempi di attesa è la stessa.

D.2.2 Relazione tra distribuzione di Poisson ed esponenziale

Vita media. Si definisce *vita media* della particella radioattiva e tipicamente si indica con τ , la grandezza:

$$\tau = \int_0^{\infty} tp(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} te^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{D.6})$$

Attività. Una grandezza importante nello studio della radioattività è la cosiddetta *attività* che indica il numero di decadimenti di una data sorgente nell'unità di tempo e si misura in numero di decadimenti al secondo. Il numero dei decadimenti, ΔN , osservati nell'intervallo di tempo $t, t + \Delta t$ si ottiene dalla (D.1) come:

$$\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t) = N_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

la seguente espressione:

$$\mathcal{A}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta N}{\Delta t} \right| = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = N(t) \lambda$$

Ne segue perciò che l'attività di una sorgente diminuisce nel tempo seguendo una legge esponenziale analoga a quella del numero delle particelle non ancora decadute (D.1).

D.3 Statistica dei decadimenti radioattivi

Consideriamo una sostanza radioattiva che, al tempo $t = 0$, consista di N_0 particelle instabili. Sia $\tau = 1/\lambda$ la vita media della singola particella. Fissato un intervallo temporale Δt la probabilità che una certa particella decada in questo intervallo temporale è $1 - \int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$. Indicando come evento favorevole il decadimento di una particella, il numero $N(\Delta t)$ delle particelle decadute in Δt , delle N_0 iniziali, è una variabile aleatoria che segue una distribuzione binomiale con $p = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$:

$$P(N(\Delta t)) = \binom{N_0}{N(t)} (1 - e^{-\lambda \Delta t})^N e^{-\lambda \Delta t}$$

Se come accade nella pratica N_0 è un numero molto grande (dell'ordine del numero di Avogadro) e la probabilità di decadimento della singola particella $(1 - e^{-\lambda \Delta t})$ sufficiente piccola in modo tale che $N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}) \simeq N_0 \lambda \Delta t$ sia finito, la distribuzione binomiale si approssima con una distribuzione di Poisson

$$P(N(\Delta t)) = \frac{\mu^N}{N!} e^{-\mu}$$

dove $\mu = N_0 \lambda \Delta t$ è il numero medio delle particelle che decadono in Δt . Al crescere del numero medio μ la distribuzione di Poisson converge verso la gaussiana di espressione:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-(N-\mu)^2/2\mu}$$

La convergenza della poissoniana verso la gaussiana è *precoce* e già per $\mu = 6$ si può utilizzare la formula della gaussiana per il calcolo dei valori delle probabilità in luogo della poissoniana.

Esecizio. Una contatore di radiazione è posto a 1 m da una sorgente radioattiva. La superficie sensibile del contatore è di 20 cm^2 e la sua efficienza è del 95%. Se in 13 min si ottengono 49 conteggi, stimare l'attività della sorgente.

D.3.1 Assorbimento di radiazione

Il fenomeno fisico dell'assorbimento da parte della materia di un tipo di radiazione ionizzante (i raggi gamma) fornisce un altro esempio di applicazione della distribuzione esponenziale. Inoltre l'uso di contatori per la misurazione dell'intensità di questa radiazione implica l'uso delle distribuzioni di Poisson per l'analisi statistica dei dati acquisiti.

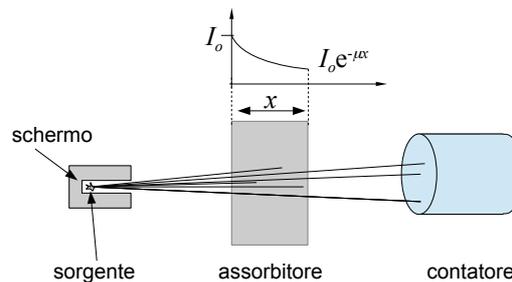


Figura D.4: Schema di un esperimento per misurare l'assorbimento della radiazione di un materiale.

Sperimentalmente si osserva che interponendo uno spessore di materia (l'assorbitore) di spessore x tra una sorgente di raggi gamma e un contatore (vedi la figura D.4), l'intensità della radiazione, ovvero il numero medio di conteggi nell'unità di tempo, misurata dal contatore diminuisce in modo esponenziale secondo la legge

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (\text{D.7})$$

dove I_0 è l'intensità misurata senza l'assorbitore e μ è un parametro detto coefficiente di attenuazione, che dipende dalla materia interposta tra sorgente e contatore.

Come esempio supponiamo di misurare il coefficiente di assorbimento di un certo materiale X ai raggi gamma di una sorgente radioattiva che supponiamo di intensità costante durante l'esperimento. La situazione sperimentale è quella mostrata nella figura D.4. Si hanno a disposizione 5 spessori del materiale (compreso lo spessore nullo) i cui valori, con incertezze trascurabili, sono elencati nella tabella D.2. Per ogni spessore (compreso quello nullo) si acquisiscono dati per un certo intervallo di tempo Δt_i ; conteggi e i tempi di acquisizione sono mostrati nella tabella D.2. L'analisi dei dati consisterà nel fare un fit dopo

Tabella D.2: Dati Esperimento misurazione di μ

x_i (cm)	Conteggi	Δt_i (s)
0.00	99	100.00
0.50	59	150.00
1.00	31	230.00
1.50	25	420.00
2.00	15	500.00

avere linearizzato il modello dato dalla equazione (D.7). Per chiarire la procedura creiamo una nuova tabella, la D.3, in cui a sinistra della doppia riga verticale si ripetono i dati

Tabella D.3: Analisi dei dati Esperimento misurazione di μ

x_i (cm)	Cont.	Δt_i (s)	Cont./ Δt_i (s^{-1})	u_i (s^{-1})	$\ln(\text{Cont.}/\Delta t_i)$	u_{\ln}	fit
0.00	310	100.00	3.100	0.176	1.131	0.057	1.127
0.50	168	150.00	1.120	0.086	0.113	0.077	0.139
1.00	103	230.00	0.448	0.044	-0.803	0.099	-0.850
1.50	65	420.00	0.155	0.019	-1.866	0.124	-1.839
2.00	35	500.00	0.070	0.012	-2.659	0.169	-2.827

della tabella D.2 mentre a destra si inseriscono le colonne con i calcoli dell'analisi. Come prima operazione calcoliamo le incertezze sui conteggi che essendo decadimenti radioattivi rispettano la statistica di Poisson e sono quindi pari alla radice quadrata dei conteggi. Per confrontare tra loro le misurazioni che sono state eseguite con durate differenti calcoliamo i conteggi per secondo inserendoli nella colonna successiva. Per poter eseguire un fit lineare calcoliamo il logaritmo naturale dei conteggi al secondo ottenuti (colonna 6) con la loro incertezza (colonna 7). Eseguito il fit lineare si ottengono i seguenti risultati: *Intercetta*: $I_0 = (1.127 \pm 0.052) s^{-1}$, *Coefficiente angolare*: $\mu = (-1.977 \pm 0.078) \text{cm}^{-1}$, *Coefficiente di correlazione*: $\rho = -0.656$. Infine nella colonna 8 è riportato il risultato del fit lineare ottenuto. Il calcolo del χ^2 del fit dà come risultato $\chi^2 = 1.37$, che con 3 gradi di liber-

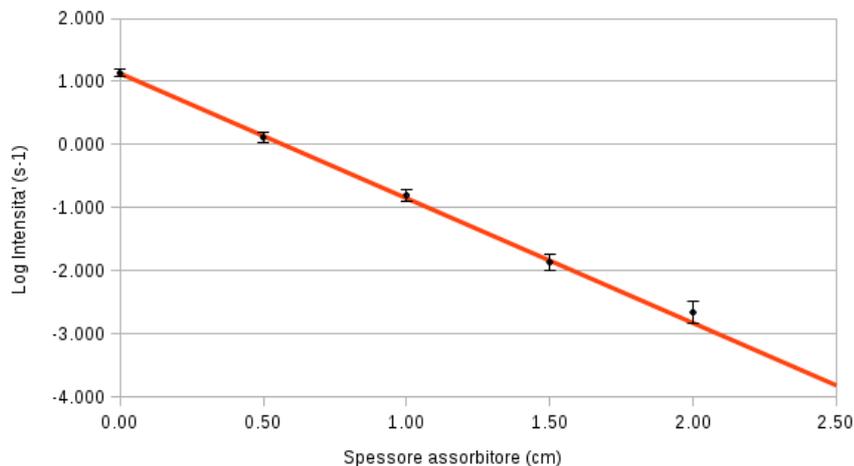


Figura D.5: Grafico del logaritmo dell'intensità verso lo spessore dell'assorbitore

tà corrisponde ad un χ^2 ridotto pari a $\tilde{\chi}^2 = 0.46$; dalle tabelle si ricava una probabilità $P(\tilde{\chi}^2 > 0.46) \simeq 70\%$ il che conferma la buona qualità del fit ottenuto.