

Capitolo 7

Incertezza nelle misure indirette

7.1 Propagazione delle incertezze

Nel capitolo 3 abbiamo studiato come valutare l'incertezza di una grandezza in una misurazione diretta, tuttavia raramente la misurazione si conclude con questo risultato. Tipicamente molte grandezze fisiche si misurano in modo indiretto cioè si esprimono mediante funzioni matematiche, più o meno complesse, di altre grandezze. Si consideri ad esempio la grandezza *velocità* di un corpo misurata indirettamente come rapporto tra lo spazio percorso s e tempo t impiegato a percorrerlo ($v = s/t$); un altro semplice esempio è la misura della distanza d tra due punti ottenuta come somme di due distanze parziali¹ a e b : $d = a + b$.

In questo capitolo sarà trattato il problema di come valutare l'incertezza di una grandezza misurata in modo indiretto *propagando* le incertezze delle grandezze con cui è stata ottenuta. Riprendendo un esempio precedente sulla misurazione indiretta della velocità, si dovrà valutare come le incertezze sulle misurazioni dello spazio e del tempo determinino quella sulla velocità e, nel caso della somma delle due distanze, come valutare l'incertezza sulla distanza totale da quelle sulle distanze parziali. Questo problema è noto con i nomi di "propagazione delle incertezze" o del calcolo della "incertezza combinata".

La soluzione generale di questo problema è di una certa complessità e quindi lo affronteremo in modo graduale partendo da quei casi in cui le funzioni matematiche coinvolte sono le più semplici.

Per iniziare consideriamo l'esempio prima citato della misura della distanza tra due punti come somma di due distanze parziali. Supponiamo che le due misure parziali siano a e b con le rispettive incertezze standard u_a e u_b , supponiamo inoltre che *le due incertezze u_a e u_b siano indipendenti* (tratteremo successivamente il caso in cui queste due incertezze siano invece correlate). Le due misure a e b devono essere interpretate come i valori attesi delle due variabili aleatorie: A e B ($a = \mathbb{E}[A]$, $b = \mathbb{E}[B]$). La variabile aleatoria $D = A + B$ è la grandezza fisica della quale si vuole ottenere il valore atteso che rappresenta la misura indiretta di D . Dalla proprietà di linearità del valore atteso si ha:

$$d = \mathbb{E}[D] = \mathbb{E}[A + B] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B] = a + b \quad (7.1)$$

La (7.1) afferma che il valore da assegnare alla misura indiretta di D è pari alla somma delle misure a e b . Per il calcolo della varianza di D , si ricordi che, come indicato dalla (5.49),

¹Questo caso si presenta ad esempio quando la distanza d è maggiore della massima lunghezza misurabile dal particolare dispositivo che si usa

la varianza della somma di due variabili aleatorie indipendenti è pari alla somma delle loro varianze:

$$\mathbb{V}\text{ar}[D] = \mathbb{V}\text{ar}[A] + \mathbb{V}\text{ar}[B] = u_a^2 + u_b^2$$

Da cui si trae che l'incertezza su d è:

$$u_d = \sqrt{u_a^2 + u_b^2}$$

Da quanto detto è un facile esercizio generalizzare la *propagazione delle incertezze* a quando la grandezza fisica Q (variabile dipendente) dipende linearmente da un insieme di n grandezze fisiche X_i (variabili indipendenti), ovvero:

$$Q = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

Se le misurazioni delle variabili indipendenti hanno dato i valori $(x_1 \pm u_1, x_2 \pm u_2, \dots, x_n \pm u_n)$ allora il valore da assegnare alla Q è

$$q = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \quad (7.2)$$

e, ricordando che le incertezze sulle x_i sono state ipotizzate indipendenti, l'incertezza standard di q è:

$$u_q = \sqrt{a_1^2u_1^2 + a_2^2u_2^2 + \cdots + a_n^2u_n^2} \quad (7.3)$$

Si noti che il risultato qui ottenuto è "esatto" nel senso che nessuna approssimazione è stata fatta ed è valido qualsiasi siano le distribuzioni di probabilità che seguono le grandezze x_i e qualsiasi valore abbiano siano le loro incertezze.

7.2 Misure indirette – Dipendenza funzionale da una variabile

In generale, una grandezza fisica Q è legata alla grandezza X da cui dipende da una relazione funzionale:

$$Q = f(X) \quad (7.4)$$

dove f è una qualsiasi funzione matematica².

Supponiamo di avere ottenuto un valore x della grandezza X con la sua incertezza u_x come risultato di una misurazione; vogliamo stimare, analogamente a quanto mostrato nel paragrafo precedente, il valore q della grandezza Q e quello della sua incertezza u_q .

Quando la funzione f non è lineare il problema della propagazione delle incertezze non può essere risolto in modo esatto se non in casi particolari che comunque richiederebbero la conoscenza della funzione di distribuzione di X . La figura 7.1 mostra come nel caso di una funzione $Q = f(X)$ non lineare la stessa incertezza sul valore di X genera, sul corrispondente valore di Q , incertezze di ampiezza differente per differenti valori di X . Dalla figura si nota che l'ampiezza dell'incertezza su Q cresce con la pendenza delle curva. E' noto che la pendenza di una curva in un certo punto è misurata dalla sua derivata prima in quel punto e basandoci su questa osservazione, per ottenere il valore atteso e l'incertezza (la deviazione standard) della grandezza Q approssimiamo la $f(X)$ con il suo sviluppo in serie troncato al primo ordine:

²La funzione f deve essere continua e derivabile per rappresentare grandezze fisiche. In generale la f non sarà lineare come nei seguenti esempi:

Periodo T del pendolo in funzione della sua lunghezza l : $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (radice quadrata)

Energia cinetica K in funzione della velocità v : $K = mv^2/2$ (quadratica)

Velocità v in funzione del tempo t in fluido viscoso: $v = v_0 e^{-t/\tau}$ (esponenziale)

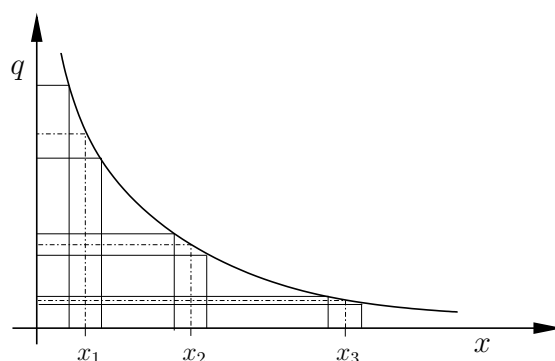


Figura 7.1: Propagazione dell'incertezza nel caso di una generica dipendenza funzionale. Nell'asse delle ascisse sono indicati tre valori x_1, x_2 e x_3 con le incertezze uguali tra loro. Si notino le differenze sull'incertezza della variabile dipendente q .

$$Q = f(x) + \frac{df(x)}{dX}(X - x) \quad (7.5)$$

dove con il simbolo $df(x)/dX$ si indica la derivata di f calcolata nel punto $X = x$. Calcolando valore atteso e varianza di Q si ha:

$$q = \mathbb{E}[Q] = \mathbb{E}\left[f(x) + \frac{df(x)}{dX}(X - x)\right] = f(x)$$

$$u_q^2 = \mathbb{V}\text{ar}[Q] = \mathbb{V}\text{ar}\left[f(x) + \frac{df(x)}{dX}(X - x)\right] = \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{df(x)}{dX}(X - x)\right] = \left(\frac{df(x)}{dX}\right)^2 u_x^2$$

Si noti che il termine del primo ordine dello sviluppo in serie di f ha valore atteso nullo e quindi il valore atteso di Q avrà correzioni, se necessarie, a partire dal secondo ordine. Possiamo quindi concludere che nel limite di validità dello sviluppo in serie (7.5) valore atteso e incertezza della grandezza Q , misurata in modo indiretto attraverso la relazione (7.4), sono date da:

$$q = f(x) \quad (7.6)$$

$$u_q = \left| \frac{df(x)}{dX} \right| u_x \quad (7.7)$$

Esempio. Misuriamo in modo indiretto la velocità media di un oggetto che percorra un certo spazio $s_o = 1.350$ m che supponiamo noto con incertezza trascurabile. La misurazione del tempo impiegato dal corpo a percorrere lo spazio s_o sia $t_o = 3.45$ s con un'incertezza pari a $u_t = 0.03$ s. La funzione con la quale si calcola la velocità è: $V = s_o/T$. Il coefficiente di sensibilità in questo caso è:

$$\left. \frac{dV}{dT} \right|_{T=t_o} = -\frac{s_o}{t_o^2} = -\frac{1.350}{(3.45)^2} = -0.1134 \text{ ms}^{-2}$$

quindi per le 7.6 e 7.7 si ha:

$$v = \frac{s_o}{t_o} = \frac{1.35}{3.45} = 0.3913$$

$$u_v = \left. \frac{dV}{dT} \right|_{T=t_o} u_t = 0.1134 \times 0.03 = 0.00340 \text{ ms}^{-1}$$

Risultato finale:

$$v = (0.391 \pm 0.003) \text{ ms}^{-1}$$

7.3 Misure indirette – Dipendenza funzionale da più variabili

Nel caso in cui la grandezza Q dipenda da più di una grandezza la (7.4) si generalizza in:

$$Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (7.8)$$

dove $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono le grandezze da cui dipende Q . Supponiamo di avere acquisito tramite misurazioni o in altro modo n valori di X_i , ovvero $x_1, x_2, \dots, x_n$ ciascuno con la sua incertezza u_i , ci proponiamo di valutare il valore q che assume la grandezza Q e la sua incertezza.

Come nel caso trattato nel paragrafo precedente, quando la funzione f non è lineare il problema della propagazione delle incertezze si risolve attraverso un'approssimazione lineare della $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nell'intorno dei valori x_i . In altre parole sviluppiamo la $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ in serie di potenze attorno ai valori x_i , arrestando lo sviluppo al primo ordine³:

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial X_1}(X_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(X_2 - x_2) \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n}(X_n - x_n) \quad (7.9)$$

Prendendo il valore atteso di Q si ha, analogamente a quanto trovato nel caso di singola variabile :

$$\begin{aligned} q = \mathbb{E}[Q] &= \mathbb{E} \left[f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial X_1}(X_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(X_2 - x_2) \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n}(X_n - x_n) \right] \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Quindi, come nel caso di singola variabile, il valore atteso q della grandezza Q misurata in modo indiretto tramite la relazione (7.8) si ottiene calcolando la funzione nei valori x_i .

Per l'incertezza su q il discorso è più complesso in quanto dovremo tenere conto di eventuali correlazioni tra le incertezze sulle x_i . Iniziamo trattando il caso più semplice, ovvero quello in cui le incertezze sulle x_i *non siano correlate*, cioè $\text{Cov}[x_i, x_j] = 0$. Allora basandoci ad esempio sulla (7.3) abbiamo:

$$u_q^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 u_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 u_n^2 \quad (7.10)$$

Esempio. Riprendiamo l'esempio sulla misurazione della velocità supponendo ora che anche la misura dello spazio abbia un'incertezza non trascurabile: ($s_o \pm u_s$, con $s_o = 1.35\text{m}$ e $u_s = 0.03\text{m}$). Per ottenere l'incertezza su v calcoliamo i coefficienti di sensibilità (ovvero le derivate parziali della velocità rispetto a S e T):

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{1}{t_o} = 0.2899 \text{ s}^{-1} \quad \frac{\partial v}{\partial T} = -\frac{s_o}{t_o^2} = -0.1134 \text{ ms}^{-2} \quad (7.11)$$

quindi

$$u_q^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial S} \right)^2 u_s^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)^2 u_t^2 = \left(\frac{u_s}{t_o} \right)^2 + \left(\frac{s_o u_t}{t_o^2} \right)^2 = 1.460 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad (7.12)$$

Risultato finale:

$$v = (0.39 \pm 0.01) \text{ms}^{-1}$$

³Nell'equazione (7.9) il simbolo $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ sta per

$$\left. \frac{\partial f(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_i} \right|_{X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}$$

7.3.1 Correlazioni

Quando le grandezze aleatorie X_i sono correlate⁴ delle variabili la relazione (7.10) non è corretta in quanto, per il calcolo di $\text{Var}[Q]$, si deve tenere conto della covarianza delle coppie di variabili. Il calcolo è simile a quello eseguito nel paragrafo 5.11.1 che qui ripetiamo, supponendo che Q dipenda solo da due variabili: $Q = f(X, Y)$.

$$\begin{aligned} u_q^2 = \text{Var}[Q] &= \mathbb{E}[(f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) - f(x, y))^2] = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \mathbb{E}[(X - x)^2] + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathbb{E}[(Y - y)^2] + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \mathbb{E}[(X - x)(Y - y)] = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u_y^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \rho u_x u_y \end{aligned} \quad (7.13)$$

dove si ricorda che il coefficiente di correlazione ρ , è dato da:

$$\rho = \frac{\text{Cov}[u_x, u_y]}{u_x u_y}$$

Il valore del coefficiente di correlazione (o della covarianza) tra le incertezze di due grandezze spesso è di difficile valutazione, tuttavia nei casi che possono essere assimilati al seguente esempio il coefficiente di correlazione può essere valutato a circa 1 (grandezze completamente correlate).

Esempio. Supponiamo di utilizzare uno strumento di misura, per fissare le idee una bilancia, nel cui manuale d'uso è indicato che l'incertezza standard da attribuire alla misura è 1% del valore letto, quindi l'incertezza su una misurazione m si può scrivere: $u = \alpha m$ con $\alpha = 0.01$. Con questo strumento si eseguono le misurazioni di due masse differenti con i risultati $m_1 = 22.4 \text{ g}$ e $m_2 = 22.1 \text{ g}$. Ci proponiamo di valutare l'incertezza da assegnare alla grandezza fisica somma delle due masse: $M = m_1 + m_2$. Poiché utilizziamo un determinato strumento (proprio quello) e le due misure, avendo valori prossimi, sono fortemente correlate (entrambe inferiori o entrambe superiori al "valore vero") e il coefficiente di correlazione può essere assunto unitario ($\rho = 1$). Appliciamo ora la (7.13) con $\rho = 1$, ponendo $u_1 = \alpha m_1$ e $u_2 = \alpha m_2$ per le incertezze sulle due misurazioni. Si ha:

$$\begin{aligned} u_M^2 &= \left(\frac{\partial M}{\partial m_1}\right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m_2}\right)^2 u_2^2 + 2 \frac{\partial M}{\partial m_1} \frac{\partial M}{\partial m_2} u_1 u_2 \\ &= \alpha^2 m_1^2 + \alpha^2 m_2^2 + 2 \alpha^2 m_1 m_2 = \alpha^2 (m_1 + m_2)^2 \\ &= (0.01)^2 (44.5)^2 = 0.198 \text{ g}^2 \end{aligned}$$

Si noti che l'incertezza su M così calcolata è maggiore di quella che si calcola quando le due misure non sono correlate: $\rho = 0$ (ad esempio se le misure fossero state eseguite con due strumenti differenti).

Completiamo l'esempio precedente esaminando il caso in cui sono presenti in una misurazione contemporaneamente incertezze correlate e incertezze non correlate. Supponiamo allo scopo, che la bilancia con cui sono state eseguite le pesate sia di tipo digitale con un *display* a tre cifre con una sensibilità di 0.1 g. Questo implica che i centesimi di grammo nella misura

⁴La correlazione che qui si intende è quella tra gli *errori* delle misurazioni, così come sono stati definiti nella (3.1) del capitolo 3.

delle masse sono ignoti e danno quindi una incertezza standard pari $(0.1/\sqrt{12})$ g (legata alla distribuzione uniforme). Questa incertezza andrà aggiunta in quadratura a quella dovuta alla calibrazione sull'incertezza delle singole misurazioni:

$$u_1^2 = \alpha^2 m_1^2 + \frac{0.01}{12} \quad u_2^2 = \alpha^2 m_2^2 + \frac{0.01}{12}$$

Il calcolo dell'incertezza su M in questo caso si scrive come:

$$\begin{aligned} u_M^2 &= \left(\frac{\partial M}{\partial m_1}\right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m_2}\right)^2 u_2^2 + 2 \frac{\partial M}{\partial m_1} \frac{\partial M}{\partial m_2} \alpha^2 m_1 m_2 \\ &= \alpha^2 m_1^2 + \frac{0.01}{12} + \alpha^2 m_2^2 + \frac{0.01}{12} + 2\alpha^2 m_1 m_2 = \alpha^2 (m_1 + m_2)^2 + \frac{0.01}{6} \\ &= (0.01)^2 (44.5)^2 + 1.667 \times 10^{-3} = 0.200 \text{ g}^2 \end{aligned}$$

Questo valore non è molto diverso da quello precedentemente ottenuto essendo la correzione introdotta quasi trascurabile. Tuttavia non sempre è così; infatti se cerchiamo l'incertezza sulla differenza delle due misure di massa: $\Delta m = m_1 - m_2$, otteniamo:

$$\begin{aligned} u_{\Delta m}^2 &= \left(\frac{\partial \Delta m}{\partial m_1}\right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial \Delta m}{\partial m_2}\right)^2 u_2^2 + 2 \frac{\partial \Delta m}{\partial m_1} \frac{\partial \Delta m}{\partial m_2} \alpha^2 m_1 m_2 \\ &= \alpha^2 m_1^2 + \frac{0.01}{12} + \alpha^2 m_2^2 + \frac{0.01}{12} - 2\alpha^2 m_1 m_2 = \alpha^2 (m_1 - m_2)^2 + \frac{0.01}{6} \\ &= (0.01)^2 (0.3)^2 + 1.667 \times 10^{-3} = 1.676 \times 10^{-3} \text{ g}^2 \end{aligned}$$

Nel caso appena esaminato il contributo all'incertezza dovuto alla risoluzione dello strumento è quello dominante!

7.3.2 Correlazioni tra più di due variabili

Estendiamo a più di due variabili i risultati sulla correlazione ottenuti nel precedente paragrafo. Calcoliamo la varianza di Q data dall'espressione (7.9). Si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[Q] &= \mathbb{E}[(Q - q)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_i^n \frac{\partial f}{\partial X_i} (X - x_i)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{ij}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) (X - x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial X_j}\right) (X - x_j)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 (X - x_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} (X - x_i)(X - x_j)\right] = \\ &= \sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \mathbb{C}\text{ov}[x_i x_j] = \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$= \sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \rho_{ij} u_i u_j = \quad (7.15)$$

Nell'equazione (7.14) si è usata la cosiddetta *matrice di covarianza* definita da:

$$\mathbb{C}\text{ov}[x_i x_j] = \mathbb{E}[(X - x_i)(X - x_j)]$$

E' facile verificare che la matrice di covarianza è simmetrica: $\mathbb{C}\text{ov}[x_i x_j] = \mathbb{C}\text{ov}[x_j x_i]$ e che i termini diagonali della matrice di covarianza coincidono con la varianza delle singole variabili:

$\text{Cov}[x_i x_i] = u_i^2$. Il coefficiente di correlazione ρ_{ij} tra le variabili x_i e x_j che appare nella (7.15) è definito in modo analogo a quello per due variabili:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}[x_i x_j]}{u_i u_j}$$

7.4 Incertezza combinata per espressioni monomie

In molte circostanze la relazione funzionale espressa dalla (7.8) si scrive con un'espressione monomia del tipo:

$$Q = c X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_N^{p_N} \quad (7.16)$$

con c costante; se gli esponenti nella (7.16) sono privi di incertezze l'espressione della varianza stimata relativa di q si semplifica e si dimostra facilmente⁵ che, per variabili X_i *indipendenti*, vale la relazione:

$$\frac{u_q}{q} = \sqrt{\sum_i^N \left(p_i \frac{u_i}{x_i} \right)^2} \quad (7.17)$$

Dove con x_i sono indicati i valori attesi delle X_i . La (7.17) mostra che l'incertezza relativa della grandezza q è la radice della somma in quadratura delle incertezze relative delle x_i pesate per il valore dell'esponente. L'incertezza relativa è molto spesso il modo più efficace per valutare la qualità di una misurazione ed essendo adimensionale permette di confrontare la qualità di misurazioni di grandezze non omogenee. Il valore della deviazione standard di q si ottiene moltiplicando il membro di destra della (7.17) per q .

⁵Per ottenere il risultato, lasciato come utile esercizio al lettore, si può procedere sia applicando la (7.10) alla (7.16) oppure più direttamente calcolando la varianza del logaritmo di Q .