

## Capitolo 3

# Errori e Incertezze di Misura

### 3.1 Introduzione

L'esperienza dimostra che nessuna misura, per quanto accurata, può essere completamente libera da "errori". Qui la parola "errore" non ha il significato della conseguenza di un comportamento negligente o non attento di chi esegue la misurazione, ma è il sovrapporsi di numerosissimi effetti fisici che si sommano o si sottraggono in modo imprevedibile alla grandezza che si sta misurando. Ne consegue che il risultato di una misurazione è solo una approssimazione o una stima del valore associato alla grandezza oggetto della misurazione, ovvero il *misurando*. Quindi per determinare la qualità della misura ottenuta e per rendere significativo il confronto della misurazione effettuata con altre misurazioni della stessa grandezza è necessario associare alla misura un valore, detto **incertezza di misura**, che descrive il grado di accuratezza e precisione con cui la grandezza è nota. In questo capitolo saranno introdotti i concetti di errore e di incertezza di misura con le loro classificazioni<sup>1</sup>.

### 3.2 Definizione di Errore di misura

Nel paragrafo precedente sono stati introdotti i termini di *errore di misura* e di *incertezza*, che per quanto indichino quantità evidentemente connesse, in teoria della misura sono due concetti ben distinti che non devono essere confusi. L'*errore di misura* è definito come la differenza tra un "valore vero" di una grandezza e la sua misura. Indicando con  $x$  il valore della misura, con  $\mu$  il suo valore vero, l'errore  $\epsilon$  è dato da:

$$\epsilon = \mu - x \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Una profonda revisione delle modalità con cui si valutavano e si esprimevano le incertezze nelle misurazioni è stata elaborata da un gruppo di lavoro formato da esperti nominati dalle più autorevoli organizzazioni mondiali di metrologia, di fisica, di chimica e dell'industria. Le organizzazioni che hanno promosso questo studio sono: il *Bureau International de Poids e Measures* (BIPM), la *International Electrotechnical Commission* (IEC), la *International Federation of Clinical Chemistry* (IFCC), la *International Organization for Standardization* (ISO), la *International Organization of Pure and Applied Chemistry* (IUPAC), la *International Organization of Pure and Applied Physics* (IUPAP) e *International Organization of Legal Metrology* (OIML). Il gruppo di esperti nominati da queste organizzazioni ha redatto un documento al titolo "*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*" [5], la cui prima edizione nel 1993 è stata pubblicata a cura del *International Organization for Standardization* (ISO). Questo documento, noto internazionalmente con l'acronimo *GUM* è divenuto il testo di riferimento sulla valutazione e sul trattamento delle incertezze nelle misure nell'ambiente scientifico, in quello della metrologia e in quello industriale. Il documento [7] pubblicato dalla NASA e reperibile in rete descrive con un certo dettaglio i cambiamenti introdotti dalla *GUM* relativi all'analisi degli errori.

Dalla sua definizione (3.1) ricaviamo che l'errore è una grandezza con segno e che è associata ad una ben identificata misura. In altre parole, due misurazioni della stessa grandezza effettuate anche una immediatamente dopo l'altra possono avere errori completamente differenti. Si noti inoltre che essendo ignoto il valore vero della grandezza anche *l'errore di misura è in grandezza inconoscibile*.

**Nota sul “valore vero”.** Nella definizione di errore si è usato l'articolo indeterminativo per sottolineare la circostanza che una grandezza può avere più “valori veri” ammissibili del misurando. Ad esempio si consideri la misurazione della lunghezza di un tavolo: all'aumentare della precisione della misura, ad esempio al di sotto del decimo di millimetro, il bordo del tavolo avrà una forma frastagliata e quindi ci saranno molti valori compatibili con la definizione di lunghezza del tavolo. Un altro tipico esempio è la misurazione dell'accelerazione di gravità  $g$ , grandezza compatibile con più valori veri; infatti  $g$ , oltre a dipendere dal punto della terra dove si esegue la misurazione dipende anche dall'effetto maree generato dalla luna e dal sole.

Tradizionalmente si classificano le componenti dell'errore come

- Errore casuale<sup>2</sup>. Deriva da variazioni imprevedibili temporali e/o spaziali delle variabili di influenza<sup>3</sup>. Tali variazioni sono tanto positive quanto negative, *in media nulle*.
- Errore sistematico<sup>4</sup>. Una variabile di influenza varia in una direzione (sistematicamente) il valore del misurando. Se analizzando i dati il fenomeno che influenza la misurazione è riconosciuto ed è possibile calcolarne l'entità allora la misura può essere corretta, ma anche la correzione avrà la sua incertezza. Ovvero *gli effetti sistematici potranno essere ridotti ma mai completamente eliminati*.

Come esempio dei concetti di errore casuale ed errore sistematico consideriamo la figura 3.1 che riporta graficamente le misurazioni di una grandezza. L'ordinata dei punti riportati nel grafico rappresenta il valore della misura e la sua ascissa rappresenta il numero progressivo della misurazione. La fluttuazione delle misure evidenzia la presenza di una componente casuale dell'errore e la conoscenza del “valore vero”, noto in quanto i dati sono simulati, mette in evidenza la presenza di un errore sistematico.

La presenza degli errori sia casuali sia sistematici nelle misurazioni inserisce nei valori misurati una indeterminazione che viene detta *incertezza* e la cui valutazione è una parte fondamentale dell'attività sperimentale.

### 3.3 Le Incertezze di misura

L'incertezza di misura, introdotta nel paragrafo precedente, caratterizza la qualità del risultato ottenuto e permette il confronto fra misure diverse della stessa grandezza e il con-

<sup>2</sup>Nei testi inglesi questo errore è detto *random error*

<sup>3</sup>Con “variabili di influenza” si intendono tutte quelle grandezze fisiche che influenzano il fenomeno che si sta osservando. Ad esempio nella misura del periodo del moto di un pendolo l'attrito della sospensione, i moti dell'aria attorno al pendolo, l'ampiezza delle vibrazioni del punto di sospensione sono tutte variabili di influenza.

<sup>4</sup>Nei testi inglesi questo errore è detto *systematic error*.

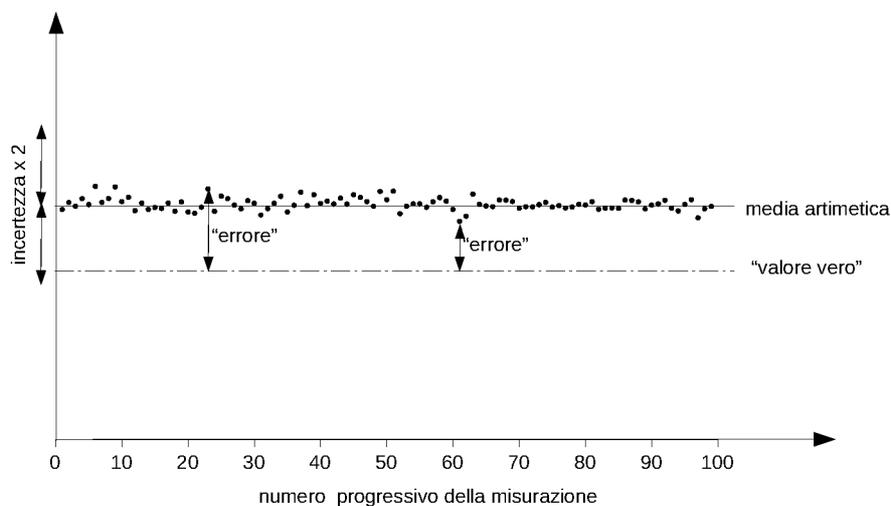


Figura 3.1: Simulazione di misure ripetute di una grandezza fittizia. L'ordinata di ogni punto rappresenta il valore della misura mentre l'ascissa è il numero d'ordine della misura. Le misure fluttuano attorno a un valore (indicato con media aritmetica) rivelando la presenza di errori casuali presenti nelle misurazioni. Poiché i dati sono simulati è possibile conoscere il "valore vero" della grandezza indicato da una linea orizzontale. Nella figura sono anche indicati due errori di due particolari misurazioni; anche gli errori come il valore vero sono inconoscibili nelle misure reali. Nella figura è indicata anche quella che potrebbe essere l'incertezza da associare alla misurazione.

fronto con le eventuali previsioni teoriche. La definizione di *incertezza di misura*, seguendo l'atteggiamento pragmatico<sup>5</sup> della GUM[5], può essere formulata nel seguente modo:

*L'incertezza è il parametro, associato con il risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.*

Il risultato di una misurazione avrà quindi la seguente espressione:

$$(x \pm u)u.m.$$

dove  $x$  è il risultato della misurazione,  $u$  è l'incertezza (standard<sup>6</sup>) che le si attribuisce e *u.m.* è l'unità di misura con cui viene espresso il risultato.

Vale inoltre la seguente regola pratica: *L'incertezza va indicata con una o massimo 2 cifre significative.* Per una nota su cifre significative, approssimazione e arrotondamento si rimanda all'appendice A.

Esempi di scrittura di risultati di una misurazione con la sua incertezza: Misure di precisione crescente del valore di una massa:

$$(10 \pm 3)kg, \quad (10.5 \pm 0.7)kg, \quad (10.58 \pm 0.06)kg \quad (3.2)$$

Si noti che il numero di cifre significative con cui si scrive il risultato deve essere coerente con il numero che rappresenta l'incertezza. Questo vuole dire non ha senso scrivere  $(10.2 \pm 3)kg$  o anche  $(10.2 \pm 0.03)kg$ .

<sup>5</sup>L'osservazione su cui si basa questo modo di procedere è che essendo l'errore, come definito dalla 3.1, *inconoscibile* non ha senso differenziarlo in casuale e sistematico. Inoltre se un effetto sistematico è riconosciuto allora si può correggerlo e quindi non dà più luogo a un errore sistematico.

<sup>6</sup>Il termine *standard* sarà chiaro dopo l'introduzione dei principi di statistica

### 3.4 Cause dell'Incertezze di misura

In questo paragrafo sono elencate le possibili cause che determinano l'incertezza nelle misurazioni. L'incertezza su una misurazione può essere generata sia da una singola di queste cause sia da una loro combinazione. Quello che segue è l'elenco delle cause riconosciute di incertezza<sup>7</sup>:

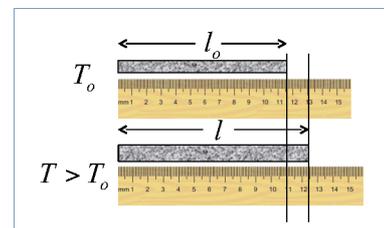
- a) Incompleta definizione del misurando
- b) Imperfetta realizzazione della definizione del misurando
- c) Campione non rappresentativo del misurando
- d) Conoscenza non adeguata degli effetti ambientali
- e) Letture errate degli strumenti analogici
- f) Risoluzione finita o soglia degli strumenti
- g) Valori non esatti dei campioni di riferimento
- h) Valori non esatti delle costanti e altri parametri
- i) Approssimazioni e assunzioni usate nella misurazione
- j) Variazioni in osservazioni sotto apparenti condizioni identiche

Ripetiamo questo elenco aggiungendo spiegazioni e qualche esempio.

- (a) Incompleta definizione del misurando Non sempre la definizione del misurando è sufficiente a definirlo in modo non ambiguo. Esempio: L'accelerazione di gravità al livello del mare; infatti l'accelerazione di gravità dipende almeno dalla latitudine.
- (b) Imperfetta realizzazione della definizione del misurando Esempio 1. Calore specifico dell'acqua. Quanto è puro il campione che si è scelto per la misurazione? Esempio 2. Accelerazione di un grave nel vuoto. Quanto è veramente «vuoto» il volume in cui si effettua la misura?
- (c) Campione non rappresentativo del misurando Esempio 1. Datazione con il <sup>14</sup>C di un reperto dal quale si preleva un campione che può non essere rappresentativo dell'oggetto (si consideri la storia dell'analisi con il <sup>14</sup>C della sindone). Esempio 2. Sondaggi effettuati su un campione ed estrapolati a tutta la popolazione.
- (d) Imperfetta conoscenza delle condizioni ambientali. Esempio: la temperatura è una *variabile di influenza* che spesso influenza le misurazioni di precisione delle lunghezze come illustrato in figura

$$l = l_o \frac{1 + \alpha_x(T - T_o)}{1 + \alpha_M(T - T_o)}$$

$\alpha_x$  e  $\alpha_M$  sono i coefficienti di dilatazione rispettivamente del misurando e del metro.



- (e) Letture errate degli strumenti analogici La lettura degli indici degli strumenti analogici dipende dalla acuità visiva dello sperimentatore ed è inoltre soggetta ad errori di parallasse. Ne segue che l'incertezza da associare ad una misura non dipende unicamente dallo strumento

<sup>7</sup>La classificazione presentata è riportata dalla GUM [5]

- (f) Risoluzione finita o soglia degli strumenti Esempio. Uno strumento digitale non può distinguere misure che differiscono meno della cifra meno significativa mostrata.
- (g) Valori non esatti dei campioni di riferimento I campioni di riferimento possono variare nel tempo, come le varie copie del “chilogrammo campione” di platino-iridio che, in modo tuttora non compreso, accrescono la loro massa.
- (h) Valori non esatti delle costanti e altri parametri Nel ottenere il valore di una misura spesso si utilizzano dati di riferimento, presi da libri o articoli, la cui incertezza si *propaga* sulla misura.
- (i) Approssimazioni e assunzioni usate nella misurazione. Esempio: il periodo  $T$  di un pendolo semplice è indipendente dall'ampiezza angolare di oscillazione  $\alpha$  solo se l'angolo tende a zero. La formula della correzione è nota e se è stata misurata l'ampiezza dell'oscillazione si può applicare la correzione ( $T = T(\alpha)$ ). Comunque anche sulla correzione applicata sarà presente un'incertezza della quale si dovrà tenere conto.
- (j) Variazioni in osservazioni sotto condizioni apparentemente identiche. Tutte le cause di incertezze elencate a) a i) contribuiscono a questa voce e danno origine a quella che è detta incertezza casuale.

### 3.5 Incertezza relativa

Un indicazione della qualità di una misura è data, oltre che dal valore dell'incertezza assoluta  $u_x$ , dal rapporto tra l'incertezza  $u_x$  e il valore della misura  $x_o$ .

$$\frac{u_x}{x_o}$$

Questa quantità prende il nome di *incertezza relativa* ed è ovviamente un numero puro e positivo. Spesso viene espresso in percentuale. Per comprendere la rilevanza dell'incertezza relativa si consideri ad esempio che in una misura di lunghezza, un'incertezza  $u = 1$  mm su una misura  $x_o = 1$  cm ha un significato del tutto differente se la misura fosse  $x_o = 1$  m; nel primo caso abbiamo un'incertezza relativa del 10% nel secondo caso l'incertezza relativa è 0.1%, cento volte più piccola. Come ulteriore esempio consideriamo le misure indicate nella (3.2) in cui le incertezze sono indicate in modo assoluto:

$$(10 \pm 3)\text{kg}, \quad (10.5 \pm 0.7)\text{kg}, \quad (10.58 \pm 0.06)\text{kg} \quad (3.3)$$

Esprimendo le stesse incertezze in modo relativo otteniamo:

$$10\text{kg} \pm 0.30, \quad 10.5\text{kg} \pm 0.066, \quad 10.58\text{kg} \pm 0.0057$$

oppure con l'uso del per cento:

$$10\text{kg} \pm 30\%, \quad 10.5\text{kg} \pm 6.6\%, \quad 10.58\text{kg} \pm 0.57\%$$

### 3.6 Classificazione delle Incertezze - Tipo A e Tipo B

La classificazione degli errori in casuali e sistematici, data nel paragrafo precedente, era l'unica utilizzata fino a che gli autori della *GUM* nel 1993 non misero in evidenza l'ambiguità

di tale classificazione<sup>8</sup>. Infatti una componente di incertezza che viene considerata di natura sistematica in un certo esperimento può diventare casuale in un altro esperimento e viceversa. Ad esempio se misuriamo una tensione elettrica con uno specifico voltmetro<sup>9</sup>, la taratura del voltmetro dà origine ad un errore sistematico da associare alla misura mentre se si confrontano misure della stessa tensione con esemplari diversi dello stesso voltmetro (stesso costruttore e stesso modello) l'errore sarà casuale.

Secondo le raccomandazioni degli organismi internazionali competenti contenute nella *GUM*, le incertezze nelle misurazioni si devono classificare, piuttosto che risalendo alla loro origine (casuale o sistematica che come abbiamo visto è ambigua), in modo più pragmatico e operativo secondo *il metodo con cui si stimano*. Seguendo questa indicazione si sono individuati due tipi di incertezze che sono state chiamate incertezze di "Tipo A" e di "Tipo B":

- **Incetezza di Tipo A** quando è calcolata utilizzando con metodi statistici
- **Incetezza di Tipo B** quando è valutata con metodi non statistici.

Prima di dare i primi elementi su come valutare queste incertezze è bene sottolineare che spesso in una misurazione sono presenti entrambi; si veda ad esempio la figura 3.1.

**Incetezze di Tipo A.** La valutazione dell'incetezza nella categoria A si applica quando sono state eseguite un numero adeguato di misurazioni indipendenti di una grandezza  $X$  sotto le stesse (apparenti) condizioni i cui valori sono diversi tra loro. Siano  $x_1, x_2, \dots, x_N$  gli  $N$  valori osservati. Se la misurazione ha una risoluzione sufficiente i valori misurati non saranno tutti uguali. Come sarà giustificato ampiamente nel seguito la *migliore stima* del valore della grandezza  $X$  è data dalla *media aritmetica* delle osservazioni individuali:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.4)$$

La stima quantitativa della fluttuazione del valore della singola misura  $x_i$  attorno alla media aritmetica (3.4) è data dalla seguente espressione:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.5)$$

La grandezza  $s$  è detta *stima della deviazione standard* e, se non ci sono altre cause di incetezza sulla  $x$ , rappresenta l'incetezza  $u(x)$  della  $x$ . Torneremo su queste formule dopo avere introdotto i principi di base del calcolo delle probabilità e della statistica. Quello che qui si vuole sottolineare è che la valutazione delle incetezze per le misurazioni con variazioni casuali si esegue attraverso formule fornite dal calcolo delle probabilità e la statistica come le relazioni (3.4) e (3.5).

<sup>8</sup>La modalità usata nelle misurazioni prima della revisione critica contenuta nella *GUM*, e tuttora usata anche in qualche ambito scientifico (non di metrologia) prevedeva l'uso dell'errore casuale come incetezza da associare alla misura mentre per gli errori sistematici venivano suggeriti trattamenti *ad hoc* per la loro riduzione fino a renderli non rilevanti nella misurazione

<sup>9</sup>Cioè proprio quello che abbiamo per le mani!

**Incertezze di Tipo B.** Diversamente dal caso precedente, nella esecuzione di una misurazione può succedere che la misura si ripeta uguale a se stessa. Ad esempio se misuriamo la tensione di una batteria carica con un voltmetro digitale otteniamo sempre lo stesso valore. In questi casi in cui non si possono applicare i metodi statistici si parla di incertezze di tipo B. Se il valore di una grandezza non è stato ottenuto da osservazioni ripetute la valutazione della incertezza da associare alla misura va ottenuta principalmente da:

- dati di misurazioni precedenti
- esperienza o conoscenza delle caratteristiche e proprietà dei materiali rilevanti e degli strumenti
- specifiche tecniche del costruttore degli strumenti utilizzati
- taratura della strumentazione
- incertezze prese da manuali di riferimento.

La valutazione di questo tipo di incertezze è un processo meno automatico e spesso più difficile rispetto a quello che si esegue per la valutazione delle incertezze di tipo A e richiede una adeguata analisi della situazione sperimentale e della strumentazione utilizzata.

La lista delle cause che generano le incertezze di misura è riportata nel paragrafo 3.4 in fondo a questo capitolo.

Per concludere è istruttivo riportare la versione originale del commento che appare nella GUM [5] sull'importanza della valutazione delle incertezze nelle operazioni di misurazione:

*Although this Guide provides a framework for assessing uncertainty, it cannot substitute for critical thinking, intellectual honesty, and professional skill. The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement. The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depend on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value.*

## 3.7 Misurazioni

In questo paragrafo mostriamo alcuni esempi che illustrano la modalità con cui si eseguono le misurazioni e nei quali si applicano le definizioni relative all'incertezza esposte precedentemente.

Misuriamo il periodo  $T$  di un pendolo fisico che esegua "piccole oscillazioni" che possiamo ritenere isocrone. Usando un cronometro con sensibilità di  $10 \mu s$  ed un traguardo ottico, come schematicamente indicato nella figura 3.2, eseguiamo  $N=10$  misurazioni i cui valori sono mostrati nella seguente tabella<sup>10</sup>:

---

<sup>10</sup>I dati riportati nella tabella sono stati effettivamente registrati con un pendolo reversibile e una scheda di acquisizione dati disponibili nel laboratorio di fisica del dipartimento

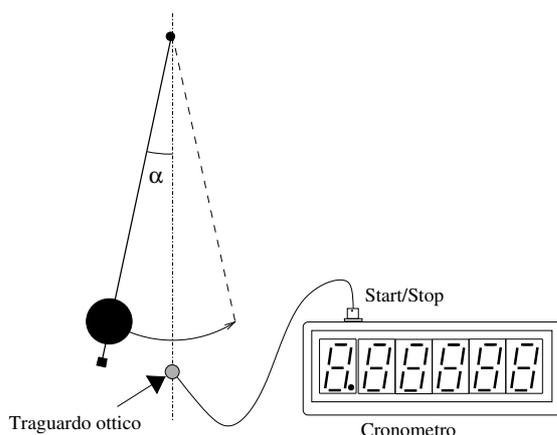


Figura 3.2: Misurazione del periodo del pendolo con un cronometro digitale e un traguardo ottico

$i$	$T_i(\text{s})$	$i$	$T_i(\text{s})$
1	1.52631	6	1.52594
2	1.52608	7	1.52592
3	1.52596	8	1.52641
4	1.52595	9	1.52596
5	1.52628	10	1.52611

osserviamo che le misure sono tutte diverse tra loro e ciascuno di questi valori è una stima del misurando. Possiamo quindi dedurre che le misurazioni del periodo siano affette da incertezze di tipo A (vedi pagina 36). Come indicato dalla relazione (3.4), la *migliore stima del misurando*  $T$  è la media aritmetica dei valori misurati:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_i^N T_i = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{10}}{N} = 1.526092 \text{ s} \quad (3.6)$$

La stima dell'incertezza su  $T_i$  è, per la (3.5) :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i^N (T_i - \bar{T})^2} = 0.000184 \text{ s} \quad (3.7)$$

la (3.7) è l'incertezza di tipo A della singola misura  $T_i$  che è la valutazione quantitativa dello sparpagliamento dei dati attorno alla loro media aritmetica ( $\bar{T}$ ). L'incertezza sulla media  $\bar{T}$ , come ci si può aspettare, diminuisce al crescere di  $N$  e vale  $s/\sqrt{N}$  (anche su questo importante risultato torneremo in seguito). Il risultato finale sarà quindi:

$$T = (1.52609 \pm 0.00006) \text{ s} \quad (3.8)$$

Non tutte le misure si presentano come quella che abbiamo appena descritto; in molte la trattazione statistica che abbiamo accennato nell'esempio precedente (e che verrà approfondita nei prossimi capitoli) non può essere applicata. A proposito si veda il prossimo esempio.

**Esempio 2 - Incertezza di tipo B.** Se il cronometro utilizzato nella misura dell'esempio precedente fosse stato meno sensibile, per fissare le idee con una risoluzione di 0.01 s, le 10

misurazioni avrebbero dato 10 valori tutti uguali e pari a  $T = 1.52\text{ s}$  e non avrebbe senso applicare i metodi statistici come nell'esempio precedente. Ovviamente il fatto che tutte le misurazioni abbiano dato lo stesso risultato non ci autorizza ad affermare che siano prive di incertezza. Infatti questo è uno dei casi in cui l'incertezza da associare al risultato della misurazione è di tipo B. Tenendo conto delle cifre significative fornite dalla strumentazione e che le misure acquisite non variano, possiamo dedurre che il periodo del pendolo  $T$  è compreso con probabilità uniforme nell'intervallo  $T_1 = 1.52\text{ s}$  e  $T_2 = 1.53\text{ s}$ . Vedremo nel seguito che in questi casi si associa alla misura un'incertezza standard pari a  $(T_2 - T_1)/\sqrt{12}$  (Vedi il paragrafo 5.9.1). Quindi in questo caso il risultato della misurazione sarà:

$$T = (1.525 \pm 0.003)\text{s} \quad (3.9)$$

C'è un ulteriore tipo di incertezza che è stata trascurata e che invece è presente in entrambi gli esempi illustrati; questa incertezza è legata alla *qualità* dei cronometri utilizzati. Entrambi gli strumenti usati per le misurazioni nei due esempi devono essere stati tarati e le incertezze di taratura, ricavate dai manuali d'uso, potrebbero contribuire, anche in modo significativo, all'incertezza totale delle misurazioni.