

Capitolo 1

Grandezze Fisiche

1.1 Il metodo scientifico

L'espressione "metodo scientifico" indica la modalità con cui la scienza procede per acquisire la conoscenza della realtà del mondo fisico. Tale metodo cerca di arrivare ad una conoscenza che sia quanto più possibile oggettiva, verificabile e condivisibile. Le basi del metodo scientifico sono state gettate nel 16° secolo da Galileo Galilei e da Francesco Bacone. Esso consiste, da una parte, nella raccolta di dati empirici sotto la guida delle ipotesi e teorie da vagliare; dall'altra in una rigorosa analisi di questi dati, quest'ultima basata sul calcolo delle probabilità e sui metodi statistici. Il metodo scientifico non è un processo semplice e lineare, ma procede seguendo il modo complesso e alla volte involuto con cui procede la ricerca scientifica nella realtà. Tuttavia si possono definire, anche nella complessità di questo processo, quattro fasi fondamentali che caratterizzano il metodo scientifico:

1. Osservazione e descrizione di un fenomeno. Tipicamente si tratta di fenomeni generati con modalità ripetibili in laboratorio, come l'esperimento di Rutherford detto della sfoglia d'oro, che ha messo in evidenza la struttura degli atomi¹, oppure può essere un fenomeno naturale impossibile da riprodurre in laboratorio, come l'esplosione di una stella o la variazione della temperatura della terra. In questa fase si individuano le grandezze rilevanti per la descrizione del fenomeno e si definiscono le procedure per la loro misurazione.
2. Formulazione di una ipotesi. Si propone un'ipotesi che possa spiegare il fenomeno in esame tramite una legge matematica che leghi le grandezze osservate, che sia in grado giustificare fenomeni analoghi a quello studiato e che sia in grado di prevedere nuovi fenomeni.
3. Se i dati sperimentali non soddisfano alle previsioni del modello, il modello deve essere rigettato o modificato e si torna al punto 2.
4. Formulazione una teoria basata sulla verifica ripetuta dei risultati ottenuti.

L'intento di queste note è quello di introdurre lo studente che affronta l'attività sperimentale al necessario rigore metodologico che è alla base del metodo scientifico².

¹Vedi il sito: https://it.wikipedia.org/wiki/Esperimento_di_Rutherford.

²Per approfondire l'argomento sul metodo scientifico si veda ad esempio il testo [6] Cap 1.

1.2 Grandezze fisiche – Definizione operativa

Una grandezza fisica è una proprietà che caratterizza un aspetto di un fenomeno, di un corpo o di una sostanza che può essere espressa quantitativamente (valore della grandezza fisica) nella forma di un numero e un'unità di misura. Esempi: la massa di un oggetto: $m = 70 \text{ kg}$, un intervallo temporale di dieci secondi $\Delta t = 10 \text{ s}$, il valore della temperatura di un corpo misurato in un suo punto: $T = 36.6^\circ\text{C}$, la distanza tra la terra e la luna al perigeo: $l = 363\,104 \text{ km}$, la massa del leptone μ (una particella subnucleare): $m_\mu = 105.65837154 \text{ MeV}/c^2$ (le unità eV/c^2 sono quelle normalmente usate nell'ambito della fisica subnucleare. Espressa in chilogrammi questa massa è $1.883531594 \times 10^{-28} \text{ kg}$).

Definizione operativa di una grandezza. E' importante notare che in fisica, come in tutte le scienze sperimentali, la definizione delle grandezze deve essere una *definizione operativa*³ ovvero dalla definizione si deve poter ottenere una successione di operazioni che permettano di eseguire una *misurazione affidabile e ripetibile* della grandezza che è stata definita.

La definizione operativa di una grandezza dà l'occasione di evidenziare la differenza concettuale che può esistere tra la definizione matematica e quella fisica di una grandezza. Consideriamo la definizione di angolo piano, grandezza comunemente usata sia in matematica sia in fisica. La definizione matematica di angolo è (vedi ad esempio Wikipedia):

Si definisce angolo la porzione di piano compresa tra due semirette aventi la stessa origine.

Questa definizione, per quanto rigorosa e non ambigua, è insoddisfacente dal punto di vista fisico, infatti da essa non si può ricavare alcuna indicazione su come procedere per la misurazione degli angoli! In fisica si preferisce definire l'angolo piano nel seguente modo:

si definisce angolo il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza compresa tra le due semirette con il suo raggio di un cerchio il cui centro è nel vertice dell'angolo (vedi la figura 1.1).

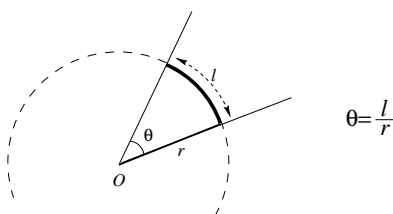


Figura 1.1: Definizione operativa di angolo piano

Come è evidente questa ultima definizione delinea una procedura di misurazione dell'angolo. Basta avere un metro flessibile. E' quindi una definizione operativa di una grandezza.

³Percy W. Bridgman, premio Nobel per la fisica nel 1946, che ha coniato il termine "definizione operativa" di una grandezza, è il fondatore della teoria filosofica nota come *operazionismo* esposta nel testo "La Logica della Fisica Moderna" [3].

1.3 Grandezze Fisiche intensive ed estensive

Le grandezze fisiche possono essere classificate come estensive (o additive) oppure intensive (o non additive). Questo tipo di classificazione è legato alla modalità con cui le grandezze si compongono quando sono riferite a sistemi composti da più parti o quando un sistema è diviso in più sottosistemi. In particolare diremo che:

- Il valore di una grandezza estensiva (o additiva) è uguale alla somma dei valori di tale grandezza per tutti i sottosistemi costitutivi. Esempio: Dati due sistemi fisici di masse m_1 e m_2 , il sistema formato aggregando i due sistemi avrà una massa pari a $m_1 + m_2$, ovvero la massa è una grandezza estensiva. Altri esempi di grandezze estensive sono: il volume, la lunghezza, l'energia, l'entropia e la carica elettrica.
- Una grandezza intensiva (o non additiva) si riferisce ad una proprietà indipendente dalla estensione del sistema. Esempio: mescolando due liquidi di diversa densità, otteniamo una miscela la cui densità avrà un valore intermedio tra quelle dei liquidi separati e non dalla loro somma. Altri esempi di grandezze intensive sono: la temperatura, la pressione, il calore specifico e la costante dielettrica

1.4 Misurazioni di grandezze fisiche

Con *misurazione* si intende un procedimento con cui sia possibile assegnare sperimentalmente un valore numerico, la *misura*, ad una grandezza fisica che prende il nome di *misurando*. In generale la misurazione è soggetta ad imperfezioni che danno origine ad un errore nel risultato della misura. Ne consegue che la misura non consisterà di un singolo valore numerico ma in un intervallo di valori che saranno compatibili con il “valore vero” della grandezza fisica. Il concetto valore vero, di errore e la conseguente *incertezza* con cui conosciamo il valore della grandezza misurata saranno estensivamente trattati nel seguito. Le procedure per eseguire una misurazione variano a seconda che la grandezza fisica sia estensiva o intensiva. Infatti solo le grandezze estensive possono essere misurate in modo *diretto*, ovvero confrontando direttamente la grandezza fisica con un *campione* di riferimento mentre le grandezze intensive possono essere misurate solo in modo *indiretto*. La misurazione indiretta è utilizzata anche per le grandezze estensive quando risulti impossibile applicare quella diretta.

1.4.1 Misurazioni Dirette

Una grandezza estensiva G (ad esempio una lunghezza di un oggetto) può essere misurata direttamente tramite il confronto diretto con un'altra grandezza dello stesso tipo, U , che assumiamo come unità per le misurazioni di quella grandezza. La Misura $X(G)$ sarà allora:

$$X(G) = \frac{G}{U} \quad \text{e quindi} \quad G = XU$$

Nella figura 1.2 è mostrata la misurazione della grandezza fisica “lunghezza”, proprietà dell'oggetto (la matita), tramite il confronto diretto con una grandezza della stessa specie, il regolo graduato, considerata come unità di misura.

Si sottolinea che *la misurazione diretta è un'operazione possibile solo per variabili estensive*.

Esempi di misurazioni dirette.

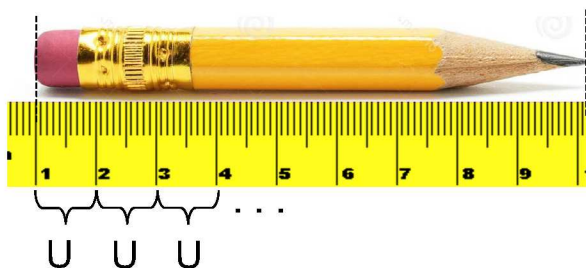


Figura 1.2: Misurazione diretta dalla lunghezza di un oggetto

- *Lunghezza di un oggetto.* Quando è possibile confrontare un oggetto con il campione di lunghezza, come mostrato in figura 1.2, stabilendo così il valore della lunghezza in termini dell'unità di misura adottata, si sta eseguendo una misurazione diretta.
- *Massa di un oggetto.* La misurazione della massa di un oggetto con una bilancia a due piatti (vedi figura 1.3) che confronta la massa dell'oggetto con masse campioni è una misurazione diretta.



Figura 1.3: Bilancia di precisione a due piatti

1.4.2 Misurazioni Indirette

La misurazione indiretta di una grandezza fisica si ottiene tramite una *relazione matematica* tra la grandezza da misurare e altre che sono state misurate in modo diretto oppure le cui misure sono state già ottenute in modo indiretto. Ovviamente la presenza di errori nelle grandezze misurate direttamente si *propaga*, come vedremo nei prossimi capitoli, anche nella misura indiretta.

Esempi di misurazioni indirette.

Velocità. La velocità media $\bar{v}$ si misura dalla relazione matematica che lega le grandezze dello spazio percorso Δx nell'intervallo temporale Δt (entrambe possono essere misurate direttamente).

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Distanza di una stella "vicina". La misurazione delle lunghezze si può effettuare in modo diretto solo quando non è né troppo piccola né troppo grande per poter essere confrontata

direttamente con il campione di lunghezza. Negli altri casi si deve ricorrere a metodi indiretti di misurazione come accade per la misurazione della distanza di stelle vicine con il metodo della parallasse. Il metodo consiste nella misurazione dello spostamento angolare di una stella rispetto a quelle “lontane” dopo un intervallo temporale di sei mesi, come schematizzato nella figura 1.4. Se p è l'angolo di parallasse e R indica il raggio dell'orbita terrestre, allora la distanza d della stella è data da:

$$d = \frac{R}{\tan p}$$

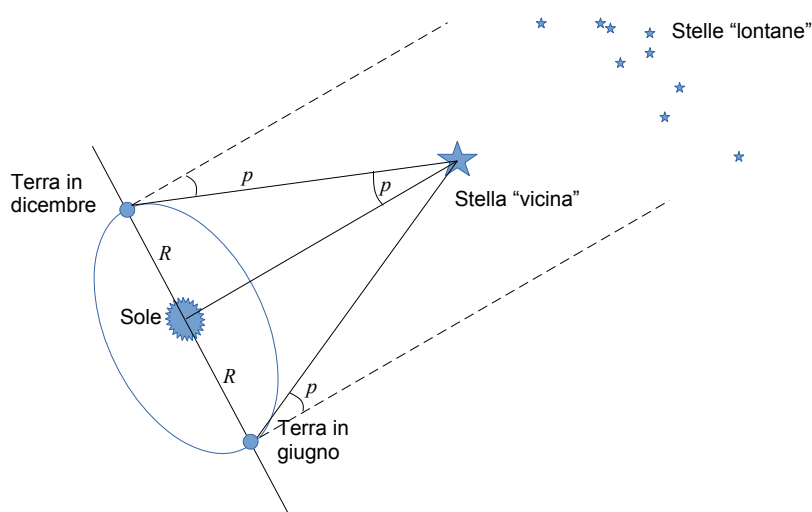


Figura 1.4: Misurazione indiretta della distanza di una stella “vicina” con il metodo della parallasse. Le linee tratteggiate rappresentano l'angolo di vista delle stelle *lontane*, che possono essere ritenute fisse e la cui posizione non dipende dalla posizione della Terra nella sua orbita

Misura della temperatura. La temperatura è una grandezza intensiva e può essere misurata solo in modo indiretto. Uno dei modi usati per la misura di questa grandezza fisica è quello di sfruttare il noto fenomeno della dilatazione termica dei corpi. Una sostanza, ad esempio il mercurio, aumenta le sue dimensioni lineari con la temperatura, secondo la legge:

$$L(T) = L(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)]$$

dove $L(T)$ è la lunghezza della sostanza alla temperatura T e α è il coefficiente di dilatazione termica caratteristico della sostanza. Sfruttando questa relazione da una misura di lunghezza si risale a quella della temperatura. Per effettuare la misurazione della temperatura è tuttavia necessario tarare la scala scegliendo almeno due valori di temperatura da assegnare a opportuni stati fisici⁴ come ad esempio una miscela di acqua e ghiaccio e dell'acqua in ebollizione il tutto alla pressione atmosferica.

1.5 Grandezze Fisiche di Base e Derivate

La descrizione dei fenomeni fisici noti richiede l'uso di molte grandezze, estensive e intensive, collegate da relazioni matematiche.

⁴Per la definizione dell'unità nel SI della temperatura vedi il paragrafo 1.6.1.

In linea di principio si potrebbe assegnare un'unità di misura per ogni grandezza estensiva. Questa scelta avrebbe come conseguenza l'uso di numerosi coefficienti di proporzionalità che complicherebbero le formule. Ad esempio se per la misura delle lunghezze usassimo i metri (m) e per la misura del volume i galloni U.S. (gal), il volume V di un cubo di lato x sarebbe dato da $V = 264.1 \times x^3$, dove x è espresso in metri e V in galloni e 264.1 è un fattore di conversione tra m^3 e gal. Si comprende l'uso di queste unità (m) e (gal), che non sono *coerenti*, complica le formule e quindi non è conveniente.

Per semplificare le relazioni (ovvero ridurre il numero dei fattori di proporzionalità è conveniente scegliere (arbitrariamente) le *unità di misura di un limitato numero di grandezze dette di base*; le unità delle altre grandezze che sono dette derivate deriveranno dalle relazioni matematiche che le definiscono.

Si noti che si può dimostrare che bastano solo 4 grandezze di base per descrivere tutte le grandezze fisiche (3 se ci limitasse alla meccanica). Tuttavia per ragioni di convenienza e di praticità, come vedremo, sono state scelte 7 grandezze di base.

Esempi di grandezze fisiche derivate:

1. La velocità (in una dimensione) è definita dalla relazione:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Scegliendo come grandezze di base lo spazio misurato in metri e il tempo misurato in secondi, il valore unitario della velocità è un metro al secondo (non ha un nome specifico).

2. La forza (in una dimensione) è definita dalla relazione

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Scegliendo come grandezze di base la lunghezza misurata in metri, il tempo misurato in secondi e la massa misurata in chilogrammi il valore unitario della forza è

$$\text{unità di Forza} = \frac{1\text{chilogrammo} \times 1\text{metro}}{1 \text{ secondo al quadrato}} \equiv \text{newton} = \text{N} \quad (1.1)$$

che prende il nome di Newton (N).

1.6 Sistemi di unità di misura

Per la costruzione di un sistema di unità di misura è necessario:

1. Scegliere una particolare partizione tra grandezze di base e grandezze derivate (Lunghezza, Tempo, Massa, velocità, accelerazione, Energia, Potenza, momento angolare,...)
2. Definire le unità standard per le grandezze di base

Un sistema di unità di misura è detto:

- Completo, quando tutte le grandezze possono essere dedotte da quelle di base
- Coerente, quando tutte le relazioni matematiche che definiscono le grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità differenti dall'unità (ad esempio, l'unità di forza, newton, definita nella (1.1) è coerente con le unità di massa, lunghezza e tempo).
- Decimale, quando tutti i multipli e sottomultipli sono potenze di 10

1.6.1 Il Sistema internazionale (SI)

Il Sistema Internazionale di unità di misura, abbreviato in SI (dal francese *Système International d'Unités*), è il sistema ufficialmente adottato nel 1960 dalla Conférence Générale des Poids et Mesures, (CGPM)⁵. Il sistema SI è stato adottato per legge sia in Europa sia in molti altri paesi nel mondo⁶ per tutte le esigenze della scienza e della tecnica⁷.

Nel SI sono state scelte, in modo logico ma arbitrario, sette grandezze fisiche, dette di base, mediante le quali tutte le altre, che si dicono derivate, possono essere definite. Le sette grandezze di base sono elencate nella tabella 1.1

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali nel Sistema Internazionale.

Grandezza Fisica	simbolo	Grandezza Fisica	simbolo
Lunghezza	[L]	Temperatura	[Θ]
Tempo	[T]	Quantità di materia	[N]
Massa	[M]	Corrente Elettrica	[I]
		Intensità luminosa	[J]

Ogni grandezza fisica di base ha per definizione la propria “*dimensione fisica*” che la caratterizza. Il significato di *dimensione fisica* sarà analizzato nell'ultimo paragrafo di questo capitolo. (analisi dimensionale)

1.6.2 Unità di Base del Sistema Internazionale

Definizioni delle unità delle grandezze fisiche di base sulle indicazioni della CGPM

- metro (m) è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a $1/299792458$ di un secondo
- chilogrammo (kg) è pari alla massa del prototipo realizzato secondo le prescrizioni del CGPM e conservato presso il museo di Sèvres. Il kg è l'unica unità di misura del SI basata su un manufatto.
- secondo (s) è la durata di 9,192,631,770 periodi della radiazione emessa nella transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale del ^{133}Cs
- kelvin (K) è la frazione $1/273.16$ della temperatura termodinamica del punti triplo dell'acqua.
- mole (mol) è la quantità di sostanza che contiene tante entità elementari, atomi o molecole, quanti sono gli atomi presenti in 12 g di ^{12}C .

⁵La CGPM è l'organizzazione intergovernativa responsabile del SI, alla quale hanno aderito circa 50 paesi. Ha la responsabilità della diffusione del SI, anche modificandolo, se necessario, in modo che rifletta i più recenti progressi nel campo della scienza e della tecnologia.

⁶Nei paesi anglosassoni sono ancora molto utilizzate come unità di lunghezza il piede pari a 30.48 cm e il pollice pari a 2.54 cm, per unità di massa la libbra 453 g

⁷Una estensiva illustrazione del Sistema Internazionale si trova nella brochure “*The International System of units (SI)*” pubblicata dal BIPM. La brochure può essere scaricata in formato pdf dal sito www.bipm.org/en/publications/si-brochure/.

- ampere (A) è l'intensità di corrente elettrica che, se mantenuta in due conduttori lineari paralleli, di lunghezza infinita e sezione trasversale trascurabile, posti a un metro di distanza l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra questi una forza pari a 2×10^{-7} N per metro di lunghezza⁸.
- candela (cd) è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette radiazione monocromatica di frequenza⁹ 540×10^{12} Hz (Hz è il simbolo dell'hertz unità di misura della frequenza) e che ha un'intensità radiante in quella direzione pari a 1/683 watt per steradiano.

Tabella 1.2: Multipli e Sottomultipli del Sistema Internazionale.

Multiplo	Prefisso	Simbolo	Sottomultiplo	Prefisso	Simbolo
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^1	deca	da	10^{-18}	atto	a

Nella tabella 1.3 sono elencate le principali grandezze derivate del SI per le quali sono stati definiti delle unità di misura con uno specifico nome.

Tabella 1.3: Sistema Internazionale - Unità di Grandezze Derivate

Grandezze derivate	Nome	Simbolo	Unità di base equivalenti
Forza	newton	N	kg m s^{-2}
Energia	joule	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Potenza	watt	W	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$
Pressione	pascal	Pa	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$
Viscosità	poiselle	Pl	$\text{kg}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$

1.6.3 I sistemi cgs

Il sistema cgs prende nome dalle iniziali delle unità fondamentali utilizzate nella meccanica: centimetro per le lunghezze, grammo per le masse e secondo per il tempo. Il SI e il cgs, per

⁸Questa definizione che è quella ufficiale di inserita nel SI è di difficile realizzazione pratica e alcuni uffici metrologici nazionali preferiscono definire al suo posto le unità di differenza di potenziale e di resistenza. La critica si basa sulla richiesta della "lunghezza infinita" del conduttore e sulla sua sezione "trascurabile"; entrambe le richieste rendono la definizione poco operativa.

⁹La frequenza scelta di 540×10^{12} Hz corrisponde ad una lunghezza d'onda pari a circa 555 nm attorno alla quale c'è la massima sensibilità dell'occhio umano.

quanto riguarda la meccanica, sono costruiti in modo identico, l'unica differenza consiste in un fattore di scala nelle unità di due delle grandezze fondamentali (lunghezza e massa).

Differentemente dal SI che introduce una grandezza fondamentale per l'elettromagnetismo, l'intensità di corrente, nei sistemi cgs le grandezze elettromagnetiche sono tutte derivate da quelle meccaniche e in funzione della legge utilizzata per definire le grandezze elettromagnetiche si avrà un particolare sistema cgs (cgs elettrostatico, cgs elettromagnetico, [cgs] di Gauss, ...). Questo è il motivo per cui i sistemi cgs si citano al plurale. La descrizione e lo studio di questi sistemi, in particolare quello di Gauss ancora molto usato in fisica teorica, è materia di un corso che tratti l'elettromagnetismo.

Nella tabella 1.4 sono riportate le grandezze di base del sistema cgs, con l'esclusione di quelle per le grandezze elettromagnetiche, nella tabella 1.5 sono riportate le più importanti grandezze derivate nell'ambito della meccanica e il rapporto con le unità del SI.

Tabella 1.4: Sistema cgs per la meccanica

Grandezze di Base	Nome	Simbolo	Rapporto con le unità del SI
Lunghezza	centimetro	cm	$=10^{-2}\text{m}$
Massa	grammo	g	$=10^{-3}\text{kg}$
Tempo	secondo	s	
Temperatura	kelvin	K	
Quantità di materia	mole	mol	
Intensità luminosa	candela	cd	

Tabella 1.5: Grandezze derivate del sistema cgs per la meccanica

Grandezze derivate	Nome	Simbolo e definizione	Rapporto con le unità del SI
Accelerazione	galileo	$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm s}^{-2}$	$=10^{-2}\text{m s}^{-2}$
Forza	dyne	$1 \text{ dyn} = 1\text{g cm s}^{-2}$	$= 10^{-5} \text{ N}$
Energia	erg	$1 \text{ erg} = 1\text{g cm}^2 \text{ s}^{-2}$	$=10^{-7} \text{ J}$
Potenza	–	$1 \text{ erg/s} = 1\text{g cm}^2 \text{ s}^{-2}$	$=10^{-7}\text{W}$
Pressione	baria	$1 \text{ Ba} = 1\text{dyn cm}^{-2}$	$=10^{-1}\text{Pa s}$
Viscosità	poise	$1 \text{ P} = 1\text{g cm}^{-1}\text{s}^{-1}$	$=10^{-1}\text{Pa s}$

1.6.4 Unità di misura non SI

Molte altre unità di misura “*pratiche*” sono ancora in uso nei diversi campi della fisica e della tecnica. Tra quelli più usati:

Unità di massa atomica (u) è $1/12$ della massa dell'atomo di carbonio¹⁰. $1u = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$

L'elettronvolt (eV) è un'unità di misura dell'energia molto usata in fisica atomica e in fisica delle particelle elementari. L'elettronvolt è definito come l'energia cinetica acquisita da

¹⁰Prima del 1961 questa unità era definita usando l'atomo di ossigeno ed era indicata con il simbolo “amu”, attualmente obsoleto

un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di $1V$. Il fattore di conversione con l'unità SI è: $1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$

L'**unità astronomica** (AU) è un'unità di lunghezza utilizzata nello studio dei sistemi planetari, infatti corrisponde circa alla distanza terra sole. Il fattore di conversione con l'unità SI è: $1AU = 1.496 \times 10^{11} m$.

L'**angstrom** ($\text{\AA}$) è un'unità di lunghezza in uso nella spettroscopia ottica e nella fisica atomica. Il fattore di conversione con l'unità SI è: ($1\text{\AA} = 10^{-10} m$)

1.6.5 I Sistemi di unità naturali

I sistemi di unità naturali sono basati unicamente sulle costanti fisiche universali. Ad esempio la carica elementare "e" è scelta come unità (naturale) di carica elettrica, e la velocità della luce c è scelta come unità (naturale) per le velocità. Un sistema puramente naturale di unità è definito in modo tale che ad alcune costanti fisiche universali è assegnato il valore unitario. Questa scelta ha sia aspetti positivi sia negativi: in particolare

PRO: Semplifica le espressioni matematiche delle leggi fisiche.

CONTRO: Si perde chiarezza e comprensione, poiché queste costanti vengono omesse nelle espressioni delle leggi fisiche.

1.7 Cambiamento di unità di misura – Fattori di conversione

Nella pratica accade molto spesso che il valore di una grandezza fisica sia espresso in una unità di misura, che indichiamo con u_1 , non coerente con le necessità del calcolo. Per proseguire in modo coerente nei calcoli è necessario ottenere il valore di questa grandezza espressa in un'altra unità che indichiamo con u_2 . Il passaggio tra le due unità di misura si ottiene mediante uno specifico *fattore di conversione*: $C_{u_1 \rightarrow u_2}$ che permette di passare dall'unità u_1 all'unità u_2 . ($1 \cdot u_1 = C \cdot u_2$) che si legge: "una unità u_1 è pari a C unità u_2 ". Esempio 1. Supponiamo di voler convertire una velocità espressa in miglia¹¹ (simbolo mi) all'ora (simbolo h) in metri al secondo. Supponiamo che la velocità sia $v = 50 mi/h$; dobbiamo convertire le miglia in metri e le ore in secondi. Tenendo conto che $1 mi = 1609 m$ si ha il fattore di conversione $C_{mi \rightarrow m} = 1609 m/mi$; tenendo conto che $1 h = 3600 s$ si ha il fattore di conversione $C_{h \rightarrow s} = 3600 s/h$. Sostituendo:

$$50 \frac{mi}{h} = 50 \frac{C_{mi \rightarrow m}}{C_{h \rightarrow s}} = 50 \frac{mi}{h} \times 1609 \frac{m}{mi} \times \frac{1}{3600} \frac{h}{s} = 22.35 \frac{m}{s}$$

Esempio 2. Nelle misurazioni fisiche capita con una certa frequenza di dover convertire nell'unità SI, i secondi, un intervallo temporale espresso con le unità usate nel linguaggio corrente ad esempio come 4 ore e 18 minuti e 33 secondi. Dovremo quindi risolvere la seguente equazione:

$$4 h + 18 min + 33 s = x s$$

dove x rappresenta il valore dell'intervallo temporale espresso in secondi. I fattori di conversione necessari per questa operazione sono: il fattore di conversione da ore in minuti $C_{h \rightarrow min} = 60 min/h$ e quello da minuti a secondi $C_{min \rightarrow s} = 60 s/min$; quindi:

$$(4 h \times C_{h \rightarrow min}) \times C_{min \rightarrow s} + 18 min \times C_{min \rightarrow s} + 33 s = x s$$

¹¹Il miglio è un'unità di lunghezza ancora largamente utilizzata nei paesi anglosassoni come la Gran Bretagna e gli USA.

$$\left(4 \text{ h} \times 60 \frac{\text{min}}{\text{h}}\right) \times 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} + 18 \text{ min} \times 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} + 33 \text{ s} = 15\,513 \text{ s}$$

1.8 Dimensioni fisiche e Analisi Dimensionale

Torniamo sull'esempio del paragrafo precedente, utilizzato per esemplificare il cambiamento delle unità di misura della velocità, esaminandolo da un punto di vista differente. La velocità, con le unità di misura scelte¹², ha un determinato valore numerico. Se cambiamo l'unità di misura della lunghezza dividendola per L (nell'esempio precedente si era posto $L = 1609$) e quella del tempo dividendola per T (nell'esempio precedente si era posto $T = 3600$) allora il valore numerico della velocità è moltiplicato di un fattore LT^{-1} . Analogamente, il valore numerico del volume di un parallelepipedo $V = abc$, se diminuiamo l'unità con cui si misurano le lunghezze dei lati a, b e c di un fattore L , aumenterà di un fattore L^3 . Ancora, se nella misura della densità di un corpo ($\rho = m/V$), diminuiamo l'unità di misura della massa di un fattore M e l'unità di lunghezza di un fattore L il valore numerico della densità aumenterà di un fattore ML^{-3} . Per tutte le grandezze derivate¹³ è possibile ottenere una espressione simile a quelle che sono state ottenute per la velocità, per il volume e per la densità.

Le espressioni: LT^{-1} , L^3 , ML^{-3} e quelle simili che possono essere ricavate per tutte le altre grandezze derivate, che determinano le variazioni dei valori numerici delle grandezze fisiche nel passaggio da un sistema di unità ad un altro, sono dette le dimensioni fisiche della grandezza. Così le dimensioni della velocità sono LT^{-1} quelle del volume sono L^3 e quelle della densità sono ML^{-3} .

Più in generale:

La funzione che determina il fattore di cui cambia una grandezza fisica nel passaggio da un sistema di unità di misura ad un altro è detto dimensione fisica o, più brevemente, dimensione della grandezza.

Per indicare le dimensioni fisiche di una generica grandezza G si usa racchiuderla tra parentesi quadre $[G]$. Così per la velocità si scrive $[v] = LT^{-1}$, per il volume $[V] = L^3$, per la densità $[\rho] = ML^{-3}$, eccetera. Nell'espressione delle dimensioni fisiche di una grandezza si utilizza sempre lo stesso simbolo per indicare una grandezza fisica di base: L per la lunghezza, T per il tempo e M per la massa. Le dimensioni fisiche di una fissata grandezza sono indipendenti dalla specifica formula matematica che la esprime in termini delle grandezze di base, così ad esempio se consideriamo tre volumi differenti: quello di una sfera $V_s = 4\pi r^3/3$, di un parallelepipedo $V_p = abc$ e quello di un cubo $V_c = a^3$ abbiamo $[V_s] = [V_p] = [V_c] = L^3$. Il simboli usati per le dimensioni delle grandezze fisiche di base del Sistema Internazionale sono riportate nella tabella 1.1. Nella tabella 1.6 sono riportate le dimensioni delle più comuni grandezze della meccanica nel SI.

E' importante notare che la dimensione fisica di una grandezza dipende dal sistema di unità scelto¹⁴.

Forma monomia delle dimensioni di una grandezza. Negli esempi del paragrafo precedente le dimensioni di una grandezza sono sempre espresse da una legge di potenza in forma

¹²Supponiamo che il sistema di unità che utilizziamo abbia tra le grandezze di base la lunghezza, il tempo e la massa.

¹³In un fissato sistema in cui siano state definite le grandezze di base.

¹⁴Ad esempio in un sistema nel quale le grandezze di base sono lunghezza, massa e tempo, la dimensione della densità è $[\rho] = ML^{-3}$, mentre in un sistema nel quale le grandezze di base sono lunghezza, forza e tempo, la dimensione della densità è $[\rho] = L^{-4}FT^2$

Tabella 1.6: Unità di misura e dimensioni di alcune grandezze meccaniche

Grandezza Derivata	Simbolo	Unità di misura	Dimensione
accelerazione	a	m/s^2	LT^{-2}
angolo piano	$\alpha, \beta, \dots, \theta, \phi$	rad	1
angolo solido	Ω	sr	1
area	A, S	m^2	L^2
densità	ρ	kg/m^3	ML^{-3}
energia, lavoro	E, L	J	ML^2T^{-2}
forza	F	N	MLT^{-2}
frequenza	f, ν	Hz	T^{-1}
momento meccanico		$\text{kg m}^2/\text{s}^2$	ML^2T^{-2}
potenza	P, W	W	ML^2T^{-3}
pressione	p	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
velocità	v	m/s	LT^{-1}
velocità angolare	Ω		T^{-1}
volume	V	m^3	L^3

monomia delle “dimensioni” delle grandezze di base. Questa affermazione è generalizzabile, e quindi le dimensioni fisiche di qualsiasi grandezza Q , si esprimono come:

$$[Q] = L^a T^b M^c \quad (1.2)$$

dove gli esponenti a, b, c sono numeri razionali positivi o negativi. La forma monomia espressa dalla relazione (1.2) è conseguenza dell'importante principio che afferma che il rapporto di due realizzazioni di una stessa grandezza fisica deve essere indipendente dall'unità di misura scelta delle grandezze di base usate per definirla¹⁵.

Esercizio. Trovare le dimensioni fisiche della costante elastica k di una molla. La forza esercitata da una molla su un punto materiale di massa m si esprime come: $F = -k\Delta x$ dove Δx è l'allungamento della molla. Per la seconda legge di Newton si ha:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k\Delta x$$

Prendendo le dimensioni fisiche dei due membri:

$$\left[m \frac{d^2 x}{dt^2} \right] = MLT^{-2} = [k\Delta x] = [k]L, \quad \text{da cui } [k] = MT^{-2} \quad (1.3)$$

Esercizio. Trovare le dimensioni fisiche della costante di gravitazione universale.

Per la legge di gravitazione universale di Newton la forza F che si esercita tra due masse puntiformi m_1 e m_2 distanti fra loro r è (in modulo)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è la *costante di gravitazione universale*. Per trovare le dimensioni fisiche di G è opportuno riscrivere la formula precedente nel seguente modo:

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

¹⁵La dimostrazione della relazione (1.2) è reperibile nei testi [10] oppure [1]

Passando alle dimensioni si ha:

$$[G] = \frac{[F][r^2]}{[m_1][m_2]} = MLT^{-2} L^2 M^{-2} = L^3 T^{-2} M^{-1} \quad (1.4)$$

1.8.1 Analisi dimensionale e sue applicazioni

Le grandezze fisiche con le stesse dimensioni sono dette *omogenee*. Solo grandezze omogenee possono essere sommate o comparate

1.8.2 Controllo delle formule con l'Analisi Dimensionale.

Le dimensioni fisiche delle grandezze a destra e sinistra del segno di uguale debbono essere le stesse, così come la loro somma è lecita solo se hanno le stesse dimensioni. Se le dimensioni sono differenti la formula è sicuramente errata, tuttavia *il contrario non è vero*. Per il controllo delle dimensioni è necessario scrivere le formule in modo letterale sostituendo i valori numerici solo alla fine. Come esempio si consideri il calcolo della traiettoria di un proiettile che parte dall'origine degli assi (x, y) con velocità iniziale $(v_o \cos \theta, v_o \sin \theta)$. Nella formula che dà la soluzione, riportata qui di seguito, sono stati inseriti due "errori" con l'intento di illustrare quando l'analisi dimensionale aiuta a scoprirli e quando invece non è in grado di evidenziarli.

$$\text{Formula con 2 errori} \quad y = \frac{g}{2v_o \cos^2} x^2 + x \sin \theta$$

Il lettore verifichi che il primo termine a destra del segno uguale non ha le dimensioni di una lunghezza come dovrebbe; anche il secondo termine per quanto dimensionalmente corretto è errato (la correzione è $\tan \theta$ al posto di $\sin \theta$).

Argomenti delle funzioni trascendenti Mediante l'analisi dimensionale si deduce che gli argomenti di tutte le funzioni trascendenti¹⁶ debbono essere *adimensionali*. Infatti le funzioni trascendenti sono esprimibili come una serie infinita di potenze crescenti dell'argomento, ovvero come una serie infinita di termini *non omogenei tra loro*. Ne consegue che l'argomento delle funzioni trascendenti deve essere un numero puro.

Come esempio consideriamo la funzione esponenziale (e^x) che descrive un'ampia classe di fenomeni fisici. Attorno a $x=0$, la funzione esponenziale ammette il seguente sviluppo in serie di potenze:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (1.5)$$

Questo sviluppo in serie conferma che x deve essere un numero puro. Infatti se x avesse una dimensione fisica, diciamo una lunghezza, nel termine di destra della (1.5) ci sarebbe la somma di un numero puro "1" con una lunghezza " x ", con un'area " x^2 " con un volume " x^3 ", cosa priva di senso. Come esempio di corretta scrittura degli argomenti delle funzioni trascendenti in fisica, consideriamo il moto armonico di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza elastica di costante k . Si dimostra che, con un'opportuna scelta delle

¹⁶Le funzioni trascendenti sono quelle funzioni non esprimibili come combinazione finita di operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza razionale). Esempi di funzioni trascendenti sono $\log(x)$, e^x , tutte le funzioni trigonometriche, $\sin x, \cos x, \dots$ e tutte le funzioni che li contengono. Tali funzioni sono esprimibili in termini algebrici solo come una *serie infinita*

condizioni iniziali, la posizione $x(t)$ del punto materiale in funzione del tempo t si esprime in termini della funzione seno come:

$$x(t) = X_o \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Si verifica facilmente, utilizzando la (1.3), che l'argomento della funzione seno $(t\sqrt{k/m})$ è adimensionale. Sempre per ragioni dimensionali la costante X_o , ampiezza massima delle oscillazioni, deve avere le stesse dimensioni di $x(t)$, una lunghezza.

1.8.3 Deduzioni di leggi fisiche

In alcune circostanze l'analisi dimensionale permette di dedurre la forma delle leggi fisiche. L'analisi dimensionale permette di trovare soltanto la dipendenza dalle variabili con dimensioni fisiche mentre non può determinare le costanti adimensionali. Esaminiamo alcuni esempi.

Periodo di oscillazione del pendolo. Consideriamo un pendolo di lunghezza l di massa m in un campo gravitazionale g , e ci chiediamo quale sia l'espressione del periodo di oscillazione del pendolo. Per la soluzione di questo problema abbiamo a disposizione le tre grandezze fisiche l , m e g . Cerchiamo quindi di ottenere una grandezza con le dimensioni di un tempo utilizzando le sole grandezze a disposizione. Scriviamo quindi l'equazione dimensionale:

$$T = [l]^\alpha [m]^\beta [g]^\gamma = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\gamma} M^\beta T^{-2\gamma}$$

Dove compaiono tutte le grandezze a disposizione e le potenze a cui sono elevate α , β e γ sono incognite da determinare. Dovendo essere uguali le dimensioni a destra e sinistra del segno uguale dovrà essere:

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad -2\gamma = 1$$

da cui

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

Con questi valori otteniamo per il periodo la nota espressione :

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove k è un fattore adimensionale che non può essere ottenuto dall'analisi dimensionale. Risolvendo il problema con il metodo "standard", ovvero risolvendo l'equazione differenziale, si ottiene $k = 2\pi$.

Deduzione della terza legge di Keplero. Consideriamo un pianeta di massa m che orbita attorno al sole la cui massa indichiamo con M ($M \gg m$). Supponiamo che la traiettoria del satellite possa essere considerata circolare¹⁷ di raggio r . Vogliamo ottenere con l'ausilio dell'analisi dimensionale il periodo di rivoluzione T del pianeta. Le grandezze fisiche da cui

¹⁷I pianeti solari hanno tutti orbite con piccolissime eccentricità, dell'ordine di ,??

dipende T sono la costante di gravitazione universale G , le cui dimensioni fisiche sono data dalla (1.4), dalla massa del sole M e dal raggio della traiettoria (si noti che la massa del pianeta non compare nelle equazioni del moto). Potremo quindi scrivere:

$$[\text{Periodo}] = T = [G]^\alpha [M]^\beta [r]^\gamma = L^{3\alpha} T^{-2\alpha} M^{-\alpha} M^\beta L^\gamma$$

Da questa eguaglianza ricaviamo il seguente sistema:

$$0 = 3\alpha + \gamma, \quad 1 = -2\alpha, \quad 0 = -\alpha + \beta$$

la cui soluzione è:

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}$$

Utilizzando queste soluzioni, il periodo del pianeta al quadrato (perché così usualmente si scrive la terza legge di Keplero) è dato da

$$T^2 = \frac{k}{GM} r^3 \quad (1.6)$$

che è proprio la terza legge di Keplero ottenuta con la sola analisi dimensionale. Nella (1.6), come nel caso precedente, k è un fattore adimensionale che non può essere ottenuto dall'analisi dimensionale. Risolvendo il problema con il metodo "standard" si ottiene $k = 2\pi$.

Dimostrazione del teorema di Pitagora. L'analisi dimensionale permette di ottenere una elegante dimostrazione del teorema di Pitagora. Consideriamo il triangolo rettangolo di figura 1.5 con c ipotenusa e a e b cateti. La conoscenza di un angolo, in figura indicato con

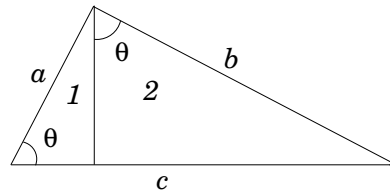


Figura 1.5

θ , e dell'ipotenusa c è sufficiente per risolvere completamente il triangolo (infatti sono noti due angoli e un lato). Quindi l'area A di questo triangolo si può esprimere come una certa funzione di c e θ : $A = \mathcal{A}'(c, \theta)$, dove $\mathcal{A}'$ è un funzione incognita. Poiché le aree hanno le dimensioni di una lunghezza al quadrato e l'unica variabile a disposizione con le dimensioni di una lunghezza è c , dovrà essere:

$$A = \mathcal{A}'(c, \theta) = c^2 \mathcal{A}(\theta) \quad (1.7)$$

con $\mathcal{A}$ funzione incognita¹⁸. Consideriamo ora i due triangoli rettangoli indicati in figura con 1 e 2 con ipotenusa rispettivamente a e b . Entrambi i triangoli sono simili al triangolo dal quale sono stati ricavati. Potremo quindi esprimere le loro aree A_1 e A_2 usando la formula (1.7), ovvero:

$$A_1 = a^2 \mathcal{A}(\theta) \quad \text{e} \quad A_2 = b^2 \mathcal{A}(\theta)$$

¹⁸Si lascia al lettore dimostrare che $\mathcal{A}(\theta) = \sin(2\theta)/4$.

Tenendo conto che $A = A_1 + A_2$, possiamo scrivere:

$$c^2 \mathcal{A}(\theta) = a^2 \mathcal{A}(\theta) + b^2 \mathcal{A}(\theta)$$

da cui semplificando¹⁹ $\mathcal{A}(\theta)$, otteniamo il teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Energia nella bomba atomica. Negli anni '50 vennero pubblicate in un giornale inglese le immagini della prima esplosione di una bomba atomica. Nelle immagini, alcune delle quali sono mostrate nella figura 1.6, è riportato il tempo trascorso dell'esplosione e la scala delle distanze. Il fisico inglese G.I. Taylor ha ricavato da queste immagini il raggio dell'esplosione in funzione del tempo e applicando l'analisi dimensionale è stato in grado di determinare l'energia totale sviluppata nell'esplosione. Per questo motivo fu sospettato di essere coinvolto in attività di spionaggio in quanto questo dato era classificato.

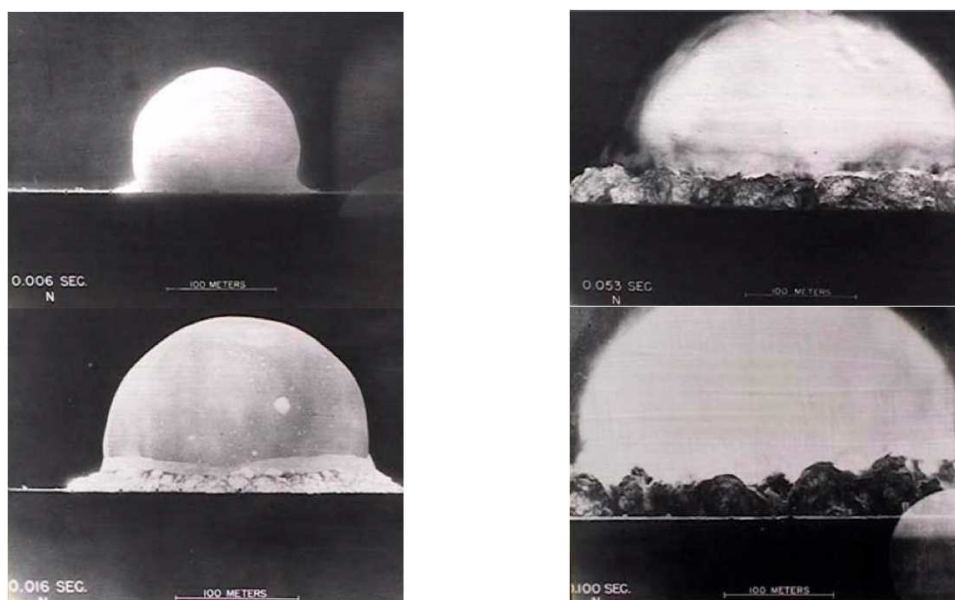


Figura 1.6: Immagini della prima esplosione atomica

Il ragionamento di Taylor è il seguente: il raggio R dell'esplosione dipende dall'energia E rilasciata in un tempo brevissimo dall'esplosione, dalla densità dell'aria ρ , e ovviamente dal tempo t :

$$R = f(E, \rho, t)$$

Passando alle dimensioni dei due membri si ha:

$$[R] = L = [f(E, \rho, t)] = [E]^\alpha [\rho]^\beta [t]^\gamma = M^\alpha L^{2\alpha} T^{-2\alpha} M^\beta L^{-3\beta} T^\gamma = L^{2\alpha-3\beta} T^{-2\alpha+\gamma} M^{\alpha+\beta}$$

con α, β, γ costanti da determinare con l'analisi dimensionale. Le dimensioni della funzione f devono essere quella di una lunghezza e quindi si deve avere:

$$2\alpha - 3\beta = 1, \quad -2\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta = 0$$

¹⁹Si noti che elidere $\mathcal{A}(\theta)$ è lecito in quanto non è nullo per triangoli con lati finiti.

E' facile verificare che la soluzione di questo sistema è: $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$, $\gamma = 2/5$. La f cercata è quindi:

$$R = cE^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5} \quad (1.8)$$

dove c è una costante adimensionale che Taylor ipotizzò essere dell'ordine dell'unità. Infine la determinazione dell'energia dell'esplosione si ricava dalla (1.8) come:

$$E = c^{-5} \frac{R^5 \rho}{t^2}$$