Appendice C

Funzioni generatrici dei momenti

La funzione generatrice dei momenti (spesso abbreviata con la sigla FGM) è uno dei modi alternativi di rappresentare una distribuzione di probabilità[1] mediante una funzione di una variabile. Queste funzioni si rivelano utili in varie circostanze in quanto, ad esempio:

- forniscono un modo semplice per calcolare i momenti di una distribuzione
- forniscono un modo semplice di caratterizzare la distribuzione della somma di variabili casuali indipendenti.

C.1 Definizione della Funzione Generatrice dei Momenti

Si consideri una variabile casuale discreta o continua X. La sua *Funzione generatrice dei momenti* è la funzione reale $G_X(t)$ definita come:

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right]$$

Per variabili casuali discrete e continue la definizione precedente si specializza rispettivamente in:

$$G_X(t) = \sum_i \mathrm{e}^{tx_i} P(x_i) \qquad G_X(t) = \int_\Omega \mathrm{e}^{tx} f_x(x)\, dx$$

Si comprende il nome assegnato alla $G_X(t)$ sviluppando e^{tx} in serie di Taylor attorno a $t = 0$. Si ha:

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tx}\right] = \mathbb{E}\left[1 + tx + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{6}t^3x^3 + \dots\right]$$
$$G_X(t) = 1 + t\,\mathbb{E}[x] + \frac{1}{2}t^2\,\mathbb{E}[x^2] + \frac{1}{6}t^3\,\mathbb{E}[x^3] + \dots$$

I coefficienti delle potenze di t in questo sviluppo sono proprio i momenti di ordine crescente della variabile casuale x.

La derivata di ordine n-esimo della FGM è:

$$\frac{d^n G_X(t)}{dt^n} = \mathbb{E}\left[x^n \mathrm{e}^{tx}\right]$$

che calcolata in $t = 0$, dà

$$\left.\frac{d^n G_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = \mathbb{E}\left[x^n\right]$$

[1] Esistono altre funzioni utilizzate per scopi analoghi alle FGM come la *funzione generatrice di probabilità* e la *funzione caratteristica* che non verranno trattate in queste note

la derivata n-esima della FGM calcolata in $t = 0$ è il momento n-esimo della distribuzione dei probabilità della variabile casuale x.

E' importante notare che non tutte le distribuzioni di probabilità hanno la propria FGM. Ad esempio una distribuzione priva della FGM è la distribuzione di Cauchy.

C.2 Proprietà delle funzioni generatrici dei momenti

Registriamo alcune utili proprietà delle funzioni generatrici dei momenti.
Sia X una variabile aleatoria allora
Se $Y = aX + b$ allora:

$$G_Y(t) = \mathrm{e}^{bt} G_X(at) \tag{C.1}$$

infatti:

$$G_Y(ax+b) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{axt+bt}] = \mathrm{e}^{bt}\,\mathbb{E}[\mathrm{e}^{axt}] = \mathrm{e}^{bt} G_X(at)$$

Se X_1 e X_2 sono due variabili aleatorie indipendenti, la FGM della variabile $Y = X_1 + X_2$ è:

$$G_Y(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{t(X_1+X_2)}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX_1}]\,\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX_2}] = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) \tag{C.2}$$

Nei paragrafi seguenti saranno calcolate le FGM di alcune distribuzioni di probabilità discrete e continue.

C.2.1 FGM della distribuzione Binomiale

La FGM della binomiale di parametri n e p la cui distribuzione è data dalla (5.11) è:

$$G(t) = [pt + (1-p)]^n \tag{C.3}$$

Derivazione della (C.3).

$$\begin{aligned}
G_{B_{n,p}}(t) &= \mathbb{E}[e^{tk}] && \text{(C.4)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{tk} && \text{(C.5)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^t\right)^k (1-p)^{n-k} && \text{(C.6)}\\
&= \left(pe^t + (1-p)\right)^n && \text{(C.7)}
\end{aligned}$$

CVD

C.2.2 FGM della distribuzione di Poisson

La FGM della distribuzione di Poisson di parametro μ (vedi la (5.16)), è

$$G(t) = \mathrm{e}^{\mu(\mathrm{e}^{t-1})} \tag{C.8}$$

Dimostrazione. Per la definizione di FGM si ha:

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tk} \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^t \mu)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\mu} \mathrm{e}^{\mu \mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{\mu(\mathrm{e}^{t-1})}$$

CVD

La somma di due variabili di Poisson è una variabile di Poisson. Consideriamo due variabili di Poisson indipendenti K_1 e K_2 di valori medi μ_1 e μ_2. Cerchiamo la FGM della funzione $K = K_1 + K_2$. Per la (C.2) e la (C.8) si può scrivere:

$$G_{K_1+K_2}(t) = G_{K_1}(t)G_{K_2}(t) = \mathrm{e}^{\mu_1(\mathrm{e}^{t-1})}\mathrm{e}^{\mu_2(\mathrm{e}^{t-1})} = \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)(\mathrm{e}^{t-1})}$$

questa relazione dimostra che K è una variabile di Poisson con valore medio $\mu_1 + \mu_2$.

C.2.3 FGM della distribuzione Uniforme

Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti di una distribuzione di probabilità uniforme definita nell'intervallo a, b ($b > a$). La distribuzione di densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{C.9}$$

Per la definizione di funzione generatrice dei momenti possiamo scrivere:

$$G_x(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tx}] = \int_a^b \mathrm{e}^{tx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{t(b-a)} \tag{C.10}$$

Calcoliamo i momenti primo (m_1) e secondo (m_2) della (C.9) dalla (C.10):

$$\mu = m_1 = \left.\frac{\partial G_x(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{e}^{bt}(bt-1) - \mathrm{e}^{at}(at-1)}{t^2(b-a)}\right|_{t=0} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{a+b}{2} \tag{C.11}$$

L'espressione precedente per $t = 0$ è indeterminata e il risultato corretto si ottiene passando attraverso il limite per $t \to 0$. Il secondo momento si ottiene dalla derivata seconda della (C.10):

$$m_2 = \left.\frac{\partial^2 G_x(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{e}^{bt}(bt^2 - 2bt + 2) - \mathrm{e}^{at}(at^2 - 2at + 2)}{t^3(b-a)}\right|_{t=0} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \tag{C.12}$$

Anche in questo caso, come per il primo momento è necessario passare al limite per $t \to 0$ per ottenere il risultato corretto. Infine con un po' di algebra si ottiene

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[x] = m_2 - m_1^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

C.2.4 FGM della distribuzione gaussiana

La FGM di una distribuzione gaussiana di valore medio μ e deviazione standard σ è definita dalla relazione

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx \tag{C.13}$$

Introducendo la variabile $z = (x-\mu)/\sigma$ e moltiplicando e dividendo l'integrando per $\exp(\sigma^2 t^2/2)$ si ha:

$$G(t) = \mathrm{e}^{tx}\exp(\sigma^2t^2/2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(z\sigma-\mu)^2/2}dz = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \tag{C.14}$$

E' facile verificare che, come atteso:

$$\left.\frac{dG(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mu, \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{d^2G(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

La somma di due variabili normali è normale

Con l'uso dell FGM è immediato dimostrare che la somma di due variabili normali indipendenti è normale. Siano X_1 e X_2 distribuite rispettivamente come $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, allora dall a (xx), e dalla (C.14) la FGM di $Y = X_1 + X_2$ è:

$$G_Y(t) = G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t) \exp\left(\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right) \exp\left(\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right) = \exp\left((\mu_1 + \mu_2)t + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}\right)$$

Varianza della media

Date n variabili gaussiane $X_1, \ldots, X_n$ tutte con lo stesso valore atteso μ e varianza σ, la variabile $\sum X_i$, per la relazione precedente ha FGM:

$$\exp\left(n\mu t + \frac{n\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

La variabile $\overline{X} = \sum X_i / N$, per la (C.1) ha FGM

$$\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)$$

Questa espressione è la FGM di una distribuzione gaussiana con valore medio μ e deviazione standard $\sigma/\sqrt{n}$. Abbiamo ritrovato il risultato che la deviazione standard della media è data da quella singola variabile divisa per la radice quadrata di n.