

Capitolo 1

Grandezze Fisiche

1.1 Il metodo scientifico

L'espressione "metodo scientifico" indica la modalità con cui la scienza procede per acquisire la conoscenza della realtà del mondo fisico. Tale metodo cerca di arrivare ad una conoscenza che sia quanto più possibile oggettiva, verificabile e condivisibile. Le basi del metodo scientifico sono state gettate nel 16° secolo da Galileo Galilei e da Francesco Bacone. Esso consiste, da una parte, nella raccolta di dati empirici sotto la guida delle ipotesi e teorie da vagliare; dall'altra in una rigorosa analisi di questi dati, quest'ultima basata sul calcolo delle probabilità e sui metodi statistici. Il metodo scientifico non è un processo semplice e lineare, ma procede seguendo il modo complesso e alla volte involuto con cui procede la ricerca scientifica nella realtà. Tuttavia si possono definire, anche nella complessità di questo processo, quattro fasi fondamentali che caratterizzano il metodo scientifico:

1. Osservazione e descrizione di un fenomeno. Tipicamente si tratta di fenomeni generati con modalità ripetibili in laboratorio, come l'esperimento di Rutherford detto della sfoglia d'oro, che ha messo in evidenza la struttura degli atomi¹, oppure può essere un fenomeno naturale impossibile da riprodurre in laboratorio, come l'esplosione di una stella o la variazione della temperatura della terra. In questa fase si individuano le grandezze rilevanti per la descrizione del fenomeno e si definiscono le procedure per la loro misurazione.
2. Formulazione di una ipotesi. Si propone un'ipotesi che possa spiegare il fenomeno in esame tramite una legge matematica che legghi le grandezze osservate, che sia in grado giustificare fenomeni analoghi a quello studiato e che sia in grado di prevedere nuovi fenomeni.
3. Se i dati sperimentali non soddisfano alle previsioni del modello, il modello deve essere rigettato o modificato e si torna al punto 2.
4. Formulazione una teoria basata sulla verifica ripetuta dei risultati ottenuti.

L'intento di queste note è quello di introdurre lo studente che affronta l'attività sperimentale al necessario rigore metodologico che è alla base del metodo scientifico².

¹Vedi il sito: https://it.wikipedia.org/wiki/Esperimento_di_Rutherford.

²Per approfondire l'argomento sul metodo scientifico si veda ad esempio il testo [6] Cap 1.

1.2 Grandezze fisiche – Definizione operativa

Una grandezza fisica è una proprietà che caratterizza un aspetto di un fenomeno, di un corpo o di una sostanza che può essere espressa quantitativamente (valore della grandezza fisica) nella forma di un numero e un'unità di misura. Esempi: la massa di un oggetto: $m = 70 \text{ kg}$, un intervallo temporale di dieci secondi $\Delta t = 10 \text{ s}$, il valore della temperatura di un corpo misurato in un suo punto: $T = 36.6^\circ\text{C}$, la distanza tra la terra e la luna al perigeo: $l = 363\,104 \text{ km}$, la massa del leptone μ (una particella subnucleare): $m_\mu = 105.65837154 \text{ MeV}/c^2$ (le unità eV/c^2 sono quelle normalmente usate nell'ambito della fisica subnucleare. Espressa in chilogrammi questa massa è $1.883531594 \times 10^{-28} \text{ kg}$).

Definizione operativa di una grandezza. E' importante notare che in fisica, come in tutte le scienze sperimentali, la definizione delle grandezze deve essere una *definizione operativa*³ ovvero dalla definizione si deve poter ottenere una successione di operazioni che permettano di eseguire una *misurazione affidabile e ripetibile* della grandezza che è stata definita.

La definizione operativa di una grandezza dà l'occasione di evidenziare la differenza concettuale che può esistere tra la definizione matematica e quella fisica di una grandezza. Consideriamo la definizione di angolo piano, grandezza comunemente usata sia in matematica sia in fisica. La definizione matematica di angolo è (vedi ad esempio Wikipedia):

Si definisce angolo la porzione di piano compresa tra due semirette aventi la stessa origine.

Questa definizione, per quanto rigorosa e non ambigua, è insoddisfacente dal punto di vista fisico, infatti da essa non si può ricavare alcuna indicazione su come procedere per la misurazione degli angoli! In fisica si preferisce definire l'angolo piano nel seguente modo:

si definisce angolo il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza compresa tra le due semirette con il suo raggio di un cerchio il cui centro è nel vertice dell'angolo (vedi la figura 1.1).

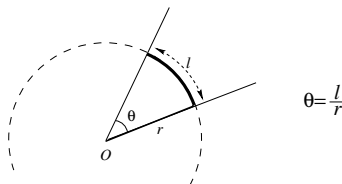


Figura 1.1: Definizione operativa di angolo piano

Come è evidente questa ultima definizione delinea una procedura di misurazione dell'angolo. Basta avere un metro flessibile. E' quindi una definizione operativa di una grandezza.

³Percy W. Bridgman, premio Nobel per la fisica nel 1946, che ha coniato il termine "definizione operativa" di una grandezza, è il fondatore della teoria filosofica nota come *operazionismo* esposta nel testo "La Logica della Fisica Moderna" [3].

1.3 Grandezze Fisiche intensive ed estensive

Le grandezze fisiche possono essere classificate come estensive (o additive) oppure intensive (o non additive). Questo tipo di classificazione è legato alla modalità con cui le grandezze si compongono quando sono riferite a sistemi composti da più parti o quando un sistema è diviso in più sottosistemi. In particolare diremo che:

- Il valore di una grandezza estensiva (o additiva) è uguale alla somma dei valori di tale grandezza per tutti i sottosistemi costitutivi. Esempio: Dati due sistemi fisici di masse m_1 e m_2 , il sistema formato aggregando i due sistemi avrà una massa pari a $m_1 + m_2$, ovvero la massa è una grandezza estensiva. Altri esempi di grandezze estensive sono: il volume, la lunghezza, l'energia, l'entropia e la carica elettrica.
- Una grandezza intensiva (o non additiva) si riferisce ad una proprietà indipendente dalla estensione del sistema. Esempio: mescolando due liquidi di diversa densità, otteniamo una miscela la cui densità avrà un valore intermedio tra quelle dei liquidi separati e non dalla loro somma. Altri esempi di grandezze intensive sono: la temperatura, la pressione, il calore specifico e la costante dielettrica

1.4 Misurazioni di grandezze fisiche

Con *misurazione* si intende un procedimento con cui sia possibile assegnare sperimentalmente un valore numerico, la *misura*, ad una grandezza fisica che prende il nome di *misurando*. In generale la misurazione è soggetta ad imperfezioni che danno origine ad un errore nel risultato della misura. Ne consegue che la misura non consisterà di un singolo valore numerico ma in un intervallo di valori che saranno compatibili con il “valore vero” della grandezza fisica. Il concetto valore vero, di errore e la conseguente *incertezza* con cui conosciamo il valore della grandezza misurata saranno estensivamente trattati nel seguito. Le procedure per eseguire una misurazione variano a seconda che la grandezza fisica sia estensiva o intensiva. Infatti solo le grandezze estensive possono essere misurate in modo *diretto*, ovvero confrontando direttamente la grandezza fisica con un *campione* di riferimento mentre le grandezze intensive possono essere misurate solo in modo *indiretto*. La misurazione indiretta è utilizzata anche per le grandezze estensive quando risulti impossibile applicare quella diretta.

1.4.1 Misurazioni Dirette

Una grandezza estensiva G (ad esempio una lunghezza di un oggetto) può essere misurata direttamente tramite il confronto diretto con un'altra grandezza dello stesso tipo, U , che assumiamo come unità per le misurazioni di quella grandezza. La Misura $X(G)$ sarà allora:

$$X(G) = \frac{G}{U} \text{ e quindi } G = XU$$

Nella figura 1.2 è mostrata la misurazione della grandezza fisica “lunghezza”, proprietà dell'oggetto (la matita), tramite il confronto diretto con una grandezza della stessa specie, il regolo graduato, considerata come unità di misura.

Si sottolinea che *la misurazione diretta è un'operazione possibile solo per variabili estensive*.

Esempi di misurazioni dirette.

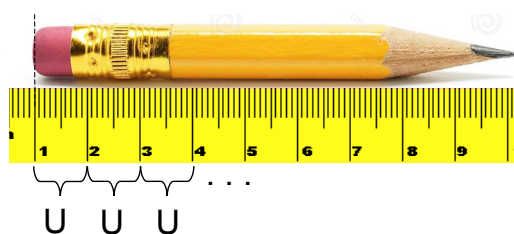


Figura 1.2: Misurazione diretta dalla lunghezza di un oggetto

- *Lunghezza di un oggetto.* Quando è possibile confrontare un oggetto con il campione di lunghezza, come mostrato in figura 1.2, stabilendo così il valore della lunghezza in termini dell'unità di misura adottata, si sta eseguendo un misurazione diretta.
- *Massa di un oggetto.* La misurazione della massa di un oggetto con una bilancia a due piatti (vedi figura 1.3) che confronta la massa dell'oggetto con masse campioni è una misurazione diretta.



Figura 1.3: Bilancia di precisione a due piatti

1.4.2 Misurazioni Indirette

La misurazione indiretta di una grandezza fisica si ottiene tramite una *relazione matematica* tra la grandezza da misurare e altre che sono state misurate in modo diretto oppure le cui misure sono state già ottenute in modo indiretto. Ovviamente la presenza di errori nelle grandezze misurate direttamente si *propaga*, come vedremo nei prossimi capitoli, anche nella misura indiretta.

Esempi di misurazioni indirette.

Velocità. La velocità media $\bar{v}$ si misura dalla relazione matematica che lega le grandezze dello spazio percorso Δx nell'intervallo temporale Δt (entrambe possono essere misurate direttamente).

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Distanza di una stella “vicina”. La misurazione delle lunghezze si può effettuare in modo diretto solo quando non è né troppo piccola né troppo grande per poter essere confrontata direttamente con il campione di lunghezza. Negli altri casi si deve ricorrere a metodi indiretti di misurazione come accade per la misurazione della distanze di stelle vicine con il metodo della parallasse. Il metodo consiste nella misurazione dello spostamento angolare di una stella rispetto a quelle “lontane” dopo un intervallo temporale di sei mesi, come schematizzato nella figura 1.4. Se p è l’angolo di parallasse e R indica il raggio dell’orbita terrestre, allora la distanza d della stella è data da:

$$d = \frac{R}{\tan p}$$

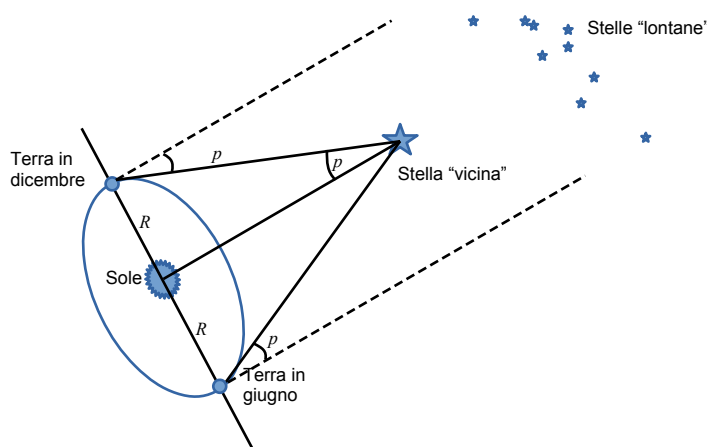


Figura 1.4: Misurazione indiretta della distanza di una stella “vicina” con il metodo della parallasse. Le linee tratteggiate rappresentano l’angolo di vista delle stelle *lontane*, che possono essere ritenute fisse e la cui posizione non dipende dalla posizione della terra nella sua orbita

Misura della temperatura. La temperatura è una grandezza intensiva e può essere misurata solo in modo indiretto. Uno dei modi usati per la misura di questa grandezza fisica è quello di sfruttare il noto fenomeno della dilatazione termica dei corpi. Una sostanza, ad esempio il mercurio, aumenta le sue dimensioni lineari con la temperatura, secondo la legge:

$$L(T) = L(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)]$$

dove $L(T)$ è la lunghezza della sostanza alla temperatura T e α è il coefficiente di dilatazione termica caratteristico della sostanza. Sfruttando questa relazione da una misura di lunghezza si risale a quella della temperatura. Per effettuare la misurazione della temperatura è tuttavia necessario tarare la scala scegliendo almeno due valori di temperatura da assegnare a opportuni stati fisici⁴ come ad esempio una miscela di acqua e ghiaccio e dell’acqua in ebollizione il tutto alla pressione atmosferica.

⁴Per la definizione dell’unità nel SI della temperatura vedi il paragrafo 1.6.1.

1.5 Grandezze Fisiche di Base e Derivate

La descrizione dei fenomeni fisici noti richiede l'uso di molte grandezze, estensive e intensive, collegate da relazioni matematiche.

In linea di principio si potrebbe assegnare un'unità di misura per ogni grandezza estensiva. Questa scelta avrebbe come conseguenza l'uso di numerosi coefficienti di proporzionalità che complicherebbero le formule. Ad esempio se per la misura delle lunghezze usassimo i metri (m) e per la misura del volume i galloni U.S. (gal), il volume V di un cubo di lato x sarebbe dato da $V = 264.1 \times x^3$, dove x è espresso in metri e V in galloni e 264.1 è un fattore di conversione tra m^3 e gal. Si comprende l'uso di queste unità (m) e (gal), che non sono coerenti, complica le formule e quindi non è conveniente.

Per semplificare le relazioni (ovvero ridurre il numero dei fattori di proporzionalità è conveniente scegliere (arbitrariamente) le *unità di misura di un limitato numero di grandezze dette di base*; le unità delle altre grandezze che sono dette derivate deriveranno dalle relazioni matematiche che le definiscono.

Si noti che si può dimostrare che bastano solo 4 grandezze di base per descrivere tutte le grandezze fisiche (3 se ci limitasse alla meccanica). Tuttavia per ragioni di convenienza e di praticità, come vedremo, sono state scelte 7 grandezze di base.

Esempi di grandezze fisiche derivate:

1. La velocità (in una dimensione) è definita dalla relazione:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Scegliendo come grandezze di base lo spazio misurato in metri e il tempo misurato in secondi, il valore unitario della velocità è un metro al secondo (non ha un nome specifico).

2. La forza (in una dimensione) è definita dalla relazione

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Scegliendo come grandezze di base la lunghezza misurata in metri, il tempo misurato in secondi e la massa misurata in chilogrammi il valore unitario della forza è

$$\text{unità di Forza} = \frac{1\text{chilogrammo} \times 1\text{metro}}{1 \text{ secondo al quadrato}} \equiv \text{newton} = \text{N} \quad (1.1)$$

che prende il nome di Newton (N).

1.6 Sistemi di unità di misura

Per la costruzione di un sistema di unità di misura è necessario:

1. Scegliere una particolare partizione tra grandezze di base e grandezze derivate (Lunghezza, Tempo, Massa, velocità, accelerazione, Energia, Potenza, momento angolare,...)
2. Definire le unità standard per le grandezze di base

Un sistema di unità di misura è detto:

- Completo, quando tutte le grandezze possono essere dedotte da quelle di base

- Coerente, quando tutte le relazioni matematiche che definiscono le grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità differenti dall'unità (ad esempio, l'unità di forza, newton, definita nella (1.1) è coerente con le unità di massa, lunghezza e tempo).
- Decimale, quando tutti i multipli e sottomultipli sono potenze di 10

1.6.1 Il Sistema internazionale (SI)

Il Sistema Internazionale di unità di misura, abbreviato in SI (dal francese *Système International d'Unités*), è il sistema ufficialmente adottato nel 1960 dalla Conférence Générale des Poids et Mesures, (CGPM)⁵. Il sistema SI è stato adottato per legge sia in Europa sia in molti altri paesi nel mondo⁶ per tutte le esigenze della scienza e della tecnica.

Nel SI sono state scelte, in modo logico ma arbitrario, sette grandezze fisiche, dette di base, mediante le quali tutte le altre, che si dicono derivate, possono essere definite. Le sette grandezze di base sono elencate nella tabella 1.1

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali nel Sistema Internazionale.

Grandezza Fisica	simbolo	Grandezza Fisica	simbolo
Lunghezza	[L]	Temperatura	[Θ]
Tempo	[T]	Quantità di materia	[N]
Massa	[M]	Corrente Elettrica	[I]
		Intensità luminosa	[J]

Ogni grandezza fisica di base ha per definizione la propria “*dimensione fisica*” che la caratterizza. Il significato di *dimensione fisica* sarà analizzato nell'ultimo paragrafo di questo capitolo. (analisi dimensionale)

1.6.2 Unità di Base del Sistema Internazionale

Definizioni delle unità delle grandezze fisiche di base sulle indicazioni della CGPM

- metro (m) è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a $1/299792458$ di un secondo
- chilogrammo (kg) è pari alla massa del prototipo realizzato secondo le prescrizioni del CGPM e conservato presso il museo di Sèvres. Il kg è l'unica unità di misura del SI basata su un manufatto.
- secondo (s) è la durata di 9,192,631,770 periodi della radiazione emessa nella transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale del ^{133}Cs
- kelvin (K) è la frazione $1/273.16$ della temperatura termodinamica del punti triplo dell'acqua.

⁵La CGPM è l'organizzazione intergovernativa responsabile del SI, alla quale hanno aderito circa 50 paesi. Ha la responsabilità della diffusione del SI, anche modificandolo, se necessario, in modo che rifletta i più recenti progressi nel campo della scienza e della tecnologia.

⁶Nei paesi anglosassoni sono ancora molto utilizzate come unità di lunghezza il piede pari a 30.48 cm e il pollice pari a 2.54 cm , per unità di massa la libbra 453 g

- mole (mol) è la quantità di sostanza che contiene tante entità elementari, atomi o molecole, quanti sono gli atomi presenti in 12 g di ^{12}C .
- ampere (A) è l'intensità di corrente elettrica che, se mantenuta in due conduttori lineari paralleli, di lunghezza infinita e sezione trasversale trascurabile, posti a un metro di distanza l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra questi una forza pari a $2 \times 10^{-7}\text{N}$ per metro di lunghezza⁷.
- candela (cd) è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette radiazione monocromatica di frequenza⁸ $540 \times 10^{12}\text{Hz}$ (Hz è il simbolo dell'hertz unità di misura della frequenza) e che ha un'intensità radiante in quella direzione pari a 1/683 watt per steradiano.

Tabella 1.2: Multipli e Sottomultipli del Sistema Internazionale.

Multiplo	Prefisso	Simbolo	Sottomultiplo	Prefisso	Simbolo
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^1	deca	da	10^{-18}	atto	a

1.6.3 I sistemi cgs

Il sistema cgs prende nome dalle iniziali delle unità fondamentali utilizzate nella meccanica: centimetro per le lunghezze, grammo per le masse e secondo per il tempo. Il SI e il cgs, per quanto riguarda la meccanica, sono costruiti in modo identico, l'unica differenza consiste in un fattore di scala nelle unità di due delle grandezze fondamentali (lunghezza e massa).

Differentemente dal SI che introduce una grandezza fondamentale per l'elettromagnetismo, l'intensità di corrente, nei sistemi cgs le grandezze elettromagnetiche sono tutte derivate da quelle meccaniche e in funzione della legge utilizzata per definire le grandezze elettromagnetiche si avrà un particolare sistema cgs (cgs elettrostatico, cgs elettromagnetico, [cgs] di Gauss, ...). Questo è il motivo per cui i sistemi cgs si citano al plurale. La descrizione e lo studio di questi sistemi, in particolare quello di Gauss ancora molto usato in fisica teorica, è materia di un corso di elettromagnetismo.

Nella tabella 1.3 sono riportate le grandezze di base del sistema cgs, con l'esclusione di quelle per le grandezze elettromagnetiche.

⁷Questa definizione che è quella ufficiale di inserita nel SI è di difficile realizzazione pratica e alcuni uffici metrologici nazionali preferiscono definire al suo posto le unità di differenza di potenziale e di resistenza. La critica si basa sulla richiesta della "lunghezza infinita" del conduttore e sulla sua sezione "trascurabile"; entrambe le richieste rendono la definizione poco operativa.

⁸La frequenza scelta di $540 \times 10^{12}\text{Hz}$ corrisponde ad una lunghezza d'onda pari a circa 555 nm attorno al quale c'è la massima sensibilità dell'occhio umano.

Tabella 1.3: Sistema cgs per la meccanica

Grandezze di Base	Nome	Simbolo
Lunghezza	centimetro	cm
Massa	grammo	g
Tempo	secondo	s
Temperatura	kelvin	K
Quantità di materia	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

1.6.4 Sistemi Pratici

Molte altre unità di misura “*pratiche*” sono ancora in uso nei diversi campi della fisica e della tecnica. Tra quelli più usati:

Unità di massa atomica (u) è $1/12$ della massa dell'atomo di carbonio⁹. $1u = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$

L'**elettronvolt** (eV) è un'unità di misura dell'energia molto usata in fisica atomica e in fisica delle particelle elementari. L'elettronvolt è definito come l'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di $1V$. Il fattore di conversione con l'unità SI è: $1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$

L'**unità astronomica** (AU) è un'unità di lunghezza utilizzata nello studio dei sistemi planetari, infatti corrisponde circa alla distanza terra sole. Il fattore di conversione con l'unità SI è: $1\text{AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$.

L'**angstrom** ($\text{\AA}$) è un'unità di lunghezza in uso nella spettroscopia ottica e nella fisica atomica. Il fattore di conversione con l'unità SI è: ($1\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$)

1.6.5 I Sistemi di unità naturali

I sistemi di unità naturali sono basati unicamente sulle costanti fisiche universali. Ad esempio la carica elementare “ e ” è scelta come unità (naturale) di carica elettrica, e la velocità della luce c è scelta come unità (naturale) per le velocità. Un sistema puramente naturale di unità è definito in modo tale che ad alcune costanti fisiche universali è assegnato il valore unitario. Questa scelta ha sia aspetti positivi sia negativi: in particolare

PRO: Semplifica le espressioni matematiche delle leggi fisiche.

CONTRO: Si perde chiarezza e comprensione, poiché queste costanti vengono omesse nelle espressioni delle leggi fisiche.

1.7 Cambiamento di unità di misura – Fattori di conversione

Nella pratica accade molto spesso che il valore di una grandezza fisica sia espresso in una unità di misura, che indichiamo con u_1 , non coerente con le necessità del calcolo. Per proseguire in modo coerente nei calcoli è necessario ottenere il valore di questa grandezza espressa in un'altra unità che indichiamo con u_2 . Il passaggio tra le due unità di misura

⁹Prima del 1961 questa unità era definita usando l'atomo di ossigeno ed era indicata con il simbolo “amu”, attualmente obsoleto

di ottenere mediante uno specifico *fattore di conversione*: $C_{u_1 \rightarrow u_2}$ che permette di passare dall'unità u_1 all'unità u_2 . ($1 \cdot u_1 = C \cdot u_2$) che si legge: “una unità u_1 è pari a C unità u_2 ”. Esempio 1. Supponiamo di volere convertire una velocità espressa in miglia¹⁰ (simbolo mi) all'ora (simbolo h) in metri al secondo. Supponiamo che la velocità sia $v = 50 \text{ mi/h}$; dobbiamo convertire le miglia in metri e le ore in secondi. Tenendo conto che $1 \text{ mi} = 1609 \text{ m}$ si ha il fattore di conversione $C_{mi \rightarrow m} = 1609 \text{ m/mi}$; tenendo conto che $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ si ha il fattore di conversione $C_{h \rightarrow s} = 3600 \text{ s/h}$. Sostituendo:

$$50 \frac{mi}{h} = 50 \frac{C_{mi \rightarrow m}}{C_{h \rightarrow s}} = 50 \frac{mi}{h} \times 1609 \frac{m}{mi} \times \frac{1}{3600} \frac{h}{s} = 22.35 \frac{m}{s}$$

Esempio 2. Nelle misurazioni fisiche capita con una certa frequenza di dover convertire nell'unità SI, i secondi, un intervallo temporale espresso con le unità usate nel linguaggio corrente ad esempio come 4 ore e 18 minuti e 33 secondi. Dovremo quindi risolvere la seguente equazione:

$$4 \text{ h} + 18 \text{ min} + 33 \text{ s} = x \text{ s}$$

dove x rappresenta il valore dell'intervallo temporale espresso in secondi. I fattori di conversione necessari per questa operazione sono: il fattore di conversione da ore in minuti $C_{h \rightarrow min} = 60 \text{ min/h}$ e quello da minuti a secondi $C_{min \rightarrow s} = 60 \text{ s/min}$; quindi:

$$(4 \text{ h} \times C_{h \rightarrow min}) \times C_{min \rightarrow s} + 18 \text{ min} \times C_{min \rightarrow s} + 33 \text{ s} = x \text{ s}$$

$$\left(4 \text{ h} \times 60 \frac{\text{min}}{\text{h}}\right) \times 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} + 18 \text{ min} \times 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} + 33 \text{ s} = 15\,513 \text{ s}$$

1.8 Dimensioni fisiche e Analisi Dimensionale

Torniamo sull'esempio del paragrafo precedente, utilizzato per esemplificare il cambiamento delle unità di misura della velocità, esaminandolo da un punto di vista differente. La velocità, con le unità di misura scelte¹¹, ha un determinato valore numerico. Se cambiamo l'unità di misura della lunghezza dividendola per L (nell'esempio precedente si era posto $L = 1609$) e quella del tempo dividendola per T (nell'esempio precedente si era posto $T = 3600$) allora il valore numerico della velocità è moltiplicato di un fattore LT^{-1} . Analogamente, il valore numerico del volume di un parallelepipedo $V = abc$, se diminuiamo l'unità con cui si misurano le lunghezze dei lati a, b e c di un fattore L , aumenterà di un fattore L^3 . Ancora, se nella misura della densità di un corpo ($\rho = m/V$), diminuiamo l'unità di misura della massa di un fattore M e l'unità di lunghezza di un fattore L il valore numerico della densità aumenterà di un fattore ML^{-3} . Per tutte le grandezze derivate¹² è possibile ottenere una espressione simile a quelle che sono state ottenute per la velocità, per il volume e per la densità.

Le espressioni: LT^{-1} , L^3 , ML^{-3} e quelle simili che possono essere ricavate per tutte le altre grandezze derivate, che determinano le variazioni dei valori numerici delle grandezze fisiche nel passaggio da un sistema di unità ad un altro, sono dette le *dimensioni fisiche* della grandezza. Così le dimensioni della velocità sono LT^{-1} quelle del volume sono L^3 e quelle della densità sono ML^{-3} .

Più in generale:

¹⁰Il miglio è un'unità di lunghezza ancora largamente utilizzata nei paesi anglosassoni come la Gran Bretagna e gli USA.

¹¹Supponiamo che il sistema di unità che utilizziamo abbia tra le grandezze di base la lunghezza, il tempo e la massa.

¹²In un fissato sistema in cui siano state definite le grandezze di base.

La funzione che determina il fattore di cui cambia una grandezza fisica nel passaggio da un sistema di unità di misura ad un altro è detto dimensione fisica o, più brevemente, dimensione della grandezza.

Per indicare le dimensioni fisiche di una generica grandezza G si usa racchiuderla tra parentesi quadre $[G]$. Così per la velocità si scrive $[v] = LT^{-1}$, per il volume $[V] = L^3$, per la densità $[\rho] = ML^{-3}$, eccetera. Nell'espressione delle dimensioni fisiche di una grandezza si utilizza sempre lo stesso simbolo per indicare una grandezza fisica di base: L per la lunghezza, T per il tempo e M per la massa. Le dimensioni fisiche di una fissata grandezza sono indipendenti dalla specifica formula matematica che la esprime in termini delle grandezze di base, così ad esempio se consideriamo tre volumi differenti: quello di una sfera $V_s = 4\pi r^3/3$, di un parallelepipedo $V_p = abc$ e quello di un cubo $V_c = a^3$ abbiamo $[V_s] = [V_p] = [V_c] = L^3$. I simboli usati per le dimensioni delle grandezze fisiche di base del Sistema Internazionale sono riportate nella tabella 1.1. Nella tabella 1.4 sono riportate le dimensioni delle più comuni grandezze della meccanica nel SI.

E' importante notare che la dimensione fisica di una grandezza dipende dal sistema di unità scelto¹³.

Tabella 1.4: Unità di misura e dimensioni di alcune grandezze meccaniche

Grandezza Derivata	Simbolo	Unità di misura	Dimensione
accelerazione	a	m/s^2	LT^{-2}
angolo piano	$\alpha, \beta, \dots, \theta, \phi$	rad	1
angolo solido	Ω	sr	1
area	A, S	m^2	L^2
densità	ρ	kg/m^3	ML^{-3}
energia, lavoro	E, L	J	ML^2T^{-2}
forza	F	N	MLT^{-2}
frequenza	f, ν	Hz	T^{-1}
momento meccanico		$kg\ m^2/s^2$	ML^2T^{-2}
potenza	P, W	W	ML^2T^{-3}
pressione	p	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
velocità	v	m/s	LT^{-1}
velocità angolare	Ω		T^{-1}
volume	V	m^3	L^3

Forma monomia delle dimensioni di una grandezza. Negli esempi del paragrafo precedente le dimensioni di una grandezza sono sempre espresse da una legge di potenza in forma monomia delle "dimensioni" delle grandezze di base. Questa affermazione è generalizzabile, e quindi le dimensioni fisiche di qualsiasi grandezza G , si esprimono come:

$$[G] = L^a T^b M^c \quad (1.2)$$

dove gli esponenti a, b, c sono numeri razionali positivi o negativi. La forma monomia espressa dalla relazione (1.2) è conseguenza dell'importante principio che afferma che il

¹³Ad esempio in un sistema nel quale le grandezze di base sono lunghezza, massa e tempo, la dimensione della densità è $[\rho] = ML^{-3}$, mentre in un sistema nel quale le grandezze di base sono lunghezza, forza e tempo, la dimensione della densità è $[\rho] = L^{-4} FT^2$

rapporto di due realizzazioni di una stessa grandezza fisica deve essere indipendente dall'unità di misura scelta delle grandezze di base usate per definirla¹⁴.

1.8.1 Analisi dimensionale e sue applicazioni

Le grandezze fisiche con le stesse dimensioni sono dette *omogenee*. Solo grandezze omogenee possono essere sommate o comparate

1.8.2 Controllo delle formule con l'Analisi Dimensionale.

Le dimensioni fisiche delle grandezze a destra e sinistra del segno di uguale debbono essere le stesse, così come la loro somma è lecita solo se hanno le stesse dimensioni. Se le dimensioni sono differenti la formula è sicuramente errata, tuttavia *il contrario non è vero*. Per il controllo delle dimensioni è necessario scrivere le formule in modo letterale sostituendo i valori numerici solo alla fine. Come esempio si consideri il calcolo della traiettoria di un proiettile che parte dall'origine degli assi (x, y) con velocità iniziale $(v_o \cos \theta, v_o \sin \theta)$. Nella formula che dà la soluzione, riportata qui di seguito, sono stati inseriti due "errori" con l'intento di illustrare quando l'analisi dimensionale aiuta a scoprirli e quando invece non è in grado di evidenziarli.

$$\text{Formula con 2 errori} \quad y = \frac{g}{2v_o \cos^2} x^2 + x \sin \theta$$

Il lettore verifichi che il primo termine a destra del segno uguale non ha le dimensioni di una lunghezza come dovrebbe; anche il secondo termine per quanto dimensionalmente corretto è errato (la correzione è $\tan \theta$ al posto di $\sin \theta$).

Argomenti delle funzioni trascendenti Mediante l'analisi dimensionale si deduce che gli argomenti di tutte le funzioni trascendenti¹⁵ debbono essere *adimensionali*. Infatti le funzioni trascendenti sono esprimibili come una serie infinita di potenze crescenti dell'argomento, ovvero come una serie infinita di termini *non omogenei tra loro*. Ne consegue che l'argomento delle funzioni trascendenti deve essere un numero puro.

Come esempio consideriamo la funzione esponenziale (e^x) che descrive un'ampia classe di fenomeni fisici. Attorno a $x=0$, la funzione esponenziale ammette lo sviluppo in serie di potenze:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (1.3)$$

Questo sviluppo in serie conferma che x deve essere un numero puro. Tuttavia è ben noto che molti fenomeni fisici sono descritti da funzioni trascendenti come la (1.3), ad esempio la velocità $v(t)$ di un corpo in un mezzo viscoso. In questo caso la legge fisica assume la forma $v(t) = v_o e^{-t/\tau}$ dove v_o ha le dimensioni di una velocità e τ quelle di un tempo; in questo modo la funzione esponenziale ha un argomento adimensionale.

¹⁴La dimostrazione della relazione (1.2) è reperibile nei testi [9] oppure [1]

¹⁵Le funzioni trascendenti sono quelle funzioni non esprimibili come combinazione finita di operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza razionale). Esempi di funzioni trascendenti sono $\log(x)$, e^x , tutte le funzioni trigonometriche, $\sin x$, $\cos x$, $\dots$ e tutte le funzioni che li contengono. Tali funzioni sono esprimibili in termini algebrici solo come una *serie infinita*

1.8.3 Deduzioni di leggi fisiche

In alcune circostanze l'analisi dimensionale permette di dedurre la forma delle leggi fisiche. L'analisi dimensionale permette di trovare soltanto la dipendenza dalle variabili con dimensioni fisiche mentre non può determinare le costanti adimensionali. Esaminiamo alcuni esempi.

Periodo di oscillazione del pendolo. Consideriamo un pendolo di lunghezza l di massa m in un campo gravitazionale g , e ci chiediamo quale sia l'espressione del periodo di oscillazione del pendolo. Per la soluzione di questo problema abbiamo a disposizione le tre grandezze fisiche l , m e g . Cerchiamo quindi di ottenere una grandezza con le dimensioni di un tempo utilizzando le sole grandezze a disposizione. Scriviamo quindi l'equazione dimensionale:

$$T = [l]^\alpha [m]^\beta [g]^\gamma = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\gamma} M^\beta T^{-2\gamma}$$

Dove compaiono tutte le grandezze a disposizione e le potenze a cui sono elevate α , β e γ sono incognite da determinare. Dovendo essere uguali le dimensioni a destra e sinistra del segno uguale dovrà essere:

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad -2\gamma = 1$$

da cui

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

Con questi valori otteniamo per il periodo la nota espressione :

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove k è un fattore adimensionale che non può essere ottenuto dall'analisi dimensionale. Risolvendo il problema con il metodo "standard", ovvero risolvendo l'equazione differenziale, si ottiene $k = 2\pi$.

Dimostrazione del teorema di Pitagora. L'analisi dimensionale permette di ottenere una elegante dimostrazione del teorema di Pitagora. Consideriamo il triangolo rettangolo di figura 1.5 con c ipotenusa e e e b cateti. La conoscenza di un angolo, in figura indicato

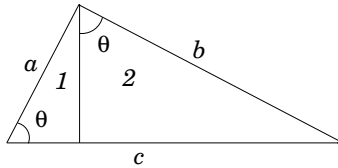


Figura 1.5:

con θ e dell'ipotenusa c è sufficiente per risolvere completamente il triangolo. L'area A di questo triangolo si può quindi esprimere come una funzione di c e θ : $A = \mathcal{A}'(c, \theta)$, dove $\mathcal{A}'$ è un funzione incognita. Poiché le aree hanno le dimensioni di una lunghezza al quadrato e l'unica variabile a disposizione con le dimensioni di una lunghezza è c , dovrà essere:

$$A = \mathcal{A}'(c, \theta) = c^2 \mathcal{A}(\theta) \quad (1.4)$$

con $\mathcal{A}$ funzione incognita¹⁶. Consideriamo ora i due triangoli rettangoli indicati in figura con 1 e 2 con ipotenusa rispettivamente a e b . Entrambi i triangoli sono simili al triangolo dal quale sono stati ricavati. Potremo quindi esprimere le loro aree A_1 e A_2 usando la formula (1.4), ovvero:

$$A_1 = a^2 \mathcal{A}(\theta) \quad \text{e} \quad A_2 = b^2 \mathcal{A}(\theta)$$

Tenendo conto che $A = A_1 + A_2$, possiamo scrivere:

$$c^2 \mathcal{A}(\theta) = a^2 \mathcal{A}(\theta) + b^2 \mathcal{A}(\theta)$$

da cui semplificando¹⁷ $\mathcal{A}(\theta)$, otteniamo il teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Energia nella bomba atomica. Negli anni '50 vennero pubblicate in un giornale inglese le immagini della prima esplosione di una bomba atomica. Nelle immagini, alcune delle quali sono mostrate nella figura 1.6, è riportato il tempo trascorso dell'esplosione e la scala delle distanze. Il fisico inglese G.I. Taylor ha ricavato da queste immagini il raggio dell'esplosione in funzione del tempo e applicando l'analisi dimensionale è stato in grado di determinare l'energia totale sviluppata nell'esplosione. Per questo motivo fu sospettato di essere coinvolto in attività di spionaggio in quanto questo dato era classificato.

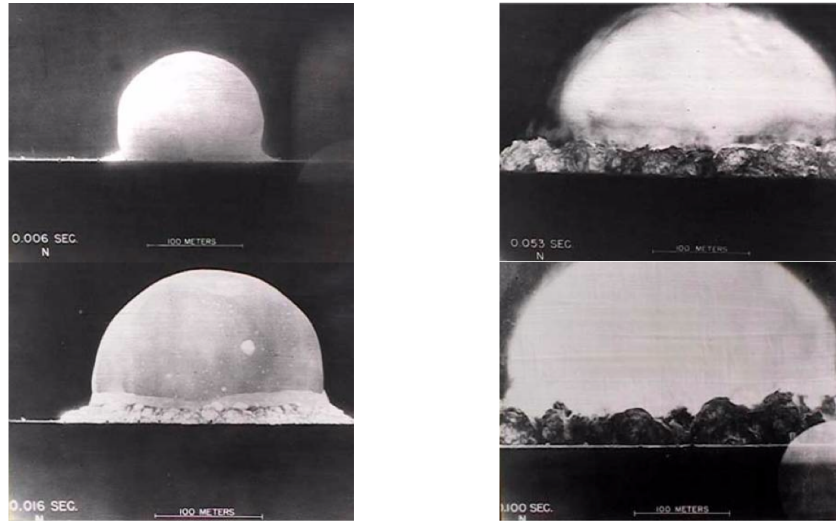


Figura 1.6: Immagini della prima esplosione atomica

Il ragionamento di Taylor è il seguente: il raggio R dell'esplosione dipende dall'energia E rilasciata in un tempo brevissimo dall'esplosione, dalla densità dell'aria ρ , e ovviamente dal tempo t :

$$R = f(E, \rho, t)$$

Passando alle dimensioni dei due membri si ha:

$$[R] = L = [f(E, \rho, t)] = [E]^\alpha [\rho]^\beta [t]^\gamma = M^\alpha L^{2\alpha} T^{-2\alpha} M^\beta L^{-3\beta} T^\gamma = L^{2\alpha-3\beta} T^{-2\alpha+\gamma} M^{\alpha+\beta}$$

¹⁶Si lascia al lettore dimostrare che $\mathcal{A}(\theta) = \sin^2 \theta / 4$.

¹⁷Si noti che elidere $\mathcal{A}(\theta)$ è lecito in quanto non è nullo per triangoli con lati finiti.

con α, β, γ costanti da determinare con l'analisi dimensionale. Le dimensioni della funzione f devono essere quella di una lunghezza e quindi si deve avere:

$$2\alpha - 3\beta = 1, \quad -2\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta = 0$$

E' facile verificare che la soluzione di questo sistema è: $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$, $\gamma = 2/5$. La f cercata è quindi:

$$R = cE^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5} \quad (1.5)$$

dove c è una costante adimensionale che Taylor ipotizzò essere dell'ordine dell'unità. Infine la determinazione dell'energia dell'esplosione si ricava dalla (1.5) come:

$$E = c^{-5} \frac{R^5 \rho}{t^2}$$

NOTA BIBLIOGRAFICA. Lo studente trova la necessaria integrazione della materia esposta in questo capitolo nel testo di C. Bini [2] o in quello di P. Fornasini [4].

Capitolo 2

Strumenti di misura

Gli strumenti di misura sono dispositivi usati per la misurazione di grandezze fisiche. Possono essere molto semplici, come ad esempio un regolo millimetrato oppure estremamente complessi come i rivelatori di eventi subnucleari siti presso gli acceleratori di particelle.

Esaminando uno tipico strumento di misura una delle prime osservazioni che si possono fare riguarda la modalità con cui si ottiene la misura che viene detta analogica se è ottenuta leggendo la posizione di un indice su di una scala oppure viene detta digitale se la misura appare come un numero con un numero limitato di cifre.

2.1 Come funziona uno strumento di misura

Gli strumenti di misura si basano su vari principi fisici che riguardano la grandezza che si intende misurare. Tuttavia si possono dare alcuni principi generali che sono validi per tutte le operazioni di misurazione che utilizzano gli strumenti. Per l'esecuzione di una misurazione in generale si possono elencare le seguenti fasi:

1. lo strumento di misura viene fatto *interagire*¹ con il misurando
2. si attende, quando è necessario, che lo strumento *si stabilizzi* ovvero che entri in equilibrio con la grandezza da misurare
3. infine si legge² il risultato (analogico o digitale) sullo strumento.

2.2 Caratteristiche degli strumenti di misura

Le caratteristiche di uno strumento sono varie e tipicamente dipendono dal tipo dello strumento. Tuttavia alcune caratteristiche di carattere generale, sono valide per tutti gli strumenti; tra queste:

¹Le modalità con cui uno strumento di misura interagisce con il misurando sono estremamente varie: lo strumento viene semplicemente giustapposto alla grandezza da misurare come accade con un regolo, oppure lo strumento è immerso nella sostanza come accade per la misurazione della temperatura con un termometro, oppure connesso tramite conduttori per le misure elettriche di tensione e di corrente oppure avvicinato a sorgenti radioattive oppure costruito nei pressi delle zone di interazione tra fasci di particelle dove avvengono le reazioni di fisica subnucleare di alta energia nei moderni acceleratori di particelle.

²Questo punto in molti strumenti digitali attuali (soprattutto nei sistemi complessi) è sostituito da un trasferimento di dati direttamente dallo strumento ad un calcolatore dedicato all'acquisizione dei dati

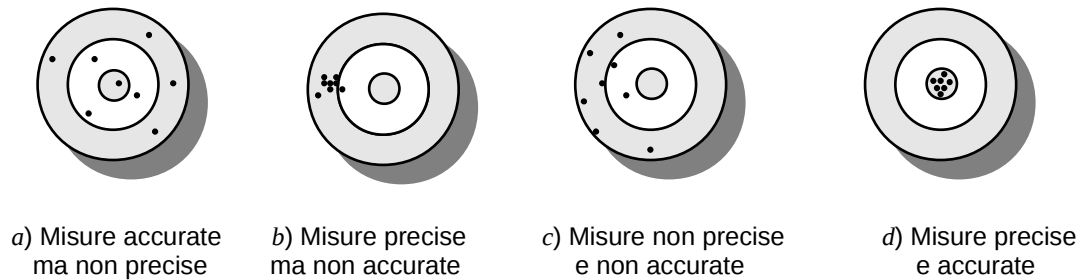


Figura 2.1: Analogia del bersaglio per illustrare qualitativamente la differenza tra i concetti di accuratezza e precisione. Il centro del bersaglio rappresenta il “valore vero” del misurando e i tiri rappresentano l'esito di una misurazione

- **Portata** oppure **Fondo scala** oppure più correttamente **Intervallo di misura**: indica il valore massimo (e alle volte il minimo) della grandezza che lo strumento può misurare nella configurazione scelta. Nel gergo di laboratorio spesso si usa il termine inglese *Range*
- **Risoluzione**. Con questo termine si intende la capacità dello strumento distinguere due valori prossimi tra loro. Per uno strumento digitale (vedi il paragrafo successivo) la risoluzione è data dal valore dell'ultima cifra che appare nel display; per uno strumento analogico è molto più difficile da determinare e teoricamente potrebbe essere infinita.
- **Sensibilità**. E' il rapporto tra la variazione della risposta dello strumento rispetto alla variazione della grandezza misurata. In modo formale se R indica la risposta dello strumento e g il valore della grandezza misurata, la sensibilità dello strumento è definita come:

$$S(g) = \frac{dR(g)}{dg} \quad (2.1)$$

In generale la sensibilità non è costante in tutto l'*intervallo di funzionamento* ma può dipendere da g .

- **Linearità**. Uno strumento di misura è lineare se il valore della risposta R e il valore della grandezza g misurata sono legati da una relazione lineare $R = \alpha + \beta g$. Si noti che *Linearità* e *Sensibilità* sono legate. Infatti dalla relazione precedente si ottiene una sensibilità $S(g) = dR/dg = \beta$ costante. Se la risposta R non è lineare allora la sensibilità dipende da g .
- **Prontezza** La prontezza è legata al tempo con cui lo strumento risponde ad una sollecitazione. Minore è il tempo di risposta maggiore è la prontezza dello strumento. La prontezza è una caratteristica qualitativa e per quantificarla si deve ricorrere al modello matematico che descrive la risposta in funzione del tempo dello strumento utilizzato. Ad esempio il *tempo caratteristico* di un termometro a mercurio è un modo per misurare la sua prontezza e rende possibile il confronto tra strumenti basati sullo stesso principio fisico.

- **Accuratezza.** L'accuratezza di uno strumento consiste nella sua capacità di fornire per la grandezza fisica in misura un valore quanto più possibile vicino al *valore vero*. L'accuratezza è un concetto *qualitativo*.
- **Precisione.** La precisione è la qualità di uno strumento di riprodurre lo stesso valore misurato quando venga utilizzato nelle stesse condizioni sperimentali. La precisione è un concetto *qualitativo*.

Per chiarire i concetti di accuratezza e precisione che si applicano agli strumenti di misura ma anche risultati delle misurazioni è spesso utilizzata l'analogia tra la misurazione e il tiro al bersaglio mostrata nella figura 2.1.

2.3 Strumenti analogici e digitali

Gli strumenti di misura possono essere classificati come analogici o come digitali in funzione di come lo strumento presenta il risultato della misurazione.

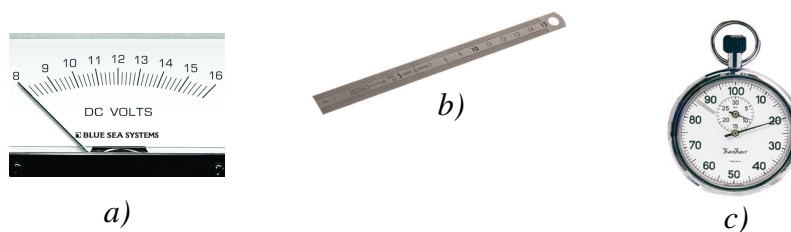


Figura 2.2: Strumenti a lettura analogica: a) Voltmetro, b) righello metrico, c) cronometro

Strumenti analogici. Gli strumenti analogici indicano il valore della misura tramite un indice oppure il livello di un liquido che si posiziona su una scala graduata. La caratteristica fondamentale degli strumenti analogici è quella di dare una valutazione *continua* del misurando.

Strumenti digitali. Con lo sviluppo dell'elettronica nella seconda metà del novecento si sono diffusi gli strumenti *digitali* che stanno soppiantando quelli analogici. Negli strumenti digitali, diversamente da quelli analogici, la misura è data in forma di un certo numero di cifre eventualmente seguito da un'unità di misura. Un esempio è mostrato in figura 2.3. Gli strumenti digitali compiono la seguente funzione: un trasduttore³ trasforma la grandezza fisica che si vuole misurare in un segnale elettrico di ampiezza proporzionale alla grandezza fisica e in uno stadio successivo il segnale elettrico analogico viene trasformato in un segnale digitale (un numero). Nella figura 2.4 mostriamo un esempio di come il segnale analogico si trasforma in un segnale digitale.

³Un trasduttore alle volte detto sensore è un dispositivo in grado di trasformare una determinata grandezza fisica in un segnale misurabile tipicamente elettrico.

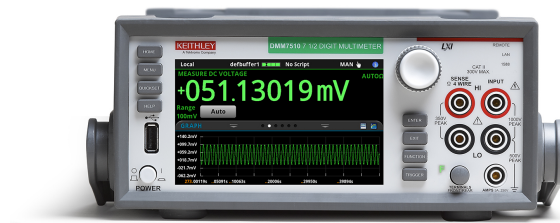


Figura 2.3: Voltmetro digitale con 8 “digit”. Nel “Display” è mostrata l’unità di misura (mV).

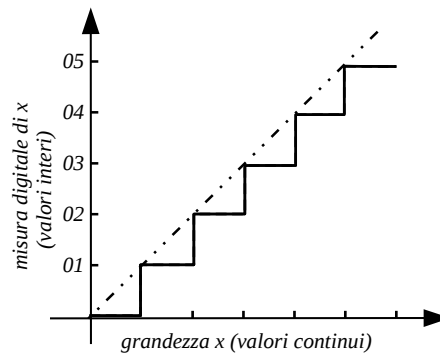


Figura 2.4: Grafico che schematizza il funzionamento di uno strumento digitale. E’ mostrato il comportamento dello strumento ideale e di un possibile comportamento reale. Le rette tratteggiate che partono dall’origine indicano come valutare l’incertezza da associare alla misura dovuta allo strumento. Il concetto di incertezza nelle misurazioni sarà affrontato nei prossimi capitoli.

2.4 Contatori

Una categoria di strumenti utilizzata in molti esperimenti di fisica è costituita dai cosiddetti *contatori*, dispositivi che generano un segnale digitale quando rivelano gli eventi per i quali sono stati progettati. Collegando questi strumenti a opportune memorie digitali è possibile ottenere il numero di eventi avvenuti in un determinato intervallo temporale. Un tipico esempio è il contatore *Geiger* che emette un segnale elettrico di ampiezza standard e di breve durata quando è attraversato da una particella ionizzante.

Capitolo 3

Errori e Incertezze di Misura

3.1 Introduzione

L'esperienza dimostra che nessuna misura, per quanto accurata, può essere completamente libera da "errori". Qui la parola "errore" non ha il significato della conseguenza di un comportamento negligente o non attento di chi esegue la misurazione, ma è il sovrapporsi di numerosissimi effetti fisici che si sommano o si sottraggono in modo imprevedibile alla grandezza che si sta misurando. Ne consegue che il risultato di una misurazione è solo una approssimazione o una stima del valore associato alla grandezza oggetto della misurazione, ovvero il *misurando*. Quindi per determinare la qualità della misura ottenuta e per rendere significativo il confronto della misurazione effettuata con altre misurazioni della stessa grandezza è necessario associare alla misura un valore, detto **incertezza di misura**, che descrive il grado di accuratezza e precisione con cui la grandezza è nota. In questo capitolo saranno introdotti i concetti di errore e di incertezza di misura con le loro classificazioni¹.

3.2 Definizione di Errore di misura

Nel paragrafo precedente sono stati introdotti i termini di *errore di misura* e di *incertezza*, che per quanto indichino quantità evidentemente collegate, in teoria della misura sono due concetti ben distinti che non devono essere confusi. L'*errore di misura* è definito come la differenza tra un "valore vero" di una grandezza e la sua misura. Indicando con x il valore della misura, con μ il suo valore vero, l'errore ϵ è dato da:

$$\epsilon = \mu - x \quad (3.1)$$

¹Una profonda revisione delle modalità con cui si valutavano e si esprimevano le incertezze nelle misurazioni è stata elaborata da un gruppo di lavoro formato da esperti nominati dalle più autorevoli organizzazioni mondiali di metrologia, di fisica, di chimica e dell'industria. Le organizzazioni che hanno promosso questo studio sono: il *Bureau International de Poids e Measures* (BIPM), la *International Electrotechnical Commission* (IEC), la *International Federation of Clinical Chemistry* (IFCC), la *International Organization for Standardization* (ISO), la *International Organization of Pure and Applied Chemistry* (IUPAC), la *International Organization of Pure and Applied Physics* (IUPAP) e *International Organization of Legal Metrology* (OIML). Il gruppo di esperti nominati da queste organizzazioni ha redatto un documento al titolo "*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*" [5], la cui prima edizione nel 1993 è stata pubblicata a cura del *International Organization for Standardization* (ISO). Questo documento, noto internazionalmente con l'acronimo *GUM* è divenuto il testo di riferimento sulla valutazione e sul trattamento delle incertezze nelle misure nell'ambiente scientifico, in quello della metrologia e in quello industriale. Il documento [7] pubblicato dalla NASA e reperibile in rete descrive con un certo dettaglio i cambiamenti introdotti dalla *GUM* relativi all'analisi degli errori.

Dalla sua definizione (3.1) ricaviamo che l'errore è una grandezza con segno e che è associata ad una ben identificata misura. In altre parole, due misurazioni della stessa grandezza effettuate anche una immediatamente dopo l'altra possono avere errori completamente differenti. Si noti inoltre che essendo ignoto il valore vero della grandezza anche *l'errore di misura è in grandezza in conoscibile*.

Nota sul “valore vero”. Nella definizione di errore si è usato l'articolo indeterminativo per sottolineare la circostanza che una grandezza può avere più “valori veri” ammissibili del misurando. Ad esempio si consideri la misurazione della lunghezza di un tavolo: all'aumentare della precisione della misura, ad esempio al di sotto del decimo di millimetro, il bordo del tavolo avrà una forma frastagliata e quindi ci saranno molti valori compatibili con la definizione di lunghezza del tavolo. Un'altra grandezza compatibile con più valori veri è l'accelerazione di gravità g ; infatti oltre a dipendere dal punto della terra ove è misurata dipende anche dalla posizione del sole e della luna (e di tutti gli altri pianeti).

Tradizionalmente si classificano le componenti dell'errore come

- Errore casuale². Deriva da variazioni imprevedibili temporali e/o spaziali delle variabili di influenza³. Tali variazioni sono tanto positive quanto negative, *in media nulle*.
- Errore sistematico⁴. Una variabile di influenza varia in una direzione (sistematicamente) il valore del misurando. Se analizzando i dati il fenomeno che influenza la misurazione è riconosciuto ed è possibile calcolarne l'entità allora la misura può essere corretta, ma anche la correzione avrà la sua incertezza. Ovvero *gli effetti sistematici potranno essere ridotti ma mai completamente eliminati*.

Come esempio dei concetti di errore casuale ed errore sistematico consideriamo la figura 3.2 che riporta graficamente i le misurazioni di una grandezza. L'ordinata dei punti riportati nel grafico rappresenta il valore della misura e la sua ascissa rappresenta il numero progressivo della misurazione. La fluttuazione delle misure evidenzia la presenza di una componente casuale dell'errore e la conoscenza del “valore vero”, noto in quanto i dati sono simulati, mette in evidenza la presenza di un errore sistematico.

La presenza degli errori sia casuali sia sistematici nelle misurazioni inserisce nei valori misurati una indeterminazione che viene detta *incertezza* e la cui valutazione è una parte fondamentale dell'attività sperimentale.

3.3 Le Incertezze di misura

L'incertezza di misura, introdotta nel paragrafo precedente, caratterizza la qualità del risultato ottenuto e permette il confronto fra misure diverse della stessa grandezza e il confronto con le eventuali predizioni teoriche. La definizione di *incertezza di misura*, seguendo l'atteggiamento pragmatico⁵ della GUM[5], può essere formulata nel seguente modo:

²Nei testi inglesi questo errore è detto *random error*

³Con “variabili di influenza” si intendono tutte quelle grandezze fisiche che influenzano il fenomeno che si sta osservando. Ad esempio nella misura del periodo del moto di un pendolo l'attrito della sospensione, i moti dell'aria attorno al pendolo, l'ampiezza delle vibrazioni del punto di sospensione sono tutte variabili di influenza.

⁴Nei testi inglesi questo errore è detto *systematic error*.

⁵L'osservazione su cui si basa questo modo di procedere è che essendo l'errore, come definito dalla 3.1, *in conoscibile* non ha senso differenziarlo in casuale e sistematico. Inoltre se un effetto sistematico è riconosciuto allora si può correggerlo e quindi non dà più luogo a un errore sistematico.

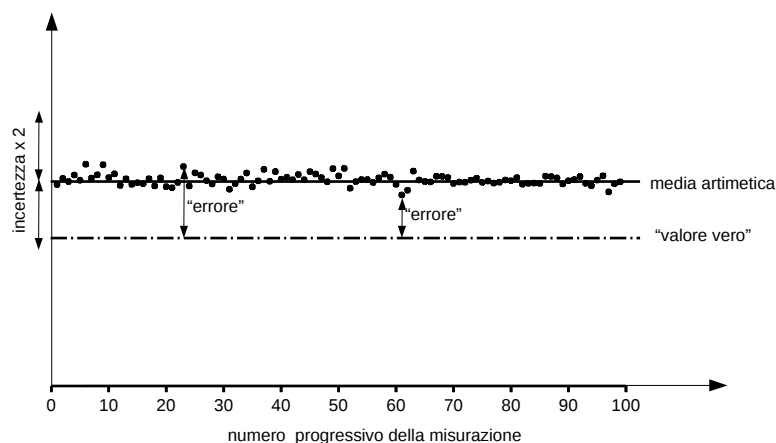


Figura 3.1: Simulazione di misure ripetute di una grandezza fittizia. L'ordinata di ogni punto rappresenta il valore della misura mentre l'ascissa è il numero d'ordine della misura. Le misure fluttuano attorno a un valore (indicato con media aritmetica) rivelando la presenza di errori casuali presenti nelle misurazioni. Poiché i dati sono simulati è possibile conoscere il "valore vero" della grandezza indicato da una linea orizzontale. Nella figura sono anche indicati due errori di due particolari misurazioni; anche gli errori come il valore vero sono inconoscibili nelle misure reali. Nella figura è indicata anche quella che potrebbe essere l'incertezza da associare alla misurazione.

L'incertezza è il parametro, associato con il risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.

Il risultato di una misurazione avrà quindi la seguente espressione:

$$(x \pm u)u.m.$$

dove x è il risultato della misurazione, u è l'incertezza (standard⁶) che le si attribuisce e $u.m.$ è l'unità di misura con cui viene espresso il risultato.

Vale inoltre la seguente regola pratica: *L'incertezza va indicata con una o massimo 2 cifre significative.* Per una nota su cifre significative, approssimazione e arrotondamento si rimanda all'appendice A.

Esempi di scrittura di risultati di una misurazione con la sua incertezza: Misure di precisione crescente del valore di una massa:

$$(10 \pm 3)kg, \quad (10.5 \pm 0.7)kg, \quad (10.58 \pm 0.06)kg \quad (3.2)$$

Si noti che il numero di cifre significative con cui si scrive il risultato deve essere coerente con il numero che rappresenta l'incertezza. Questo vuole dire non ha senso scrivere $(10.2 \pm 3)kg$ o anche $(10.2 \pm 0.03)kg$.

⁶Il termine *standard* sarà chiaro dopo l'introduzione dei principi di statistica

3.4 Cause dell'Incertezze di misura

In questo paragrafo sono elencate le possibili cause che determinano l'incertezza nelle misurazioni. L'incertezza su una misurazione può essere generata sia da una singola di queste cause sia da una loro combinazione. Quello che segue è l'elenco delle cause riconosciute di incertezza⁷:

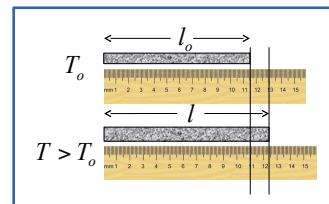
- a) Incompleta definizione del misurando
- b) Imperfetta realizzazione della definizione del misurando
- c) Campione non rappresentativo del misurando
- d) Conoscenza non adeguata degli effetti ambientali
- e) Letture errate degli strumenti analogici
- f) Risoluzione finita o soglia degli strumenti
- g) Valori non esatti dei campioni di riferimento
- h) Valori non esatti delle costanti e altri parametri
- i) Approssimazioni e assunzioni usate nella misurazione
- j) Variazioni in osservazioni sotto apparenti condizioni identiche

Ripetiamo questo elenco aggiungendo spiegazioni e qualche esempio.

- (a) Incompleta definizione del misurando Non sempre la definizione del misurando è sufficiente a definirlo in modo non ambiguo. Esempio: L'accelerazione di gravità al livello del mare; infatti l'accelerazione di gravità dipende almeno dalla latitudine.
- (b) Imperfetta realizzazione della definizione del misurando Esempio 1. Calore specifico dell'acqua. Quanto è puro il campione che si è scelto per la misurazione? Esempio 2. Accelerazione di un grave nel vuoto. Quanto è veramente «vuoto» il volume in cui si effettua la misura?
- (c) Campione non rappresentativo del misurando Esempio 1. Datazione con il ^{14}C di un reperto dal quale si preleva un campione che può non essere rappresentativo dell'oggetto (si consideri la storia dell'analisi con il ^{14}C della sindone). Esempio 2. Sondaggi effettuati su un campione ed estrapolati a tutta la popolazione.
- (d) Imperfetta conoscenza delle condizioni ambientali. Esempio: la temperatura è una *variabile di influenza* che spesso influenza le misurazioni di precisione delle lunghezze come illustrato in figura

$$l = l_o \frac{1 + \alpha_x(T - T_o)}{1 + \alpha_M(T - T_o)}$$

α_x e α_M sono i coefficienti di dilatazione rispettivamente del misurando e del metro.



- (e) Letture errate degli strumenti analogici La lettura degli indici degli strumenti analogici dipende dalla acuità visiva dello sperimentatore ed è inoltre soggetta ad errori di parallasse. Ne segue che l'incertezza da associare ad una misura non dipende unicamente dallo strumento

⁷La classificazione presentata è riportata dalla GUM [5]

- (f) Risoluzione finita o soglia degli strumenti Esempio. Uno strumento digitale non può distinguere misure che differiscono meno della cifra meno significativa mostrata.
- (g) Valori non esatti dei campioni di riferimento I campioni di riferimento possono variare nel tempo, come le varie copie del “chilogrammo campione” di platino-iridio che, in modo tuttora non compreso, accrescono la loro massa.
- (h) Valori non esatti delle costanti e altri parametri Nel ottenere il valore di una misura spesso si utilizzano dati di riferimento, presi da libri o articoli, la cui incertezza si *propaga* sulla misura.
- (i) Approssimazioni e assunzioni usate nella misurazione. Esempio: il periodo T di un pendolo semplice è indipendente dall'ampiezza angolare di oscillazione α solo se l'angolo tende a zero. La formula della correzione è nota e se è stata misurata l'ampiezza dell'oscillazione si può applicare la correzione ($T = T(\alpha)$). Comunque anche sulla correzione applicata sarà presente un'incertezza della quale si dovrà tenere conto.
- (j) Variazioni in osservazioni sotto condizioni apparentemente identiche. Tutte le cause di incertezze elencate a) a i) contribuiscono a questa voce e danno origine a quella che è detta incertezza casuale.

3.5 Incertezza relativa

Un indicazione della qualità di una misura è data, oltre che dal valore dell'incertezza assoluta u_x , dal rapporto tra l'incertezza u_x e il valore della misura x_o .

$$\left| \frac{u_x}{x_o} \right|$$

Questa quantità prende il nome di *incertezza relativa* ed è ovviamente un numero puro e positivo. Spesso viene espresso in percentuale. Per comprendere la rilevanza dell'incertezza relativa si consideri ad esempio che in una misura di lunghezza, un'incertezza $u = 1$ mm su una misura $x_o = 1$ cm ha un significato del tutto differente se la misura fosse $x_o = 1$ m; nel primo caso abbiamo un'incertezza relativa del 10% nel secondo caso l'incertezza relativa è 0.1%, cento volte più piccola. Come ulteriore esempio consideriamo le misure indicate nella (3.2) in cui le incertezze sono indicate in modo assoluto:

$$(10 \pm 3)\text{kg}, \quad (10.5 \pm 0.7)\text{kg}, \quad (10.58 \pm 0.06)\text{kg} \quad (3.3)$$

Esprimendo le stesse incertezze in modo relativo otteniamo:

$$10\text{kg} \pm 0.30, \quad 10.5\text{kg} \pm 0.066, \quad 10.58\text{kg} \pm 0.0057$$

oppure con l'uso del per cento:

$$10\text{kg} \pm 30\%, \quad 10.5\text{kg} \pm 6.6\%, \quad 10.58\text{kg} \pm 0.57\%$$

3.6 Classificazione delle Incertezze

La classificazione degli errori in casuali e sistematici, data nel paragrafo precedente, era l'unica utilizzata fino a che gli autori della *GUM* nel 1993 non misero in evidenza l'ambiguità

di tale classificazione⁸. Infatti una componente di incertezza che viene considerata di natura sistematica in un certo esperimento può diventare casuale in un altro esperimento e viceversa. Ad esempio se misuriamo una tensione elettrica con uno specifico voltmetro⁹, la taratura del voltmetro dà origine ad un errore sistematico da associare alla misura mentre se si confrontano misure della stessa tensione con esemplari diversi dello stesso voltmetro (stesso costruttore e stesso modello) l'errore sarà casuale.

Secondo le raccomandazioni degli organismi internazionali competenti contenute nella *GUM*, le incertezze nelle misurazioni si devono classificare, piuttosto che risalendo alla loro origine (casuale o sistematica che come abbiamo visto è ambigua), in modo più pragmatico e operativo secondo *il metodo con cui si stimano*. Seguendo questa indicazione si sono individuati due tipi di incertezze che sono state chiamate incertezze di "Tipo A" e di "Tipo B":

- **Incetezza di Tipo A** quando è calcolata utilizzando con metodi statistici
- **Incetezza di Tipo B** quando è valutata con metodi non statistici.

Prima di dare i primi elementi su come valutare queste incertezze è bene sottolineare che spesso in una misurazione sono presenti entrambi; si veda ad esempio la figura 3.2.

Incetezze di Tipo A. La valutazione dell'incetezza nella categoria A si applica quando sono state eseguite un numero adeguato di misure indipendenti di una grandezza X sotto le stesse (apparenti) condizioni. Siano $x_1, x_2, \dots, x_N$ gli N valori osservati. Se la misurazione ha una risoluzione sufficiente i valori misurati non saranno tutti uguali. Come sarà giustificato ampiamente nel seguito la *migliore stima* del valore della grandezza X è data dalla *media aritmetica* delle osservazioni individuali:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.4)$$

La stima quantitativa della fluttuazione del valore della singola misura x_i attorno alla media aritmetica (3.4) è data dalla seguente espressione:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.5)$$

La grandezza s è detta *stima della deviazione standard* e, se non ci sono altre cause di incetezza sulla x , rappresenta l'incetezza $u(x)$ della x . Torneremo su queste formule dopo avere introdotto i principi di base del calcolo delle probabilità e della statistica. Quello che qui si vuole sottolineare è che la valutazione delle incetezze per le misurazioni con variazioni casuali si esegue attraverso formule fornite dal calcolo delle probabilità e la statistica come le relazioni (3.4) e (3.5).

⁸La modalità usata nelle misurazioni prima della revisione critica contenuta nella *GUM*, e tuttora usata anche in qualche ambito scientifico (non di metrologia) prevedeva l'uso dell'errore casuale come incetezza da associare alla misura mentre per gli errori sistematici venivano suggeriti trattamenti *ad hoc* per la loro riduzione fino a renderli non rilevanti nella misurazione

⁹Cioè proprio quello che abbiamo per le mani!

Incertezze di Tipo B. Diversamente dal caso precedente, nella esecuzione di una misurazione può succedere che la misura si ripeta uguale a se stessa. Ad esempio se misuriamo la tensione di una batteria carica con un voltmetro digitale otteniamo sempre lo stesso valore. In questi casi in cui non si possono applicare i metodi statistici si parla di incertezze di tipo B. Se il valore di una grandezza non è stato ottenuto da osservazioni ripetute la valutazione della incertezza da associare alla misura va ottenuta principalmente da:

- dati di misurazioni precedenti
- esperienza o conoscenza delle caratteristiche e proprietà dei materiali rilevanti e degli strumenti
- specifiche tecniche del costruttore degli strumenti utilizzati
- taratura della strumentazione
- incertezze prese da manuali di riferimento.

La valutazione di questo tipo di incertezze è un processo meno automatico e spesso più difficile rispetto a quello che si esegue per la valutazione delle incertezze di tipo A e richiede una adeguata analisi della situazione sperimentale e della strumentazione utilizzata.

La lista delle cause che generano le incertezze di misura è riportata nel paragrafo 3.4 in fondo a questo capitolo.

Per concludere è istruttivo riportare la versione originale del commento che appare nella GUM [5] sull'importanza della valutazione delle incertezze nelle operazioni di misurazione:

Although this Guide provides a framework for assessing uncertainty, it cannot substitute for critical thinking, intellectual honesty, and professional skill. The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement. The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depend on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value.

3.7 Misurazioni

In questo paragrafo mostriamo alcuni esempi che illustrano la modalità con cui si eseguono le misurazioni e nei quali si applicano le definizioni relative all'incertezza esposte precedentemente.

Misuriamo il periodo T di un pendolo fisico che esegua "piccole oscillazioni" che possiamo ritenere isocrone. Usando un cronometro con sensibilità di $1\mu s$ ed un traguardo ottico, come schematicamente indicato nella figura 3.2, eseguiamo $N=10$ misurazioni i cui valori sono mostrati nella seguente tabella¹⁰:

¹⁰I dati riportati nella tabella sono stati effettivamente registrati con un pendolo reversibile e una scheda di acquisizione dati disponibili nel laboratorio di fisica del dipartimento

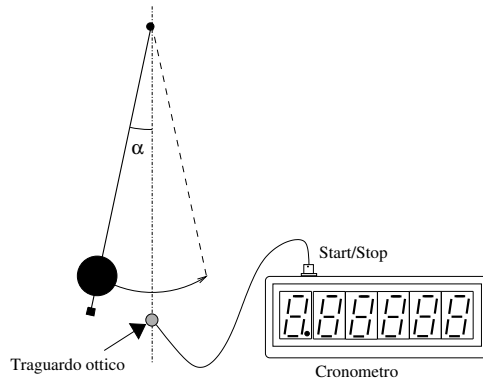


Figura 3.2: Misurazione del periodo del pendolo con un cronometro digitale e un trapianto ottico

i	$T_i(s)$	i	$T_i(s)$
1	1.52631	6	1.52594
2	1.52608	7	1.52592
3	1.52596	8	1.52641
4	1.52595	9	1.52596
5	1.52628	10	1.52611

osserviamo che le misure sono tutte diverse tra loro e ciascuno dei questi valori è una stima del misurando. E' intuitivo pensare che la stima migliore del misurando, quella che tiene conto di tutte le misure effettuate, sia la media dei valori misurati¹¹ e applicando la relazione (3.4), valutiamo la cosiddetta *migliore stima del misurando* T come la media aritmetica dei valori misurati:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_i^N T_i = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{10}}{N} = 1.526092 \text{ s} \quad (3.6)$$

La fluttuazione delle misure riportate in tabella implica che in questo caso l'incertezza (o almeno una sua parte) sono di tipo A. Applicando la (3.5) otteniamo:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i^N (T_i - \bar{T})^2} = 0.000184 \text{ s} \quad (3.7)$$

la (3.7) è l'incertezza di tipo A della singola misura T_i che è la valutazione quantitativa dello sparpagliamento dei dati attorno alla loro media aritmetica ($\bar{T}$). L'incertezza sulla media $\bar{T}$, come ci si può aspettare, diminuisce al crescere di N e vale $s/\sqrt{N}$ (anche su questo importante risultato torneremo in seguito). Il risultato finale sarà quindi:

$$T = (1.52609 \pm 0.00006) \text{ s} \quad (3.8)$$

Non tutte le misure si presentano come quella che abbiamo appena descritto; in molte la trattazione statistica che abbiamo accennato nell'esempio precedente (e che verrà approfondita nei prossimi capitoli) non può essere applicata. Come indicato nel prossimo esempio.

¹¹Questa ragionevole ipotesi ha una giustificazione basata sui principi della statistica come sarà mostrato nei prossimi capitoli SPOSTARE PRIMA.

Esempio 2 - Incertezza di tipo B. Se il cronometro utilizzato nella misura illustrata nell'esempio precedente fosse stato meno sensibile, per fissare le idee con una risoluzione di 0.01 s, le 10 misurazioni avrebbero dato 10 valori tutti uguali e pari a $T = 1.52$ s e non avrebbe senso applicare i metodi statistici. Siamo nelle condizioni in cui l'incertezza sul risultato è di tipo B. In questo caso l'informazione che possiamo trarre dalle misurazioni e dall'analisi della strumentazione utilizzata è che il periodo T cercato è compreso con probabilità uniforme nell'intervallo¹² $T_1 = 1.52$ s e $T_2 = 1.53$ s. Vedremo nel seguito che in questi casi si associa alla misura un'incertezza standard pari a $(T_2 - T_1)/\sqrt{12}$ (Vedi il paragrafo ??). In questo caso il risultato della misurazione sarà:

$$T = (1.525 \pm 0.003)s \quad (3.9)$$

C'è un ulteriore tipo di incertezza che è stata trascurata e che invece dovrebbe essere presa in considerazione in entrambi i casi illustrati; questa incertezza è legata alla *qualità* dei cronometri utilizzati. Entrambi gli strumenti usati devono essere stati tarati e la loro accuratezza, ricavata dal manuale di istruzione, potrebbe contribuire anche in modo significativo all'incertezza delle misurazioni tranne nei casi in cui risulta trascurabile in confronto alle altre incertezze.

¹²L'intervallo di cui parliamo è quello segnato dal cronometro che stiamo usando per l'esperimento

Capitolo 4

Presentazione e analisi grafica dei dati

L'esecuzione di un esperimento consiste, in molti casi, nel variare una grandezza, il cui valore è deciso dallo sperimentatore, e nell'osservare le variazioni delle grandezze fisiche che ci si aspetta possano dipendere da quella variata. Come esempio, consideriamo la misura della costante elastica di una molla; l'esperimento consiste nella variazione della massa che si applica ad un estremo della molla e nella misura del conseguente allungamento; la grandezza che lo sperimentatore varia è la massa applicata alla molla e la grandezza si misura è l'allungamento della molla. Per una analisi preliminare del fenomeno è opportuno creare delle tabelle in cui si riportano in modo quanto più possibile ordinato, i valori delle grandezze misurate. Per una compilazione ordinata di una tabella si intende che i valori delle grandezze variate dallo sperimentatore siano riportate in modo monotono (crescente o decrescente), annotando unità di misura e incertezze delle singole misure. Una lettura attenta delle tabelle spesso mette in evidenza banali errori di trascrizione o incompletezze nell'esecuzione dell'esperimento. La tabella 4.1 è un esempio concreto su come si possano organizzare i dati acquisiti nell'esperimento di allungamento della molla. Nel riportare misure e incertezze in tabella verificare che il numero di cifre significative di ogni misura sia coerente con il valore della sua incertezza (vedi pagina ??). s

Tabella 4.1: Allungamento di una molla vs massa del "peso" applicato. Nella tabella sono riportate nelle due colonne di sinistra la grandezza variata dello sperimentatore (ovvero la massa applicata alla molla) con la sua incertezza e nelle altre due colonne la grandezza "dipendente" (l'allungamento) con la sua incertezza.

Massa		Coordinata	
m (g)	u_m (g)	x (cm)	u_x (cm)
10.1	0.3	22.7	0.2
20.1	0.3	25.1	0.2
29.9	0.3	27.9	0.2
40.1	0.3	30.7	0.2
50.1	0.3	33.6	0.2
60.1	0.3	36.9	0.2

4.1 Rappresentazione grafica dei dati

Il primo utilizzo dei dati raccolti in una tabella è quello di costruire un grafico. I grafici sono una importante modalità per la presentazione e l'analisi preliminare dei dati scientifici. I grafici possono essere usati per suggerire relazioni fisiche, per confrontare i dati sperimentali con un andamento matematico previsto e per determinare facilmente alcuni parametri quali la pendenza di una linea retta. Infatti l'occhio umano riesce a distinguere molto efficacemente se dei punti sono allineati tra loro. Descriviamo nel seguito i vari tipi di grafico che si utilizzano in fisica.

4.1.1 Grafici lineari

Nel grafico lineare entrambi gli assi, ascisse e ordinate, hanno scale lineari. Per la creazione di un grafico lineare¹ è opportuno seguire una specifica sequenza di passi che sono validi sia se si riportano manualmente i dati su un foglio reale di carta millimetrata sia se, come sta diventando prassi, si utilizzano programmi di grafica computerizzata per l'esecuzione dei grafici². Le operazioni da eseguire per la compilazione dei grafici, che la pratica renderà automatiche, sono elencate qui di seguito:

1. Organizzare in una tabella i dati da inserire nel grafico (come già detto precedentemente) .
2. Decidere quale grandezza è da mettere sull'asse x (ascisse); di solito nell'asse x si pone la variabile indipendente e in quello y (ordinate) la variabile dipendente.
3. Decidere se l'origine deve apparire sul grafico. In alcuni casi è richiesto che l'origine appaia nel grafico, anche se il valore "zero" non è parte dei dati; per esempio, nel caso in cui si voglia determinare graficamente un'intercetta.
4. Scegliere una scala per ogni asse, ovvero determinare il valore iniziale da cui parte la scala e a quanti centimetri corrispondono un numero opportuno di unità di misura della grandezza da riportare nel grafico (Esempio: valore iniziale 0 grammi e a 5 grammi corrispondono 25 cm). Le scale devono essere scelte in modo che i dati da graficare si estendano su quasi tutta la carta millimetrata, e inoltre la scelta della scala deve essere "razionale" ovvero in modo da rendere facile localizzare quantità arbitrarie sul grafico. (Esempio: 5 divisioni = 23 centimetri è una pessima scelta.) Solo le divisioni principali devono essere riportate su ciascun asse.
5. Scrivere accanto a ciascun asse la variabile che indica la grandezza rappresentata *con le sue unità*. E' buona pratica dare un titolo al grafico, scrivendolo nel margine superiore del grafico eventualmente aggiungendo la data nella quale sono stati raccolti i dati. (Esempio: "Allungamento della molla vs massa, Data: gg/mm/yyyy")
6. Marcare ogni punto sperimentale nel grafico. Lo stile consigliato è marcare un punto circondato da un piccolo cerchio ($\odot$). Equivalentemente si può usare una piccola croce ($\times$) o il segno più ($+$).

¹La sequenza di azioni descritte è valida oltre che per i grafici lineari anche per gli altri tipi di grafici che verranno descritti nei prossimi paragrafi.

²Usando programmi di *computer* alcuni passi, come ad esempio la scelta delle scale degli assi sono fatte in modo automatico, anche se non sempre nel modo migliore. Tuttavia altre azioni, come il riportare nome ed unità delle variabili sugli assi, richiedono sempre un intervento umano.

7. Non unire i punti sperimentali con una linea spezzata. La “spezzata” rende più difficile capire l'andamento generale della relazione fra le due grandezze e invece insegue le fluttuazioni dovute alle incertezze statistiche sui dati. Fare in modo, scegliendo l'opportuna carta millimetrata (vedi dopo) oppure trasformando, quando è possibile, i dati con semplici funzioni matematiche, di ottenere un *andamento previsto rettilineo* tra ascisse e ordinate. Un righello trasparente può essere utilizzato per tracciare ad “occhio” una ragionevole retta in modo da lasciare un numero uguale di punti su ciascun lato della linea. Questo modo di procedere per quanto non rigoroso porta tipicamente a un risultato molto vicino a quello che si può ottenere con più complesse procedure di elaborazione matematica dei dati che saranno spiegate nel seguito.
8. Per determinare la pendenza della linea, scegliere due punti sulla linea i cui valori sono facilmente leggibili e che si estendano per quasi l'intera larghezza del grafico. Questi punti non dovrebbero essere, se non per caso, i punti dei dati sperimentali. Si ricordi che la pendenza ha unità di misura pari al rapporto tra le unità di misura dei due assi.
9. L'incertezza sul valore della pendenza può essere stimata come rapporto tra la maggiore delle incertezze dei due punti finali, e la distanza tra i due punti stessi.

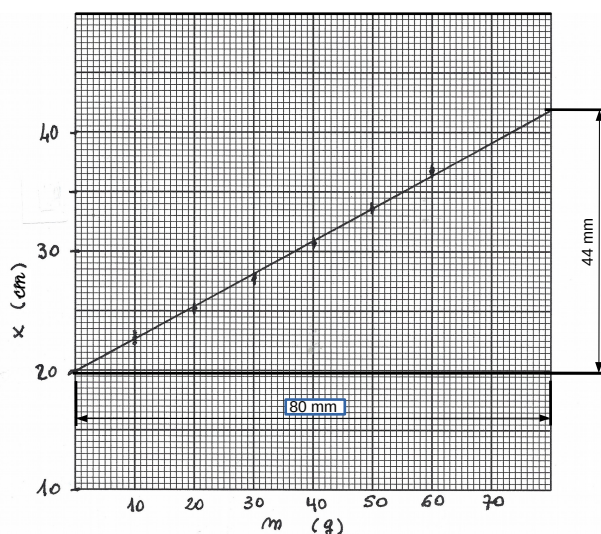


Figura 4.1: Grafico con scale lineari dei dati di tabella 4.1. Nel grafico sono indicate le misurazioni effettuate con un righello millimetrato per la valutazione del coefficiente angolare della retta tracciata. Vedi il testo per ulteriori dettagli.

Come applicazione delle regole espone creiamo un grafico in carta lineare con i dati della tabella 4.1. Nell'asse delle ascisse poniamo il valore della massa applicata alla molla scegliendo una scala in cui 10 mm corrispondono a 10 g e nell'asse delle ordinate riportiamo l'allungamento scegliendo una scala in cui 10 mm corrispondono a 5 cm di allungamento della molla. Nella figura 4.1 sono riportati i punti sperimentali ed è stata tracciata “ad occhio” una retta che approssima i dati. La teoria prevede infatti che per una molla in equilibrio ci sia una relazione lineare tra la forza applicata F (nel nostro caso $F = mg$) e il conseguente

allungamento $x - x_o$: $F = k(x - x_o)$ con k costante della molla e x_o lunghezza della molla a riposo (quando $F = 0$). La retta disegnata ha equazione $x = (g/k)m + x_o$ e quindi, utilizzando la retta tracciata nel grafico, la stima del parametro k è:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = g \frac{\Delta m}{\Delta x} = g \frac{80\text{mm } C_m}{44\text{mm } C_x}$$

dove C_m e C_x sono fattori di conversione; il primo trasforma i millimetri misurati nell'asse delle ascisse in kg il secondo trasforma i millimetri misurati nell'asse delle ordinate nell'allungamento espresso in metri. Dai dati sulle le scale delle ascisse e delle ordinate è facile calcolare i valori di C_m e di C_x :

$$C_m = 1 \frac{\text{g}}{\text{mm}} 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{g}} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{mm}}, \quad C_x = 5 \frac{\text{cm}}{\text{mm}} 10^2 \frac{\text{m}}{\text{cm}} = 500 \frac{\text{m}}{\text{mm}}$$

Sostituendo:

$$k = g \frac{80\text{mm } C_m}{44\text{mm } C_x} = 9.8 \times \frac{80 \times 10^3}{44 \times 500} = 35.6 \text{ kg s}^{-2}$$

Si lascia al lettore come esercizio la stima del valore di x_o .

Linearizzazione. Come mostrato anche nel precedente esempio l'uso dei grafici evidenzia facilmente una dipendenza lineare tra le grandezze fisiche riportate sugli assi per cui, come già notato nel punto 7 del paragrafo precedente, alle volte è opportuno *linearizzare* la relazione matematica che descrive i dati. Cosicché se dovessimo riportare su di un grafico una relazione matematica tra spazio e tempo in un moto uniformemente accelerato, descritta dall'equazione $s = (1/2)at^2$, potremo riportare nell'asse delle ascisse i valori di t^2 e su quelle delle ordinate i valori di s . In questo modo si ottiene una dipendenza lineare tra le variabili s e t^2 il cui coefficiente angolare è $a/2$. Operando in questo modo diremo che abbiamo linearizzato la relazione studiata.

4.1.2 Grafici Logaritmici

Oltre alle scale lineari sono molto utilizzate le scale logaritmiche che hanno vari scopi. Uno è quello di linearizzare certe classi di funzioni molto utilizzate nella descrizione di fenomeni fisici, l'altro è quello di riportare in uno stesso grafico diversi ordini di grandezza di una variabile.

Una scala logaritmica è un asse sul quale sono riportati segmenti di lunghezza proporzionale al logaritmo dei numeri rappresentati. Di solito gli interi sono indicati sulla scala come mostrato nella figura 4.2. Fissata la base a del logaritmo, al numero 1 corrisponde un segmento di lunghezza nulla, ovvero l'origine dell'asse logaritmico; al numero 2 corrisponde un segmento di lunghezza $\log_a 2$, al numero 10 corrisponde un segmento $\log_a 10$, al numero 100 corrisponde un segmento di lunghezza $\log_a 100 = 2\log_a 10$, al numero 20 corrisponde un segmento di lunghezza $\log_a 20 = \log_a 2 + \log_a 10$, e così via. Si noti che, poiché

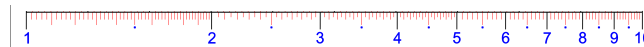


Figura 4.2: Scala logaritmica

$\log_a 10^n = n \log_a 10$, la lunghezza del segmento che rappresenta una “decade”, da 1 a 10, da 10 a 100, da 100 a 1000, ... ha sempre la stessa lunghezza.

La scelta della base del logaritmo corrisponde ad un semplice fattore di proporzionalità della scala, infatti, utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \log_b x = \text{cost} \log_b x$$

Le scale logaritmiche sono usate nei diagrammi bidimensionali del tipo detto semi-logaritmico (un

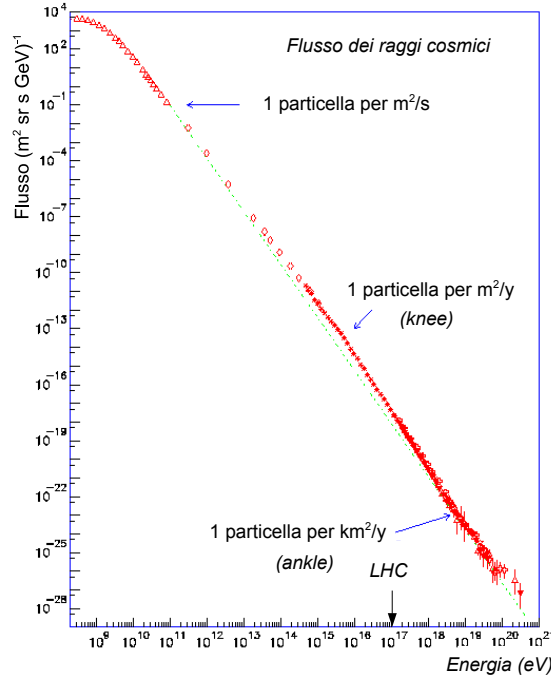


Figura 4.3: Questo grafico illustra come la scala logaritmica metta in evidenza strutture dei dati che l'uso di una scala lineare non sarebbe in grado di mostrare. Questo grafico, noto come *All particle spectrum*, rappresenta il numero dei raggi cosmici che colpiscono l'atmosfera terrestre per unità di superficie, di angolo solido, di tempo e di energia in funzione dell'energia.

asse lineare e un asse logaritmico) oppure del tipo detto doppio-logaritmico (entrambi gli assi logaritmici). Esistono delle carte millimetriche prestampate con i detti diagrammi anche se oggi il loro utilizzo è stato soppiantato dalla grafica computerizzata.

Grafico semi-logaritmico. In un grafico semi-logaritmico (alle volte abbreviato in semi-log) l'asse con scala logaritmica può essere quello delle ascisse o quello delle ordinate; nel primo caso il grafico è tipicamente utilizzato per comprimere la scala in modo da contenere vari ordini di grandezza come ad esempio mostrato nella figura 4.4. Il grafico semi-log con l'asse delle ordinate ha, oltre alla compressione della scala, la proprietà di linearizzare gli andamenti esponenziali del tipo $y = Ce^{kx}$ dove C e k sono delle costanti³. Infatti prendendo

³Si noti che se x è una grandezza fisica con le sue dimensioni, la costante k deve avere le dimensioni inverse per quanto detto nel paragrafo 1.8.2

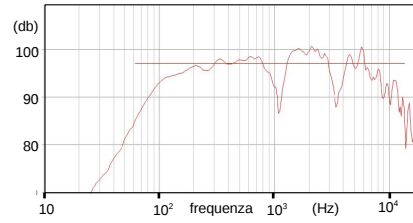


Figura 4.4: Esempio di grafico semi-log che mostra l'efficienza di risposta di un altoparlante in funzione della frequenza nell'intervallo 10 Hz – 20 kHz. Si noti che l'uso della scala logaritmica permette di rappresentare nell'asse delle ascisse tre ordini di grandezza. La retta nel grafico rappresenta la risposta ideale.

il logaritmo di entrambi i membri di questa equazione si ha

$$\log_a y = \log_a C e^{kx} = kx \log_a e + \log_a C \quad (4.1)$$

Come si nota da questa equazione il logaritmo di y è proporzionale a x e quindi la (4.1) apparirà in un grafico semilogaritmico come una retta (vedi come esempio la figura 4.5). Per

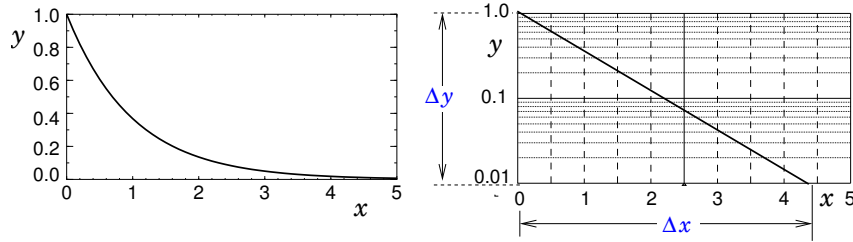


Figura 4.5: Grafico della funzione $y = e^{-kx}$ in scala lineare (a sinistra) e in scala semi-logaritmica (a destra). Nel grafico di destra è mostrato come si possa stimare graficamente la costante k che appare nella definizione della funzione.

valutare k nella (4.1) si può procedere in due modi: per via algebrica o per via grafica.

Via algebrica. Si scelgono due punti sulla retta, abbastanza lontani per minimizzare gli errori di lettura, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e, scegliendo come base dei logaritmi quella naturale, si ricava il parametro k come:

$$k = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

Via grafica. Per via grafica, si deve misurare con un righello la distanza Δy (vedi la figura 4.5) e rapportarla all'unità di misura scelta (tipicamente si sceglie la lunghezza di una decade L_{Decade}). Questa misura è la differenza dei logaritmi nella base scelta. In formule:

$$k = \frac{\Delta y}{L_{Decade}} \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} \ln 10$$

Tabella 4.2: Periodo di rivoluzione in anni (y) e distanza media dal sole in AU (Astronomic Units) dei pianeti del sistema solare (dati NASA).

Pianeta	Periodo T (y)	R (AU)
Mercurio	0.2411	0.387
Venere	0.6156	0.723
Terra	1.001	1.00
Marte	1.882	1.52
Giove	11.87	5.21
Saturno	29.44	9.58
Urano	83.81	19.20
Nettuno	163.8	30.05
Plutone	248.1	39.48

Grafico doppio-logaritmico. I grafici nei quali i due assi, delle ascisse e delle ordinate, hanno scale logaritmiche si chiamano doppio-logaritmici (abbreviato doppio-log). In questi grafici una funzione di potenza appare come una retta. Consideriamo una relazione tra grandezze del tipo

$$y = Ax^\alpha \quad (4.2)$$

prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ha

$$\log y = \alpha \log x + \log A \quad (4.3)$$

Questa relazione rappresenta una retta nelle variabili $\log y$ e $\log x$ con coefficiente angolare α e intercetta $\log A$. Si noti che il coefficiente angolare di questa retta è l'esponente della variabile x nella (4.2). Per la valutazione dei parametri nella (4.3) si usano le stesse procedure indicate nel paragrafo precedente per i grafici semi-logaritmici. Come esempio dell'uso di un grafico doppio-logaritmico per verificare la veridicità di una legge fisica prendiamo in considerazione la terza legge di Keplero applicata ai dati del nostro sistema solare planetario. La terza legge di Keplero dice che il quadrato del periodo orbitale di un pianeta T è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole R . In formule

$$T^2 \propto R^3 \quad \text{oppure, isolando } R: \quad R \propto T^{2/3} = T^{0.66} \quad (4.4)$$

La relazione (4.4) è una legge di potenza del tipo (4.2) per cui in un grafico doppio-log i dati di periodo e distanza media dal sole dei pianeti si dovrebbero allineare per confermare la terza legge di Keplero. In tabella 4.2 sono riportati i dati planetari presi da sito della NASA.

L'ispezione dei dati in tabella indica che nell'asse delle ascisse, dove metteremo il periodo T ci devono essere almeno 4 decadi e nell'asse delle ordinate almeno tre decadi se desideriamo che tutti i punti sperimentali stiano nel grafico. Fissato il numero di decadi per il grafico doppio-log⁴ con il criterio appena esposto, riportiamo i punti sperimentali su grafico e quindi si traccia una retta cercando di farla passare per tutti i punti sperimentali come mostrato nella figura 4.6. La retta tracciata deve essere prolungata attraverso tutto il foglio per poter misurare nel modo migliore la sua inclinazione. La misurazione dell'inclinazione della retta

⁴E' possibile scaricare dalla rete carte millimetriche lineari, logaritmiche e doppio logaritmiche scegliendo il numero di decadi desiderate nei due assi

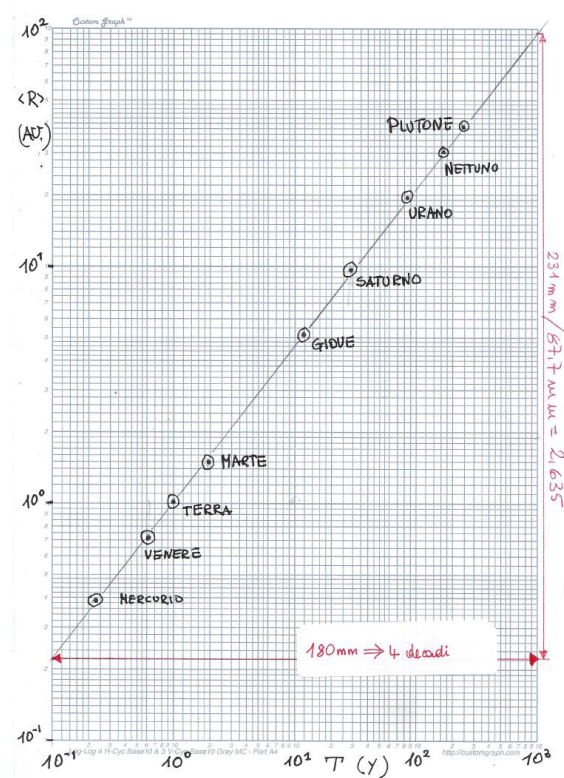


Figura 4.6: Grafico doppio-log che mostra la verifica della terza legge di Keplero con i dati del sistema solare (vedi testo).

disegnata nel grafico è stato ottenuta per via grafica (vedi il paragrafo 4.1.2) con il seguente risultato:

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.635 \text{ decadi}}{4.0 \text{ decadi}} = 0.66$$

valore in ottimo accordo con quello previsto la terza legge di Keplero.

4.1.3 Altri tipi di grafico – Grafici polari

In un sistema di coordinate polari ogni punto del piano è identificato da un angolo rispetto ad un semi-asse fissato e dalla sua distanza dall'origine del semiasse detto *polo*. In fisica si utilizza il grafico polare per rappresentare l'andamento di una grandezza in funzione dell'angolo rispetto ad una direzione prefissata (irraggiamento di una antenna, la sezione d'urto differenziale angolare⁵ rispetto alla direzione del fascio incidente, ...). Come esempio di un grafico polare consideriamo la gittata R di un proiettile che parta con velocità v_o in funzione dell'angolo di tiro. E' un facile esercizio di meccanica arrivare alla relazione $R = 2v_o^2 \sin 2\theta / g$. Il grafico polare di R in funzione di θ è mostrato nella figura 4.7.

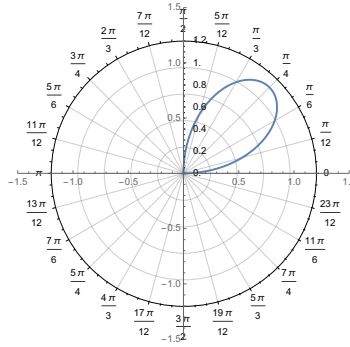


Figura 4.7: Esempio di grafico polare. Il grafico mostra l'andamento della gittata di un proiettile che parte con velocità in modulo costante in funzione dell'angolo di "alzo", limitato nell'intervallo $[0, \pi/2]$. Come è noto, la massima gittata si ottiene per $\theta = \pi/4$.

4.1.4 Istogrammi

Le varie rappresentazioni grafiche illustrate nei paragrafi precedenti sono utilizzate nel caso si studino dipendenze funzionali di una grandezza in funzione di un'altra; si vedano ad esempio le figure 4.1, 4.5 e 4.6 in cui sono rappresentate dipendenze funzionali sia teoriche sia sperimentali tra grandezze.

Nelle misurazioni ripetute di grandezze fisiche casuali, del tipo cioè di quelle illustrate nel paragrafo ?? e mostrate nella figura ??, l'intento non è quello di evidenziare una dipendenza funzionale (anche perché tipicamente si misura una sola grandezza) ma di studiare come i valori misurati si distribuiscono ovvero dove e come si addensano. L'istogramma è un importante strumento per analizzare visivamente come si distribuiscono le misure. Da

⁵La sezione d'urto differenziale angolare è proporzionale alla probabilità che una particelle incidente su un bersaglio sia diffusa di un certo angolo

un punto di vista più formale possiamo dire che l'istogramma è una rappresentazione grafica della distribuzione di dati divisi in classi che vengono dette *bin*. Come primo esempio consideriamo una grandezza aleatoria che assuma valori interi come il numero uscito nel lancio di un dado. Lanciamo il dado $N = 200$ volte e annotiamo per ogni lancio il risultato. Contiamo quante volte è uscito 1, quante volte 2, ..., quante volte 6. Riportiamo quindi i conteggi ottenuti nell'asse delle ordinate disegnando una barra di altezza proporzionale al conteggio ottenuto, come mostrato nella figura 4.8. In questo modo abbiamo ottenuto l'istogramma degli N valori della variabile aleatoria "numero uscito nel lancio del dado". Consideriamo adesso una grandezza x , continua che abbia assunto N valori: $x_1, x_2, \dots, x_N$.

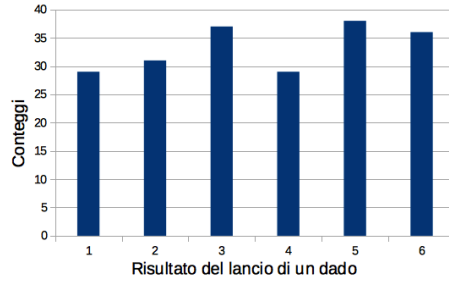


Figura 4.8: Iistogramma dei numero usciti in 200 lanci di un dado. L'analisi qualitativa dell'istogramma mostra che il dado sembra non essere truccato. Un'affermazione quantitativa di questo tipo ha bisogno degli strumenti statistici che verranno affrontati nei prossimi capitoli.

L'istogramma dei valori dati si costruisce dividendo l'asse delle x in "*bin*" di eguale dimensione⁶ in modo tale che in ognuno dei *bin* contenga un numero *congruo* di valori. Esempio. Supponiamo di volere "istogrammare" le seguenti $N = 20$ misure di una grandezza fisica (nelle opportune unità di misura): 2.36, 4.34, 2.03, 3.71, 4.28, 4.42, 3.75, 6.71, 6.53, 4.21, 6.98, 7.00, 0.87, 3.61, 5.31, 4.16, 7.31, 8.07, 5.78, 4.24. Una possibile scelta è quella di avere 9 *bin* tra i valori minimo e massimo delle misure, entrambi approssimati a valori ragionevolmente interizzati della grandezza. Il minimo è $x_{min} = 0.87$ approssimato a 0.0, il massimo è $x_{max} = 8.07$ approssimato a 9.0, ne segue che la larghezza del *bin* è $(9-0)/9 = 1$, misurato nelle stesse unità di x . Il passo successivo consiste nel contare quante misure sono contenute in ognuno dei *bin* e riportare questo conteggio nell'asse delle ordinate come mostrato nella figura 4.9; la curva a tratti che collega i valori ottenuti è il vero e proprio istogramma⁷. Un altro modo di mostrare il contenuto dei *bin* è quello di dividerlo per il numero totale di eventi contenuti nell'istogramma e in questo caso si parla di istogramma delle frequenze. Se n_i è il contenuto del *bin* i -esimo, l'istogramma delle frequenze nell' i -esimo *bin* avrà il valore n_i/N . Concludiamo mostrando nella figure 4.10 lo storico istogramma con il quale, nel 1974, è stata dimostrata l'esistenza del primo quark pesante il *charm*, scoperto nelle interazioni ad alta energia $pp \rightarrow e^+e^-$.

⁶La uguale dimensione di *bin* non è obbligatoria anzi in certe circostanze, come ad esempio nel test del χ^2 di Pearson, è necessario utilizzare *bin* di dimensione differente

⁷Le operazioni di istogrammazione qui descritte possono essere eseguite facilmente utilizzando programmi molto diffusi di trattamento computerizzato dei dati.

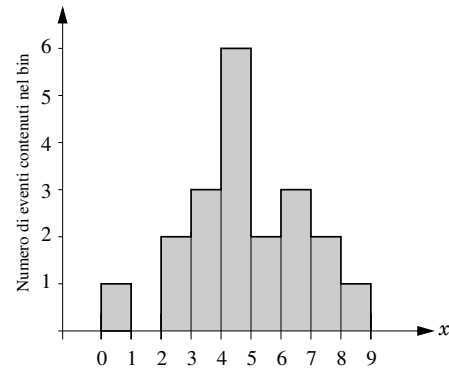


Figura 4.9: Esempio di istogramma dei 20 valori della variabile x indicati nel testo e raggruppati in 9 *bin*

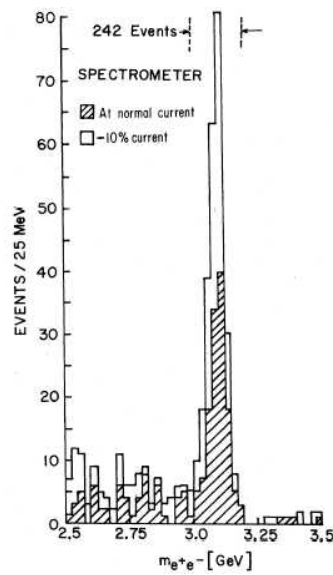


Figura 4.10: Istogramma originale che per la prima volta ha messo in evidenza l'esistenza del primo quark pesante: il charm. I due istogrammi sovrapposti servono a dimostrare che il picco non è dovuto ad un effetto strumentale