Esperimentazioni di Fisica 1

Prova in itinere del 1 febbraio 2018

SOLUZIONI

1. (12 Punti) **Quesito.** La misurazione del volume di sostanze liquide è eseguita con un cilindro graduato trasparente su cui è stampata una scala con “tacche” distanziate di 2 ml. Il costruttore del cilindro graduato dichiara che l'incertezza sulla misura del volume, dovuta alla taratura dello zero, è di ± 1 ml. Uno sperimentatore esegue le misurazioni di due volumi differenti V_1 e V_2 on lo stesso cilindro graduato, ottenendo i risultati:

$$V_1 = 29.0\,\mathrm{ml} \qquad V_2 = 24.5\,\mathrm{ml}$$

Lo sperimentatore valuta in ± 0.5 ml l'incertezza dovuta alla sola lettura del livello del liquido.

Calcolare l'incertezza di misura su V_1, V_2 e su $\Delta V = V_1 - V_2$.

Ripetere la valutazione delle incertezze supponendo di utilizzare due cilindri graduati diversi ma con le stesse caratteristiche.

Soluzione. [unc037] L'incertezza di misura su ciascuna delle misurazioni di volume eseguite ha due contributi indipendenti entrambi di tipo B:

1. $u_t = 1$ ml, dovuto alla taratura dello zero dello strumento, uguale per entrambe le misurazioni
2. $u_r = 0.5$ ml, dovuto all'incertezza di lettura[1] del livello del liquido, uguale per entrambe le misurazioni

L'incertezza totale su ogni misurazione di volume è la somma in quadratura dei due contributi elencati in quanto evidentemente indipendenti. Le incertezze sulle misure V_1 e V_2, u_1 e u_2 sono uguali e valgono:

$$u_i = \sqrt{u_t^2 + u_r^2} = \sqrt{(1)^2 + (0.5)^2} = 1.1\,\mathrm{ml} \quad (i = 1, 2)$$

Il risultato delle misurazioni dei volumi V_1 e V_2 si scrive come:

$$V_1 = (29.0 \pm 1.1)\,\mathrm{ml} \qquad V_2 = (24.5 \pm 1.1)\,\mathrm{ml}$$

La misura della grandezza indiretta ΔV è ottenuta tramite la differenza tra le due misure ottenute in modo diretto e vale:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = 29.0 - 24.5 = 4.5\,\mathrm{ml}$$

L'incertezza su ΔV è la composizione di quelle su V_1 e V_2 con l'osservazione che l'incertezza dovuta alla taratura è correlata con coefficiente di correlazione prossimo a 1 ($\rho \simeq 1$). Quindi:

$$u_{\Delta V} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta V}{\partial V_1}\right)^2 (u_t^2 + u_r^2) + \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial V_2}\right)^2 (u_t^2 + u_r^2) + 2\rho \frac{\partial \Delta V}{\partial V_1}\frac{\partial \Delta V}{\partial V_2} u_t^2} \tag{1}$$

Tenendo conto che $\partial \Delta V / \partial V_1 = 1$, $\partial \Delta V / \partial V_2 = -1$ e ponendo $\rho = 1$, possiamo scrivere:

$$u_{\Delta V} = \sqrt{(u_t^2 + u_r^2) + (u_t^2 + u_r^2) - 2u_t^2} = \sqrt{2u_r^2} = u_r\sqrt{2} = 0.7\,\mathrm{ml}$$

In conclusione:

$$\Delta V = (4.5 \pm 0.7)\,\mathrm{ml}$$

Nel caso in cui la misurazione fosse stata eseguita con due cilindri graduati differenti, ma con le stesse caratteristiche, l'incertezza sulla grandezza ΔV si ottiene dalla equazione (1) ponendo a zero il coefficiente di correlazione:

$$u_{\Delta V} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta V}{\partial V_1}\right)^2 (u_t^2 + u_r^2) + \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial V_2}\right)^2 (u_t^2 + u_r^2)} = \sqrt{2[(1)^2 + (0.5)^2]} = 1.6\,\mathrm{ml}$$

[1] Lo strumento descritto è di tipo analogico e quindi la lettura della sua scala si esegue in modo continuo valutando al meglio la posizione del livello del liquido. Le “tacche” non sono una stima dell'incertezza. L'incertezza di lettura dipende dalla capacità dello sperimentatore di interpolare tra le “tacche”.

2. (12 Punti) **Quesito.** Un contatore di radiazione di superficie sensibile $S = 30.0\,\mathrm{cm}^2$ è posto a una distanza d da una sorgente radioattiva isotropa di attività $\mathcal{A} = 10000.\,\mathrm{s}^{-1}$. Dopo ogni radiazione rivelata il contatore rimane insensibile alla radiazione per un intervallo temporale $\Delta t = 1\,\mathrm{ms}$. A che distanza d bisogna porre il contatore affinché la probabilità di perdere 1 o più eventi sia minore di 1%? (Si supponga pari a 1 l'efficienza di rivelazione).

Soluzione. [prb027] Poiché il contatore è a distanza d dalla sorgente, che emette isotropicamente nello spazio, la frazione di radiazione che colpisce la sua superficie sensibile è quella emessa nell'angolo solido $\Delta\Omega = S/d^2$ sotto cui è visto dalla sorgente (vedi la figura). Questa frazione (δ) è pari al rapporto tra $\Delta\Omega$ e l'angolo solido totale (4π):

$$f = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \frac{S}{4\pi d^2}$$

Essendo inoltre l'efficienza unitaria, il contatore avrà una velocità media di conteggio della radiazione data da:

$$\mathcal{A}\delta = \frac{\mathcal{A}S}{4\pi d^2}$$

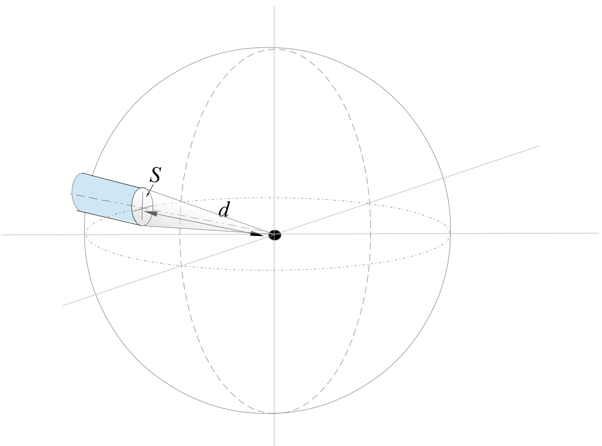
Il numero di conteggi nell'intervallo temporale $\Delta t = 1\,\mathrm{ms}$ è descritto da una distribuzione di Poisson di valore medio $\mu = (\mathcal{A}S/4\pi d^2)\Delta t$. La distanza minima cercata d è quella per cui $P_\mu(0) = 99\%$. Infatti la probabilità che in Δt ci siano 1 o più conteggi è pari a $1 - P(0) = 1\%$ come richiesto nel problema. Si può quindi scrivere la disequazione:

$$P_\mu(0) \geq \mathrm{e}^{-(\mathcal{A}S/4\pi d^2)\Delta t} = 0.99$$

Passando ai logaritmi e isolando d si ha:

$$d \geq \sqrt{\frac{-\mathcal{A}S\Delta t}{4\pi \ln 0.99}} = \sqrt{\frac{10000 \cdot 30}{12.266 \cdot 0.0101}} = 48.6\,\mathrm{cm}$$

Si poteva ragionare anche osservando che i tempi di arrivo della radiazione sul contatore seguono una distribuzione esponenziale $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ con parametro $\lambda = \delta\mathcal{A}$. La probabilità che un evento avvenga dopo un intervallo temporale Δt è: $P(t > \Delta t) = \mathrm{e}^{-\lambda\Delta t}$. Imponendo le condizioni del problema si arriva rapidamente allo stesso risultato.



---

3. (12 Punti) **Quesito.** Quattro contatori di raggi cosmici indipendenti hanno la stessa velocità media di conteggio $\lambda = 128$ eventi al minuto. I quattro contatori sono tenuti accesi per due minuti. Calcolare la probabilità che almeno tre di essi abbiano contato meno di 240 conteggi.

Soluzione. [prb029]

Il numero dei conteggi dei quattro contatori in un intervallo temporale $\Delta t = 2\,\text{min}$ è descritto da una distribuzione di Poisson con valore medio $\mu = \lambda \cdot \Delta t = 256$. Con questo valore medio la distribuzione di Poisson può essere approssimata con una gaussiana con lo stesso valore medio e deviazione standard data da $\sigma = \sqrt{\mu}$. La probabilità che uno dei contatori conti meno di $n_o = 240$ conteggi si ottiene calcolando la variabile normale standardizzata corrispondente a n_o:

$$z_o = \frac{n_o - \mu}{\sqrt{\mu}} = \frac{240 - 256}{\sqrt{256}} = -1$$

Dalle tabelle si ricava che $P(z < z_o) = 0.1587$. La probabilità che almeno tre di essi abbiano contato meno di 240 conteggi si ottiene sommando le probabilità binomiali $\mathcal{B}_p(3,4)$ e $\mathcal{B}_p(4,4)$ con $p = 0.1587$:

$$\mathcal{B}_p(3,4) + \mathcal{B}_p(4,4) = \binom{4}{3} p^3(1-p)^1 + \binom{4}{4} p^4(1-p)^0 = 1.35 \cdot 10^{-2} + 6.34 \cdot 10^{-4} = 1.40\%$$

Ovviamente lo stesso risultato, al prezzo di un calcolo in più, si ottiene passando per la probabilità complementare:

$$1 - \mathcal{B}_p(0,4) - \mathcal{B}_p(1,4) - \mathcal{B}_p(2,4) = 1.40\%$$

---

4. (6 Punti) Quesito Un'urna contiene un numero uguale di dadi truccati e non truccati. La distribuzione di probabilità del numero di uscita n per i dadi truccati è: $P(n = 6) = 1/2$ e $P(n \neq 6) = 1/10$. Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Supponendo che i due lanci abbiano dato come risultato 2 e 3, qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati?

Soluzione. [tby017] Sia A l'evento: "*il dado estratto non è truccato*". Se con X si indica l'esito del lancio del dado estratto, la probabilità di X, condizionata da A, è:

$$P(X|A) = \frac{1}{6} \qquad \text{per ogni } X$$
$$P(6|\overline{A}) = \frac{1}{2}, \quad P(X|\overline{A}) = \frac{1}{10}, \quad \text{per } X \neq 6$$

Sia B l'evento: *due lanci consecutivi hanno dato 2 e 3 come risultato*. Tenendo conto delle relazioni precedenti si possono calcolare le probabilità condizionate:

$$P(B|A) = (1/6)^2, \qquad P(B|\overline{A}) = (1/10)^2$$

La probabilità cercata, $P(\overline{A}|B)$, si ottiene applicando il teorema di Bayes, tenendo inoltre conto che $P(A) = P(\overline{A}) = 1/2$ in quanto l'urna inizialmente contiene lo stesso numero di dadi truccati e non. Quindi:

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(B|\overline{A})P(\overline{A})}{P(B)} = \frac{P(B|\overline{A})P(\overline{A})}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} =$$
$$= \frac{(1/10)^2 \cdot 1/2}{(1/6)^2 \cdot 1/2 + (1/10)^2 \cdot 1/2} = \frac{9}{34} = 0.265$$

Si poteva arrivare allo stesso risultato *aggiornando* la probabilità dopo il primo lancio del dado con esito "2". Indicando con $E2$ l'evento *il lancio del dado ha dato esito 2*, si ha:

$$P(\overline{A}|E2) = \frac{P(E2|\overline{A})P(|\overline{A})}{P(E2|\overline{A})P(|\overline{A}) + P(E2|A)P(A)} = \frac{1/10 \cdot 1/2}{1/10 \cdot 1/2 + 1/6 \cdot 1/2} = \frac{3}{8}$$

E' facile verificare, applicando lo stesso ragionamento, che $P(A|E2) = 5/8$. Sia ora $E3$ l'evento *il lancio del dado ha dato esito 3*. Dopo il primo lancio in cui si è verificato $E2$ la probabilità *a priori* che il dado sia truccato non è più 1/2 ma 3/8. Con questa informazione e applicando nuovamente il teorema di Bayes si calcola la probabilità che il dado sia truccato se si verifica $E3$:

$$P(\overline{A}|E3) = \frac{P(E3|\overline{A})P(|\overline{A}|E2)}{P(E3|\overline{A})P(\overline{A}|E2) + P(E2|A)P(A|E2)} = \frac{1/10 \cdot 3/8}{1/10 \cdot 3/8 + 1/6 \cdot 5/8} = \frac{9}{34}$$

Stesso risultato già precedentemente trovato.

Si noti che $E2$ e $E3$ **non sono eventi indipendenti** infatti:

$$P(E2) = P(E2|A)P(A) + P(E2|\overline{A})P(|\overline{A}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{15}$$
$$P(E3) = P(E3|A)P(A) + P(E3|\overline{A})P(|\overline{A}) = \frac{2}{15}$$

La probabilità che si verifichino sia $E2$ sia $E3$ è:

$$P(E2 \cap E3) = P(E2|A)P(E3|A)P(A) + P(E2|\overline{A})P(E3|\overline{A})P(|\overline{A}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{900}$$

ma $P(E2) \cdot P(E3) = 4/225$ e quindi risulta $P(E2 \cap E3) \neq P(E2) \cdot P(E3)$, e la condizione di indipendenza dei due eventi è violata.

---

5. (6 Punti) **Quesito.** La variabile aleatoria X è distribuita in modo normale con valore medio $\mu = 10.00$ e varianza $\sigma^2 = 0.040$. Siano x_1, x_2, x_3, x_4 quattro valori estratti da questa distribuzione. Calcolare la probabilità che la loro media aritmetica:

$$y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i$$

sia maggiore di 10.15.

Soluzione. [prb026]

La variabile aleatoria Y definita come:

$$Y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} X_i$$

è distribuita in modo normale con valore medio e varianza rispettivamente:

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \mathbb{E}[X_i] = \mu = 10.00, \qquad \mathbb{V}\text{ar}[Y] = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{4} \mathbb{V}\text{ar}[X_i] = \frac{\sigma^2}{4} = 0.01$$

La variabile normale standardizzata z in questo caso è:

$$z = \frac{Y - \mu}{\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}[Y]}}$$

Ponendo $Y = 10.15$, si ottiene $z = 1.5$. Infine dalle tabelle della funzione cumulativa di probabilità della normale si ricava:

$$P(z > 1.5) = P(Y > 10.15) = 6.7\%$$

---

n

6. (6 Punti) **Quesito.** La variabile aleatoria x è distribuita con la seguente densità di probabilità:

$$f(x) = \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad \text{per} \;\; x > 0$$

Calcolare la probabilità che la variabile abbia un valore minore del valore modale della distribuzione. Si fornisce l'andamento della funzione cumulativa: $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}(1 + \lambda x)$.

Soluzione. [prb025] Il valore modale, corrispondente al massimo della distribuzione, si ottiene annullando la derivata della distribuzione $f(x)$:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda^2 (1 - x\lambda) \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

La soluzione di questa equazione è $x = 1/\lambda$. Dalla distribuzione cumulativa della distribuzione si ottiene:

$$P(x < 1/\lambda) = F(1/\lambda) = 1 - \mathrm{e}^{-1}(1 + 1) = 0.26$$

---

7. (6 Punti) **Quesito.** Un dispositivo per la misura diretta del volume consiste in un tubo cilindrico graduato riempito parzialmente di liquido. Immergendo un corpo solido nel liquido si misura il volume del corpo dalla variazione di livello del liquido. Sapendo che il diametro interno del tubo è $d = 30.0$ mm, calcolare la sensibilità di questo dispositivo di misura.

Soluzione. [mea007] Per definizione la sensibilità di uno strumento è la derivata della risposta rispetto al valore della misura. Nel caso in esame la riposta dello strumento è l'altezza h del livello del liquido misurata rispetto ad un certo riferimento (lo zero). La grandezza misurata è il volume V, solido o liquido, che inserito nel cilindro provoca una variazione di livello h tale che $V = \pi d^2 h/4$. Isolando la h si ottiene: $h = 4V/(\pi d^2)$. La sensibilità è quindi:

$$S = \frac{dh}{dV} = \frac{4}{\pi d^2} = 1.4 \cdot 10^{-3} \mathrm{mm}^{-2}$$