Esperimentazioni di Fisica 1

Prova in itinere del 15 febbraio 2017

SOLUZIONI

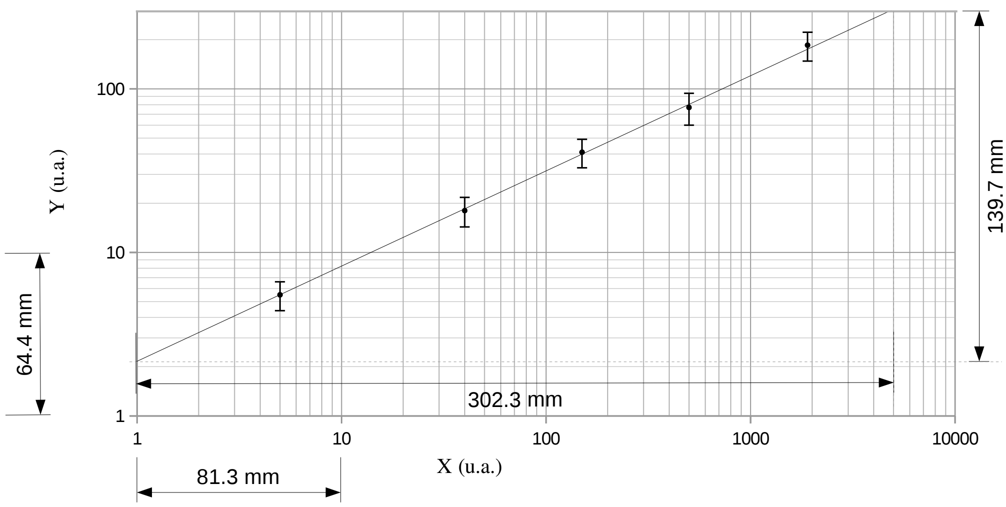
1. (12 Punti) **Quesito.** Le misurazioni delle grandezze X e Y hanno dato i risultati, nelle opportune unità di misura, mostrati nella tabella. Il modello matematico che si ipotizza possa adattarsi ai dati è: $Y = kX^{\alpha}$.

X(u.a.)	Y (u.a.)
5.0	5.5 ± 1.1
40.0	18.0 ± 3.7
150	41.0 ± 8.1
500	77 ± 17
1900	185 ± 37

Si chiede:

1. scegliere il tipo di carta millimetrata nel quale riportare i punti sperimentali in modo che il modello matematico dato appaia rettilineo giustificando il motivo della scelta.
2. riportare nel grafico i dati con le loro incertezze
3. valutare graficamente l'esponente α tracciando la "migliore retta" per i dati.

Soluzione. Il grafico *doppio-log* è quello che linearizza la legge di potenza ipotizzata. Inserendo nel grafico doppio logaritmico i punti dati si ottiene il seguente risultato: E' stata tracciata la retta



migliore con la tecnica far passare la retta per quanto possibile vicino ai punti. La misurazione del coefficiente angolare della retta è stata eseguita misurando con un regolo millimetrato le distanze indicate in figura. Nella figura sono inoltre inicate le misure della lunghezza delle decadi per i due assi coordinati.

Il coefficiente angolare α è quindi dato da:

$$\alpha = \frac{139.7}{64.4} \times \frac{81.3}{302.3} = 0.58$$

2. (12 Punti) **Quesito.** Si considerino due variabili aleatorie intere n_1 e n_d con n_1 risultato del lancio di un dado ben equilibrato e con $n_d = n_1 - n_2$ dove n_2 è il risultato del lancio di un altro dado ben equilibrato. Calcolare il coefficiente di correlazione tra n_1 e n_d.

   Suggerimento. Calcolare i valori medi e le varianze di n_1 e n_d operando la sostituzione $n_d = n_1 - n_2$. Successivamente calcolare la covarianza di n_1 e n_d.

   Soluzione. Il coefficiente di correlazione ρ tra due variabili aleatorie x e y è definito dalla espressione:
$$\rho = \frac{\mathbb{E}[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]}{[\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[x]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[y]}}$$
   dove μ_x e μ_y sono rispettivamente i valori medi di x e y. Applicando questa relazione al caso in esame si ha:
$$\rho = \frac{\mathbb{E}[(n_1-\mu_{n_1})(n_d-\mu_{n_d})]}{[\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[n_1]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[n_d]}}$$

   Calcolo dei valori medi. La variabile discreta n_1 è distribuita in modo uniforme tra 1 e 6, con $P(n_1) = 1/6, \quad n_1 = 1, \ldots, 6$, si ha quindi:
$$\mathbb{E}[n_1] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$
   Il calcolo del valore medio della varaibile discreta n_d si può ottenere applicando il valore atteso alla sua definizione:
$$\mathbb{E}[n_d] = \mathbb{E}[n_1 - n_2] = \mathbb{E}[n_1] - \mathbb{E}[n_2] = 0$$
   in quanto n_1 e n_2 hanno la stessa distribuzione.

   Calcolo delle varianze. La varianza di n_1 si calcola direttamante dalla definizione di varianza[1]:
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[n_1] = \mathbb{E}\left[\left(n_1 - \frac{7}{2}\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{6}\left(k-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} = \left(\frac{25}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}\right)\frac{1}{6} = \frac{70}{24}$$
   La varianza di n_d si ottiene facilmente dalla proprietà di additività delle varianze di variabili indipendenti:
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[n_d] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[n_1 - n_2] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[n_1] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[n_2] = 2\cdot\frac{70}{24} = \frac{140}{24}$$

   Calcolo della covarianza
$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathrm{ov}[n_1, n_d] =& \mathbb{E}\left[\left(n_1-\frac{7}{2}\right)n_d\right] = \mathbb{E}[n_1 n_d] - \frac{7}{2}\cdot 0 = \mathbb{E}[n_1^2] - (\mathbb{E}[n_1])^2 = \\ =& \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - \frac{49}{4} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{364-294}{24} = \frac{70}{24}\end{aligned}$$

   Calcolo del coefficiente di correlazione
$$\rho = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}[n_1, n_d]}{[\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[n_1]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[n_d]}} = \frac{70}{24}\frac{24}{70\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. (6 Punti) **Quesito.** Una ditta acquista lo stesso modello di lampada da illuminazione da tre fabbriche diverse: A, B e C. Il 60 % delle lampade acquistate proviene dalla fabbrica A, il 30 % dalla fabbrica B e il 10 % dalla fabbrica C. Le percentuali di lampade difettose prodotte da A, B, C sono rispettivamente il 2 %, il 4 % e il 5 %. Utilizzando il teorema di Bayes, calcolare la probabilità che una lampada risultata essere difettosa sia stato prodotta dalla fabbrica C.

[1] Si arriva allo stesso risultato sviluppando il quadrato e ricordando che $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

Soluzione. [tby010] Presa a caso una lampada tra quelle acquistate dalla ditta, le probabilità che provenga dalle fabbriche A, B e C sono rispettivamente:

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.1$$

Indicando con F l'evento : "la lampada è difettosa", si ha:

$$P(F|A) = 0.02, \quad P(F|B) = 0.04, \quad P(F|C) = 0.05$$

La probabilità che la lampada difettosa provenga dalla fabbrica C si ottiene applicando il teorema di Bayes:

$$P(C|F) = \frac{P(F|C)P(C)}{P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C)} = \frac{5}{29} = 17.2\%$$

4. (6 Punti) **Quesito.** Un contatore di raggi cosmici conta in media 27.3 particelle in un minuto. Se resta acceso per 10 s qual è la probabilità che non conti particelle? e la probabilità che ne conti più di 3?

Soluzione. I conteggi del contatore durante un intervallo di tempo di 10 s seguono la distribuzione di Poisson con valore medio che si ottiene moltiplicando la velocità di conteggio media per la durata dell'intervallo. La velocità di conteggio media è data in $(\text{minuti})^{-1}$, e il suo valore espresso in s^{-1} è:

$$\text{velocità di conteggio} \quad = \frac{27.3}{60} = 0.455\,\text{s}^{-1}$$

Poiché il numero di conteggi medio (μ) in un intervallo di tempo di 10 s è:

$$\mu = 0.455 \times 10 = 4.55$$

i conteggi (k) in questo intervallo di tempo si distribuiscono secondo la distribuzione di Poisson:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-4.55}$$

Da questa distribuzione si calcola la probabilità che non ci siano conteggi:

$$P(0) = \mathrm{e}^{-4.55} = 1.06\%$$

e la probabilità che ci siano più di 3 conteggi:

$$P(>3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] = 1 - \mathrm{e}^{-4.55}\left[1 + 4.55 + \frac{4.55^2}{2} + \frac{4.55^3}{6}\right] = 66.6\%$$

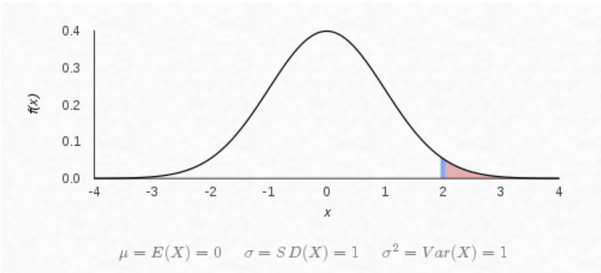
5. (6 Punti) **Quesito.** Le misure del periodo di un pendolo semplice sono distribuite secondo una gaussiana di valore medio 1.82 s e deviazione standard 0.05 s. Quale è la probabilità di ottenere misure del periodo maggiori di 1.92 s? Quale è la probabilità di ottenere misure del periodo minori di 1.70 s?

   Soluzione Il modo per risolvere il problema consiste nel passaggio alla variabile gaussiana standardizzata z per i valori dati del periodo. Si ha:

$$z_1 = \frac{1.92 - 1.82}{0.05} = 2 \quad \text{e} \qquad z_2 = -\frac{1.70 - 1.82}{0.05} = -2.4$$

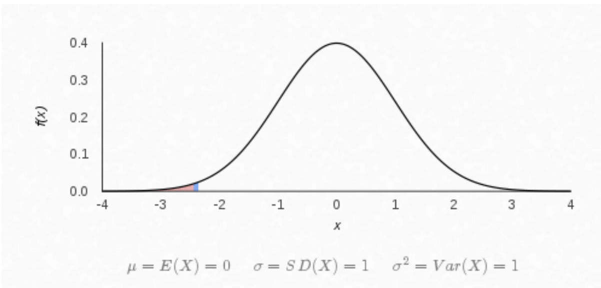
   La probabilità di ottenere un periodo maggiore di 1.92 s è data da:

$$\int_{z=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz = 0.0228 = 2.28\%$$



   La probabilità di ottenere un periodo minore di 1.70 s è data da:

$$\int_{-\infty}^{-2.4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz = 0.0082 = 0.82\%$$



6. (12 Punti) **Quesito.** La resistenza di un resistore è stata misurata alla temperatura $T_o = 20\,°\mathrm{C}$ e si è ottenuto il valore $R = (107.3 \pm 0.4)\mathrm{k}\Omega$. Il coefficiente di temperatura del resistore è $\alpha = 1.00 \times 10^{-3}$. Si ricorda che $R(T) = R_o[1 + \alpha(T - T_o)]$. Successivamente la stessa resistenza è utilizzata per misurare la corrente I che la attraversa misurando la caduta di tensione V ai capi della resistenza. Dalla legge di Ohm si ha:

$$I = \frac{V}{R}$$

   La misurazione della tensione V ai capi della resistenza ha come risultato $V = 1.00 \pm 0.01\mathrm{V}$. La temperatura del resistore, al momento della misurazione di V, è compresa tra $10\,°\mathrm{C}$ e $20\,°\mathrm{C}$ senza altre informazioni. Calcolare I con la sua incertezza.

   Soluzione. Iniziamo stimando come l'informazione sulla temperatura influenza il valore e l'incertezza della resistenza. La temperatura all'istante della misurazione della corrente può essere considerata una variabile aleatoria continua con una distribuzione uniforme compresa tra 10 ° C e 20 ° C.

Il valore medio di tale distribuzione è $\overline{T} = (10+20)/2 = 15\,°\mathrm{C}$ e la sua deviazione standard è $u_T = (20-10)/\sqrt{12} = 5/\sqrt{3} = 2.9\,°\mathrm{C}$.

Poiché $R(T) = R_o[1+\alpha(T-T_o)]$ (con $T_o = 20\,°\mathrm{C}$) il valore stimato di R, all'istante della misurazione della corrente, sarà:

$$\overline{R} = R(\overline{T}) = R_o[1+\alpha(\overline{T}-T_o)] = 107.3[1+10^{-3}(15-20)] = 106.76\,\mathrm{k\Omega}$$

L'incertezza standard u'_R dovuta alla temperatura è:

$$u'_R = \left.\frac{\partial R}{\partial T}\right|_{T=\overline{T}} u_T = R_o \alpha u_T = 0.31\,\mathrm{k\Omega}$$

Per ottenere l'incertezza totale su R si somma in quadratura questa incertezza con l'incertezza standard con cui è data R, $u''_R = 0.4\,\mathrm{k\Omega}$, ovvero:

$$u_R = \sqrt{{u'_R}^2 + {u''_R}^2} = 0.51\,\mathrm{k\Omega}$$

Determinato il valore da assegnare a R, $(106.76 \pm 0.51)\,\mathrm{k\Omega}$, possiamo valutare la corrente come

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1.0}{106.76} = 9.37\mathrm{mA}$$

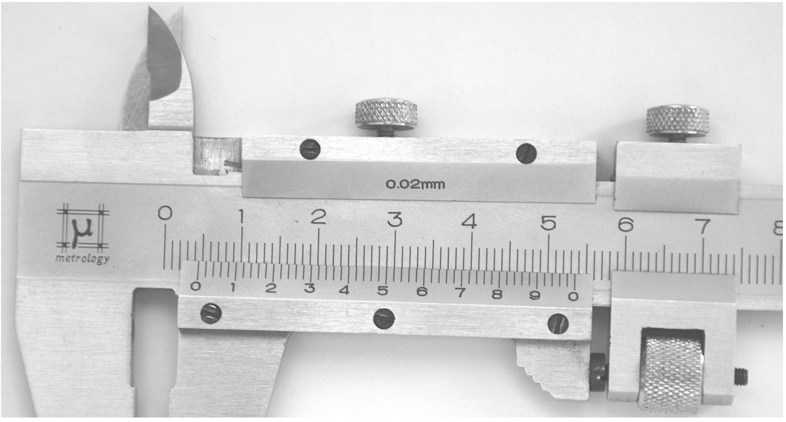
L'incertezza su I si ottiene applicando la formula per le espressioni monomie:

$$u_I = I\sqrt{\left(\frac{u_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{u_R}{R}\right)^2} = 9.37\sqrt{\left(\frac{0.01}{1.00}\right)^2 + \left(\frac{0.51}{106.76}\right)^2} = 0.10\,\mathrm{mA}$$

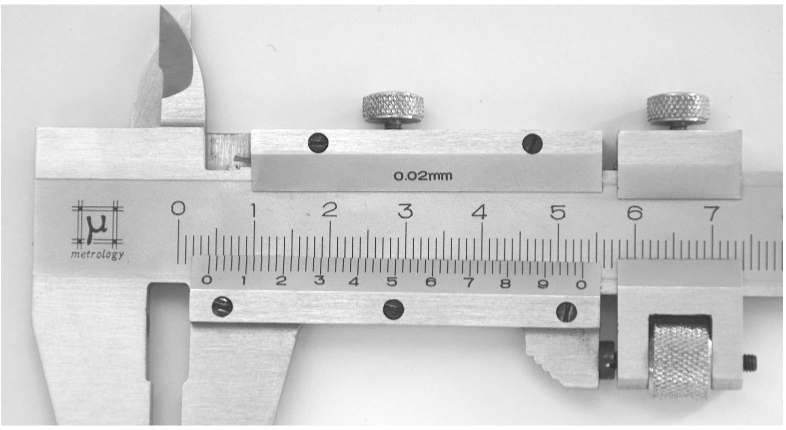
Risultato finale:

$$I = (9.37 \pm 0.10)\,\mathrm{mA}$$

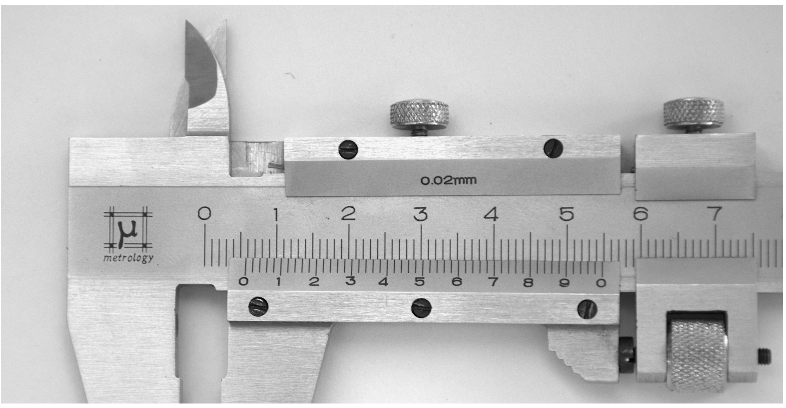
7. (6 Punti) **Quesito.** Leggere e riportare i valori delle misure indicate dal cursore con nonio mostrate nelle seguenti figure.



Misure accettabili: 4.48 - 4.52 mm



Misure accettabili: 4.16 - 4.20 mm



Misure accettabili: 5.76 - 5.82 mm