Esperimentazioni di Fisica 1

Prova d'esame del 18 febbraio 2019

SOLUZIONI

1. (12 Punti) **Quesito.** La misurazione della massa di una certa quantità di una sostanza liquida si esegue con l'uso di una bilancia. La procedura consiste nella scelta di un contenitore di volume adeguato che viene preventivamente pesato vuoto. Successivamente si riempie il contenitore con la sostanza liquida da misurare e si ripete, con la stessa bilancia, la misurazione del peso del contenitore riempito con il liquido.

   La bilancia a disposizione è del tipo digitale con un *display* a 3 cifre significative con una risoluzione di $1g$. Nel manuale d'uso della bilancia è riportato inoltre che l'incertezza della misura, dovuta alla taratura, è il 3% del valore letto con un livello di confidenza del 99%. Il costruttore dichiara inoltre che le incertezze delle bilance costruite hanno una distribuzione gaussiana.

   Il peso del contenitore vuoto risulta essere $p_c = 265\,\mathrm{g}$. Il peso del contenitore riempito con il liquido è $p_{c+l} = 338\,\mathrm{g}$. Stimare il valore della massa del liquido con la sua incertezza.

   Soluzione. [unc036] Calcoliamo l'incertezza standard delle due misurazioni eseguite: la pesata del contenitore vuoto e la pesata con il contenitore riempito con il liquido da misurare. L'incertezza di ciascuna delle due misurazioni ha due contributi u_t e u_r indipendenti ed entrambi di tipo B:

   1. u_t, dovuto alla calibrazione dello strumento: $u_t = 0.03m/2.6\,\mathrm{g}$ con m valore misurato dalla bilancia (la divisione per 2.6 serve a rendere standard l'incertezza estesa citata nel testo)
   2. u_r, dovuto alla risoluzione dello strumento digitale: $u_r = 1/\sqrt{12} = 0.29\,\mathrm{g}$

   L'incertezza totale su ogni misurazione è la somma in quadratura dei due contributi elencati, quindi per il contenitore:

   $$u_c = \sqrt{(0.03 \times 265/2.6)^2 + (0.29)^2} \simeq 3.1\,\mathrm{g}$$

   e analogamente per il contenitore più il liquido:

   $$u_{c+l} = \sqrt{(0.03 \times 338/2.6)^2 + (0.29)^2} \simeq 3.9\,\mathrm{g}$$

   La massa m_l del liquido è

   $$m_l = p_{c+l} - p_c = 73\,\mathrm{g}$$

   L'incertezza su m_l è la composizione delle incertezze su p_c e p_{c+l}, e si noti inoltre che le due misurazioni sono fortemente correlate poiché sono state eseguite con lo stesso strumento e quindi il coefficiente di correlazione tra le loro misure è $\rho \simeq 1$.

   I coefficienti di sensibilità sono:

   $$\frac{\partial m_l}{\partial p_{c+l}} = 1, \qquad \frac{\partial m_l}{\partial p_c} = -1$$

   Otteniamo quindi:

   $$u(m_l) = \sqrt{u_c^2 + u_{c+l}^2 - 2\rho u_{t(c)} u_{t(c+l)}} =$$

   $$= \sqrt{3.1^2 + 3.9^2 - 2(0.03 \times 265/2.6)(0.03 \times 338/2.6)} \simeq 1g$$

   Infine il risultato della misurazione è:

   $$m_l = (73 \pm 1)g$$

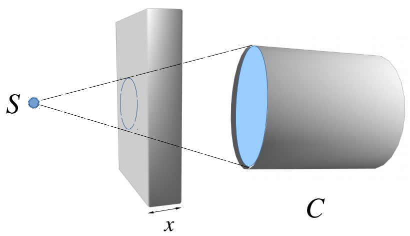
2. (12 Punti) **Quesito.** Una misurazione del potere di assorbimento della radiazione da parte del materiale ferro si esegue frapponendo spessori noti di ferro tra la sorgente radioattiva S e il contatore C (vedi la figura). Nell'esperimento in esame sono stati misurati i conteggi di C in un intervallo temporale $\Delta t = 1000\,\mathrm{s}$ (identico in ogni misurazione e con incertezza trascurabile) senza spessori e con alcuni spessori di ferro. Il dati dei conteggi ottenuti in corrispondenza di un certo spessore (di incertezza trascurabile) sono riportati nella tabella.

   La teoria prevede che l'intensità della radiazione $I(x)$ emessa da una sorgente schermata da un'assorbitore di spessore x, sia descritta dalla relazione:

$$I(x) = I_o \mathrm{e}^{-\mu x} \tag{1}$$

   dove $I_o \equiv I(0)$ è l'intensità senza assorbitori interposti e μ è il cosidetto *coefficiente di assorbimento*, in questo caso, del ferro.

   Riportare su un grafico i dati in modo che la curva attesa sia una retta, tracciare la retta migliore che approssima i dati e stimare dal grafico i parametri I_o e μ. Infine valutare la qualità del fit ottenuto con il test del χ^2.



Spessore Fe (mm)	Conteggi Ni
0	512
15	203
30	100
45	35

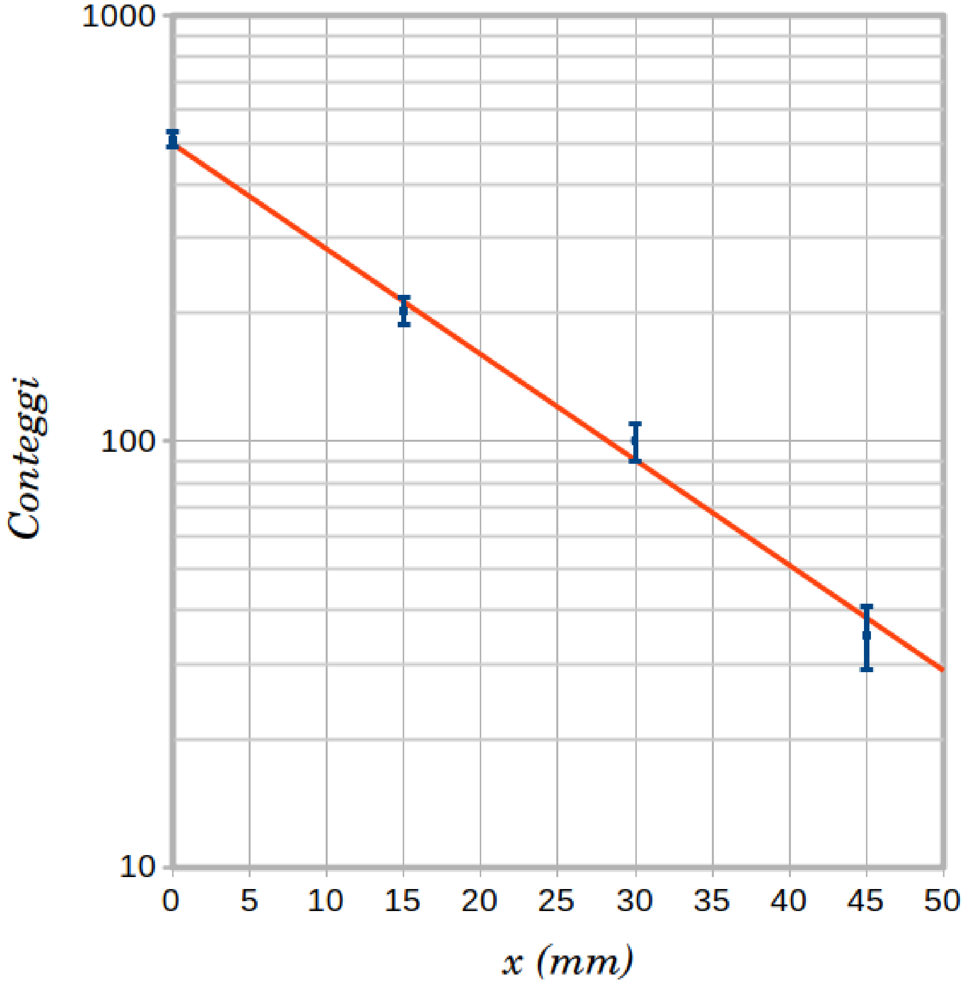
Soluzione. [mea009] Poiché il tempo di accensione del contatore C è uguale in tutte le misurazioni, i conteggi N_i riportati nella tabella sono proporzionali all'intensità della radiazione rilevata dopo l'assorbitore, e quindi la (1) è la relazione che descrive i conteggi attesi del contatore:

$$N(x) = N_o \mathrm{e}^{-\mu x} \tag{2}$$

Inoltre, poiché i decadimenti radioattivi sono governati dalla statistica di Poisson, l'incertezza da associare ai conteggi è la radice quadrata del conteggio. La tabella dei dati completata con le incertezze sui conteggi è:

$x\,(\mathrm{mm})$	N_i	$u(n_i) = \sqrt{N_i}$
0	512	23
15	203	14
30	100	10
45	35	6

La relazione (2) è di tipo esponenziale e utilizzando una carta millimetrata semi-logaritmica l'andamento atteso è rettilineo.



Nel grafico sono riportati i punti sperimentali con le loro incertrezze e la retta migliore tracciata "a mano". La stima dei parametri si ottiene utilizzando i punti sulla retta corrispondenti a $x_1 = 0\,\mathrm{mm}$ e $x_2 = 50\,\mathrm{mm}$. I valori letti sono rispettivamente $y_1 = 500$ e $y_2 = 29$. Il parametro μ coefficiente angolare della retta è:

$$\mu = -\frac{\ln 500 - \ln 29}{50 - 0} = -\frac{6.215 - 3.367}{50} = -0.057\,\mathrm{mm}^{-1}$$

La relazione che si ottiene dal *fit* eseguito "a mano" è:

$$N(x) = 500\,\mathrm{e}^{-0.057x}$$

Il parametro I_o nella (2) si ottiene osservando che le misurazioni sono durate $\Delta t = 1000\,\mathrm{s}$, per cui $I_o = N_o/\Delta t = 0.50\$,\mathrm{s}^{-1}$. Calcolo del χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{N_i - N_o\mathrm{e}^{-\mu x_i}}{\sqrt{N_i}}\right)^2 = \left(\frac{512-500}{23}\right)^2 + \left(\frac{203-212.6}{14}\right)^2 + \left(\frac{100-90.4}{10}\right)^2 + \left(\frac{35-38.5}{6}\right)^2 =$$

$$= 0.272 + 0.474 + 0.915 + 0.332 = 1.994$$

Il numero dei gradi di libertà è 2 (4 punti sperimentali e 2 parametri valutati). Dalle tabelle risulta:

$$P(\chi^2 > 1.99) = 37\%$$

3. (12 Punti) **Quesito.** Stabilire, utilizzando il χ^2, se la seguente distribuzione discreta di numeri:

valore	frequenza
0	19
1	15
2	10
3	5
4	1
5	0

segue la distribuzione di Poisson di valore medio $\mu = 1$

Soluzione. [chi2017] L'espressione matematica della distribuzione attesa è data da:

$$P_\mu = N\frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu} = N\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

dove N è il numero totale degli eventi della distribuzione ottenuta che nel caso in esame vale 50. Aggiungendo alla tabella data 1) la colonna dei valori attesi 2) la colonna della differenza tra valori attesi e i valori della frequenza e 3) la colonna che contiene il contributo al χ^2 dato da

$$\frac{\text{freq.-valore atteso})^2}{\text{valore atteso}}$$

si ottiene

valore	frequenza	valori attesi	χ^2
0	19	18.4	0.02
1	15	18.4	0.63
2	10	9.2	0.07
3	5	3.1	1.02(*)
4	1	0.9	–
5	0	0.2	–
			1.7

(*) questo contributo al χ^2 è la somma dei valori corrispondenti a $x = 3, 4, 5$. Il numero di gradi di libertà in questo caso è: 4-1=3, da cui si ricava

$$P(\chi^2 > 1.7|\nu = 3) = 64\%$$

Valore che conferma la validità dell'ipotesi.

4. (12 Punti) **Quesito.** Uno studente può raggiungere quotidianamente l'università con tre modalità di trasporto: automobile, moto o treno di pendolari. A causa del traffico intenso, se decide di andare in auto, c'è una probabilità del 50% che arrivi in ritardo. Se va in moto, la probabilità di essere in ritardo è solo del 10%. Il treno per pendolari non è quasi mai in ritardo e la sua probabilità di ritardo è dell'1%.

   Un giorno lo studente arriva in ritardo e si vogliono stimare le probabilità che sia venuto con l'automobile, con la moto oppure con il treno. E' noto che lo studente nel 15% delle volte usa l'auto, nell'80% usa la moto e nel 5% usa il treno.

   Quali sono le propbablità che lo studente, essendo arrivato in ritardo, abbia utilizzato i tre mezzzi di trasporto?

   Soluzione. Indicando con $P(\mathrm{A}), P(\mathrm{M}), P(\mathrm{T})$ le probabilità che lo studente utilizzi come mezzo di trasporto, rispettivamente, l'Automobile, la Motocicletta e il Treno, si può scrivere:

$$P(A) = 0.15, \quad P(M) = 0.8, \quad P(T) = 0.05$$

   le probabilità di arrivare in ritardo condizionate dall'uso del mezzo sono:

$$P(R|A) = 0.50, \quad P(R|M) = 0.10, \quad P(R|T) = 0.01$$

   La probabilità dell'utilizzo dei tre mezzi di trasporto, condizionata dall'evento "arrivo in ritardo", si ottiene tramite la formula di Bayes:

$$P(X|R) = \frac{P(R|X)P(X)}{P(R)}$$

   dove con X si indica uno dei te mezzi: A, M o T. La probabilità totale di arrivare in ritardo $P(R)$ è:

$$P(R) = P(R|A)P(A)+P(R|M)P(M)+P(R|T)P(T) = 0.50\times0.15+0.10\times0.8+0.01\times0.05 = 0.155$$

   Le probabilità di aver utilizzato ciascuno dei tre mezzi, condizionate dall'arrivo in ritardo, sono:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{0.50 \times 0.15}{0.155} = 0.48$$

$$P(M|R) = \frac{P(R|M)P(M)}{P(R)} = \frac{0.10 \times 0.80}{0.155} = 0.51$$

$$P(T|R) = \frac{P(R|T)P(T)}{P(R)} = \frac{0.01 \times 0.05}{0.155} = 3.2 \times 10^{-3}$$

5. (6 Punti) **Quesito.** Con l'uso del teorema di Steiner trovare la relazione tra le distanze l e λ dall'asse di oscillazione dal centro di massa di un pendolo fisico che danno lo stesso periodo di oscillazione. Si assumano come noti massa e momento di inerzia rispetto al centro di massa del pendolo.

Soluzione. Il periodo delle piccole oscillazioni in un pendolo fisico è dato da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgx}}$$

Dove I_o è il momento di inerzia del corpo di massa m rispetto all'asse di oscillazione. Il teorema di Steiner è sintetizzato dalla relazione $I_o = I_G + mx^2$ dove I_G è il momento di inerzia del corpo rispetto al centro di massa, m è la massa del corpo e x e la distanza tra l'asse di oscillazione e la retta parallela passante per il centro di massa. Con l'uso del teorema di Steiner l'espressione del periodo in funzione di x si scrive:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + mx^2}{mgx}}$$

Quadrando questa espressione, si ottiene con un poco di algebra:

$$x^2 - \frac{T^2}{4\pi^2}gx + \frac{I_G}{m} = 0$$

Ricordiamo che, in un'equazione di secondo grado in forma normale, il termine noto è il prodotto delle radici dell'equazione. Se l è una soluzione di questa equazione allora l'altra soluzione λ è data da:

$$\lambda = \frac{I_G}{ml}$$

che è la relazione cercata tra le due distanze dell'asse di oscillazione dal centro di massa con lo stesso periodo.

6. (6 Punti) **Quesito.** Definire *accuratezza* e *precisione* delle misure fornite da uno strumento indicando inoltre se sono proprietà qualitative o quantitative.

   Soluzione. Per la formulazione della risposta corretta si consulti il paragrafo **2.3** delle dispense del docente.