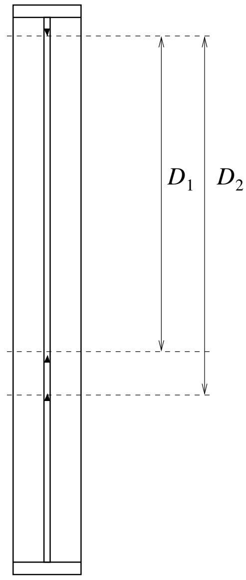
Esperimentazioni di Fisica 1

Prova d'esame del 22 gennaio 2019

SOLUZIONI

1. (12 Punti) **Quesito.** Una misura dell'accelerazione di gravità in un certo luogo è eseguita utilizzando un pendolo composto reversibile. La misura del periodo nella posizione "dritta" è ($T_o = 1.3710 \pm 0.0001$)s. Nella posizione "rovesciata" si eseguono due misurazioni del periodo con il coltello di sospensione posizionato attorno a due posizioni differenti dell'asse di oscillazione. I risultati sono riportati in tabella:

distanza	Periodo
$D_1 = (461.0 \pm 0.5)$mm	$T_1 = (1.3892 \pm 0.0001)$s
$D_2 = (475.0 \pm 0.5)$mm	$T_2 = (1.3491 \pm 0.0001)$s



D_1 e D_2 sono le distanze tra la posizione dell'asse nella posizione "dritta" con le posizioni dell'asse nella posizione rovescia (vedi la figura a lato).
Valutare il valore di g con la sua incertezza, supponendo lineare la relazione fra il periodo e distanza tra le sospensioni nell' intervallo tra D_1 e D_2. Si ricorda che per un pendolo composto vale la relazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{eq}}{g}}$$

dove l_{eq} è la lunghezza equivalente del pendolo.
L'incertezza sulla misura di g è determinata principalmente da quella sulle distanze (D_1 e D_2), quindi nel calcolo si trascuri l'incertezza sui valori dei tempi T_o, T_1 e T_2.

Soluzione. [unc020] Calcoliamo la distanza D_o alla quale corrisponde il periodo T_o tramite un'interpolazione lineare tra i punti (D_1, T_1) e (D_2, T_2):

$$D_o = D_1 + \frac{T_o - T_1}{T_2 - T_1}(D_2 - D_1) = 461.0 + \frac{-0.0182}{-0.0401} \times 14 = 467.3 \text{ mm}$$

Calcolo dei coefficienti di sensibilità:

$$\frac{\partial D_o}{\partial D_1} = \frac{T_o - T_2}{T_1 - T_2} = 0.555; \qquad \frac{\partial D_o}{\partial D_2} = \frac{T_o - T_1}{T_2 - T_1} = 0.445$$

Calcolo dell'incertezza su D_o:

$$u_{D_o} = \sqrt{\left(\frac{\partial D_o}{\partial D_1}u_{D_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial D_o}{\partial D_2}u_{D_2}\right)^2} = \sqrt{(0.555 \times 0.5)^2 + (0.445 \times 0.5)^2} = 0.36 \text{ mm}$$

Tenendo conto che la distanza tra due punti di sospensione del pendolo con lo stesso periodo di oscillazione coincide con la lunghezza equivalente del pendolo composto, si ha:

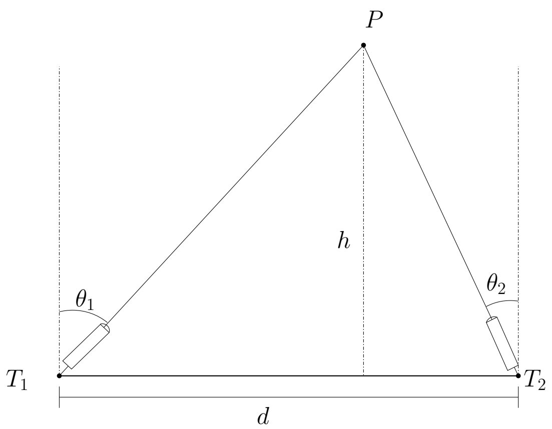
$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}D_o = 9811 \, \text{mm s}^{-2}$$

L'incertezza su g si ottiene con la propagazione delle incertezze per formule monomie:

$$u_g = g\sqrt{\left(2\frac{u_{T_o}}{T_o}\right)^2 + \left(\frac{u_{D_o}}{D_o}\right)^2} = 8 \text{ mm s}^{-2}$$

2. (12 Punti) **Quesito.** La misurazione della distanza h (vedi figura) è eseguita con il metodo della triangolazione su una base $d = 30\,\mathrm{m}$. La misurazione degli angoli θ_1 e θ_2 indicati in figura, è eseguita con un singolo cannocchiale collegato a un goniometro che viene spostato nelle postazioni T_1 e T_2. Le misure dei due angoli sono:

$$\theta_1 = (5.3 \pm 0.2)\,\mathrm{mrad} \qquad \theta_2 = (4.5 \pm 0.2)\,\mathrm{mrad}$$



Le incertezze sui due angli sono dovute alla lettura dell'indice del goniometro. Inoltre il manuale d'uso del telescopio informa che l'incertezza della misura angolare, dovuta alla taratura dello zero della scala, è 0.1 mrad.
E' facile mostrare che h, in termini di d, θ_1 e θ_2, è data da

$$h = \frac{d}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2} \simeq \frac{d}{\theta_1 + \theta_2}$$

Dove l'ultima espressione è valida quando gli angoli θ sono piccoli come nel caso in esame. Valutare la grandezza h con la sua incertezza

Soluzione. [unc043] L'incertezza sulle misure θ_1 e θ_2 è data da due contributi indipendenti

1) l'incertezza u' su ogni lettura pari a $0.2\,\mathrm{mrad}$ e

2) l'incertezza u'' di taratura valutata a $0.1\,\mathrm{mrad}$

in conclusione avremo:

$$u_{\theta_1} = u_{\theta_2} = \sqrt{u'^2_{\theta_1} + u''^2_{\theta_1}} = 0.22\,\mathrm{mrad}$$

La misura della grandezza h si ottiene dalla relazione:

$$h = \frac{d}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{30}{(5.3 + 4.5)10^{-3}} = 3061.22\ \mathrm{m}$$

Per valutare l'incertezza su h calcoliamo i coefficienti di sensibilità:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \frac{\partial h}{\partial \theta_2} = \frac{d}{(\theta_1 + \theta_2)^2} = 312369.8,\ \mathrm{m}$$

Le incertezze di lettura u'_{θ_1} e u'_{θ_2} sono indipendenti mentre le incertezze u''_{θ_1} e u''_{θ_2} dovute alla taratura dello strumento sono correlate con coefficiente di correlazione $\simeq 1$. Per cui l'incertezza su h è

$$u_h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial \theta_1}\right)^2 u^2_{\theta_1} + \left(\frac{\partial h}{\partial \theta_2}\right)^2 u^2_{\theta_2} + 2\rho \frac{\partial h}{\partial \theta_1}\frac{\partial h}{\partial \theta_2} u''_{\theta_1} u''_{\theta_2}} =$$

$$= \frac{d}{(\theta_1 + \theta_2)^2}\sqrt{u^2_{\theta_1} + u^2_{\theta_2} + 2u''_{\theta_1} u''_{\theta_2}} = 108\,\mathrm{m}$$

La grandezza h è quindi:

$$h = (3061 \pm 110)\,\mathrm{m}$$

3. (12 Punti) **Quesito** In un contenitore ci sono due monete che indichiamo con A e B. La moneta A è ben equilibrata con probabilità di testa 1/2, la moneta B è truccata e la probabilità di testa è 0.6. Si sceglie una moneta a caso e la si lancia fino a che non esce testa. Nell'esperimento eseguito si ottiene testa nel quinto lancio. Determinare la probabilità che la moneta scelta inizialmente fosse la B.

Soluzione. [tby021] Indichiamo con B l'evento ' *si sceglie la moneta B*' (quella truccata) e con $4CT$ l'evento '*in 5 lanci escono 4 croci e una testa* '

Si ha $P(B) = P(\bar{B}) = 1/2$. Inoltre sono di facile calcolo le probabilità condizionate:

$$P(4CT|B) = 0.4^4 \cdot 0.5 = 0.0154$$
$$P(4CT|\bar{B}) = 0.5^5 = 0.0313$$

la probabilità dell'evento 4CT è quindi:

$$P(4CT) = P(4CT|B)P(B) + P(4CT|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.0233$$

Usando il teorema di Bayes si ottiene la probabilità di avere scelto inizialmente la moneta B :

$$P(B|4CT) = \frac{P(4CT|B)P(B)}{P(4CT)} = \frac{0.0154 \cdot 0.5}{0.0233} = 0.329$$

4. (12 Punti) **Quesito.** Un modello prevede che la grandezza y dipenda dalla grandezza x secondo la relazione $y = k \log_{10} x/x_o$ dove x_o è l'unità di misura di x.

x_i	y_i
10	4
33	7
100	16
316	13
1000	21

La grandezza y è un conteggio che segue la statistica di Poisson, la grandezza x ha un'incertezza trascurabile.
Nella tabella a lato è riportato il risultato delle misurazioni eseguite sulle due grandezze.
Si utilizzi il metodo di minimi quadrati per stimare il valore del parametro k. Si calcoli inoltre il χ^2 del fit ottenuto.

Soluzione. [chi2018] Per applicare il metodo del χ^2 si deve trovare il minimo della somma in quadratura dei residui:

$$R^2 = \sum \frac{(y_i - k \log x_i/x_o)^2}{u^2(y_i)} = \sum \frac{(y_i - k \log x_i/x_o)^2}{y_i}$$

dove nell'ultimo passaggio si tiene conto che le y_i sono dei conteggi. Annullando la derivata in k si ha:

$$\frac{dR^2}{dk} = -2 \sum \frac{(y_i - k \log x_i/x_o) \log x_i/x_o}{y_i} = -2 \sum \left(\log x_i/x_o - k \frac{\log^2 x_i/x_o}{y_i} \right) = 0$$

da cui

$$\hat{k} = \frac{\sum \log x_i/x_o}{\sum \frac{\log^2 x_i/x_o}{y_i}} = \frac{1.00 + 1.52 + 2.00 + 2.50 + 3.00}{1/4 + 1.52^2/7 + 2.00^2/16 + 2.50^2/13 + 3.00^2/21} = \frac{10.02}{1.74} = 5.76$$

Calcolo del χ^2. Per calcolare correttamente il valore del χ^2 non si deve utilizzare il punto $x_1 = 10$ poiché $y_1 = 4$ è un valore troppo piccolo per approssimare le sue fluttuazioni con una gaussiana. Quindi

$$\chi^2 = \sum_{i=2}^{5} \frac{(y_i - \hat{k} \log x_i/x_o)^2}{y_i} = 2.5$$

5. (6 Punti) **Quesito.** Le oscillazioni di un pendolo sono isocrone solo per piccole oscillazioni. In realtà il periodo di un pendolo dipende dall'ampiezza dell'oscillazione secondo una formula che sviluppata in serie e troncata al secondo ordine è:

$$T(\theta_o) = T_o \left[1 + \frac{\theta_o^2}{16} + \mathcal{O}(\theta_o^4) \right] \tag{1}$$

dove T_o e $T(\theta_o)$ sono rispettivamente il periodo per piccole oscillazioni e per oscillazioni di ampiezza θ_o. Dimostrare che dalla misurazione del periodo $T(\theta_o)$ e della velocità angolare massima del pendolo nell'oscillazione è possibile, utilizzando la (1), ottenere il periodo per piccole oscillazioni T_o.

Soluzione. [phy007] Si dimostra facilmente che la velocità massima in un moto armonico di ampiezza θ_o e periodo T è

$$\dot{\theta}_{max} = \frac{2\pi\theta_o}{T}$$

da cui

$$\theta_o = \frac{\dot{\theta}_{max} T}{2\pi}$$

Sostituendo questa espressione nella (1) si ottiene il periodo delle oscillazioni isocrone (piccole oscillazioni):

$$T_o = \frac{T(\theta_o)}{1 + \left(\frac{\dot{\theta}_{max} T(\theta_o)}{8\pi} \right)^2} \tag{2}$$

Quindi misurando la velocità massima dell'oscillazione e il periodo della stessa oscillazione è possibile ottenere tramite la (2) il periodo delle piccole oscillazioni.

6. (6 Punti) **Quesito.** Dimostrare la formula della media pesata utilizzando il metodo della massima verosimiglianza. Allo scopo, si considerino due misure indipendenti $x_1 \pm u_1, x_2 \pm u_2$ di una grandezza e si supponga inoltre che le due misure siano distribuite in modo normale con deviazioni standard u_1 e u_2.

   Soluzione. [lkl001] Se x_o indica il valore "vero" della grandezza, che rappresenta il parametro da stimare, le pdf delle variabili aleatorie x_1 e x_2 sono:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}u_1}\mathrm{e}^{-(x_1-x_o)^2/2u_1^2}; \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_2}\mathrm{e}^{-(x_2-x_o)^2/2u_2^2}$$

   La funzione di verosimiglianza $\mathcal{L}$ è

$$\mathcal{L}(x_o) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{u_1 u_2}\mathrm{e}^{-(x_1-x_o)^2/2u_1^2}\mathrm{e}^{-(x_2-x_o)^2/2u_2^2}$$

   Prendendo il logaritmo, e successivamente uguagliano a zero la derivata rispetto a x_o per trovare il massimo otteniamo

$$\frac{d}{dx_o}\ln\mathcal{L}(x_o) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{u_1 u_2}\frac{d}{dx_o}\left(\frac{(x_1-x_o)^2}{2u_1^2} + \frac{(x_2-x_o)^2}{2u_2^2}\right) = 0$$

   da cui, ponendo $w_i = 1/u_i^2$, $(i = 1, 2)$

$$w_1(x_1 - x_o) + w_2(x_2 - x_o) = 0, \quad \text{che risolvendo per } x_o \text{, porta a} \quad x_o = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w1 + w2}$$

   che è proprio la formula della media pesata CVD.