Esperimentazioni di Fisica 1

Prova d'esame del 10 luglio 2018

SOLUZIONI

1. (12 Punti) **Quesito**. Un termometro a bulbo è spostato da un bagno termico di acqua distillata e ghiaccio ad un altro bagno termico di acqua in ebollizione il tutto alla pressione 101.3 kPa (= 1 atm). La misura della temperatura in funzione del tempo a partire dall'istante dell'immersione nel bagno "caldo" dà i dati riportati nella seguente tabella:

t_k (s)	$T(t_k)$ $(°C)$
0	0
10	49 ± 1
20	75 ± 1
30	87 ± 1
40	93 ± 1
50	95 ± 1
60	97 ± 1

Il modello matematico che descrive la variazione nel tempo della temperatura del termometro è:

$$T(t) = T_f - (T_f - T_i)\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad (t > 0)) \qquad (1)$$

dove τ è il *tempo caratteristico del termometro*, $T_i = 0\,°\mathrm{C}$ e $T_f = 100\,°\mathrm{C}$ (le temperature $T_i = 0\,°\mathrm{C}$ e $T_f = 100\,°\mathrm{C}$ possono essere considerate prive di incertezza). Elaborare le misure in modo da ottenere una grandezza che vari in modo esponenziale nel tempo e che riportata nell'opportuna carta millimetrata appaia come una retta.
1) Riportare i valori ed incertezze della grandezza ottenuta nel grafico.
2) Adattare una retta tracciata con un righello ai punti sperimentali. Dalla retta tracciata ricavare graficamente il parametro τ.

Soluzione. [plt010]. Una grandezza che varia in modo esponenziale si ottiene dalla (1) isolando l'esponenziale:

$$y(t) = \frac{T_f - T(t)}{T_f - T_i} = e^{-t/\tau} \qquad (2)$$

Sostituendo a $T(t_k)$ i valori misurati in tabella si ottiene la seguente tabella:

$\Delta t_k(s)$	$y(t_k)$	$u(y)$
0	1	
10	0.51	0.01
20	0.25	0.01
30	0.13	0.01
40	0.07	0.01
50	0.05	0.01
60	0.03	0.01

Le incertezze di y si ottengono propagando quelle su $T(t_k)$:

$$u_y = -\frac{1}{T_f - T_i} u_T$$

Per ottenere un andamento previsto rettilineo si deve utilizzare un grafico di tipo semi-logaritmico con almeno due decadi nell'asse delle ordinate. Nel grafico sono stati riportati i punti sperimentali con le loro incertezze e un segmento di retta che approssima i dati.

Per trovare la pendenza della retta disegnata consideriamo due punti sulla retta A=$(0\,s, y = 1)$ e B=$(68.0\,s, 0.01)$. In ordinate la retta prende esattamente due decadi e quindi

$$\ln 1 - \ln 0.01 = 4.605 = \ln \mathrm{e}^{-0/\tau} - \ln \mathrm{e}^{-68.0/\tau} = \frac{68.0}{\tau}$$

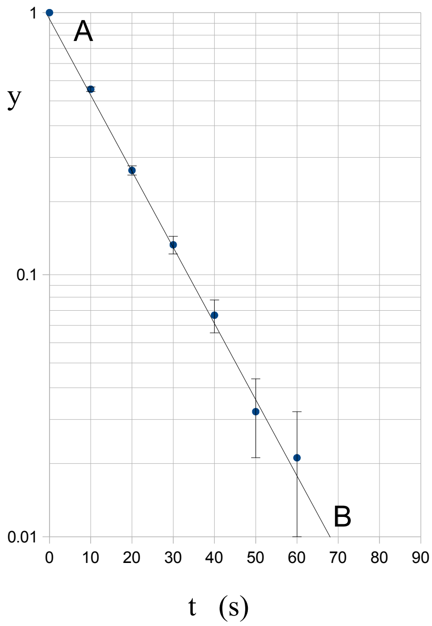
da cui infine:

$$\tau = \frac{68.0}{4.605} = 14.8\,s$$

Un'altra grandezza che varia in modo esponenziale si ottiene considerando la variabile $T(t) - T_f$. Dalla (1) si ottiene infatti:

$$T(t) - T_f = (T_f - T_i)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Riportando su un grafico semilogaritmico i punti: $(T(t) - T_f)$ nell'asse delle ordinate – logaritmico vs t nell'asse delle ascissse – lineare, si sarebbe ottenuto ugualmente un andamento lineare con lo stesso valore del parametro τ .



---

2. (12 Punti) **Quesito.** Una teoria prevede che in un certo tipo di reazione nucleare si possa verificare un evento raro E con probabilità p_E piccola ma non specificata. Si esegue un esperimento in cui sono registrate $N = 10^6$ reazioni senza che l'evento E sia rilevato.

   Qual è il limite superiore di p_E assumendo un livello di confidenza del 90%?

   Si assuma una probabilità poissoniana per il numero di eventi di tipo E, e si consideri che il livello di confidenza del 90% coincide con il 10% di ottenere 0 eventi di tipo E

   Soluzione. [poi003] Sia $p_E > 0$ la probabilità dell'evento E. Il verificarsi o meno di E in ogni razione è un evento di Bernoulli, ma sia per l'elevato numero di prove ($N = 10^6$) sia per la bassa probabilità di successo (infatti nessun evento si è verificato nell'esperimento) si può assumere che il numero degli eventi segua la distribuzione di Poisson con valore medio $\mu = Np_E$. La probabilità di avere k eventi di tipo E nell'esperimento sarà quindi:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}$$

   Per ottenere livello di confidenza del 90%, non avendo osservato eventi, si deve assumere che la probabilità di zero eventi di tipo E nell'esperimento sia del 10%, quindi

$$P(0) = \mathrm{e}^{-\mu} = 0.10 \qquad \text{da cui } \mu = -\ln 0.10 = 2.3$$

   Tenendo conto che $\mu = Np_E$, e non avendo osservato eventi di tipo E, si ha infine:

$$p_E < \frac{\mu}{N} = 2.3 \cdot 10^{-6}$$

3. (12 Punti) **Quesito.** Un costruttore di strumenti di misura elettrici tara il voltmetro che ha costruito con un voltmetro di riferimento che misura le tensioni con un'accuratezza molto maggiore di quella che ha previsto per il suo strumento. Si eseguono varie misure di tensione con entrambi gli strumenti, x_i (con incertezza trascurabile) con lo strumento di riferimento, e $y_i \pm u_i$ ($u_i = 0.01\,\mathrm{V}$ incertezza standard di lettura) con lo strumento costruito.

Si esegue un *fit* lineare con il metodo dei minimi quadrati per trovare la migliore retta che approssima le misure x_i e $y_i \pm u_i$. La retta ottenuta è:

$$y = \hat{a} + \hat{b}x = 0.0104 + 1.0317x \tag{3}$$

con x e y misurati in Volt. Dai dati si calcola inoltre la matrice di covarianza della stima dei parametri $\hat{a}$ e $\hat{b}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{a}] & \mathbb{C}\mathrm{ov}[\hat{a},\hat{b}] \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}[\hat{b},\hat{a}] & \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{b}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.167\cdot 10^{-3} & -1.667\cdot 10^{-4} \\ -1.667\cdot 10^{-4} & 3.030\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Eseguita una misurazione con il voltmetro costruito la lettura sia 1.00 V. Calcolare valore e incertezza da assegnare alla misura supponendo trascurabile, per semplicità, quella di lettura.

*Suggerimento: il "valore vero" della tensione si ottiene invertendo la (**??**) ...*

Soluzione. [unc041] Sia $y_o = (1.00 \pm 0.01)\,\mathrm{V}$ il valore della misura eseguita con il voltmetro costruito con $u = 0.01\,\mathrm{V}$ incertezza standard di lettura. Dalla curva di taratura (3) si ricava che il valore più accurato x_o della grandezza misurata si ottiene invertendo la relazione (3):

$$x_o = \frac{y_o}{\hat{b}} - \frac{\hat{a}}{\hat{b}} = \frac{1.00}{1.0317} - \frac{0.0104}{1.0317} = 0.959\mathrm{V}$$

L'incertezza su x_o è data da quella di lettura[1] ($u = 0.01\,\mathrm{V}$) sommata in quadratura con quelle, correlate tra loro, sui parametri $\hat{a}$ e $\hat{b}$. I coefficienti di sensibilità sono:

$$\frac{\partial x_o}{\partial y_o} = \frac{1}{\hat{b}} = 0.959, \qquad \frac{\partial x_o}{\partial \hat{a}} = -\frac{1}{\hat{b}} = -0.959, \qquad \frac{\partial x_o}{\partial \hat{b}} = \frac{\hat{a} - y_o}{\hat{b}^2} = -0.930\mathrm{V}$$

Tenendo conto della matrice di covarianza otteniamo infine l'incertezza sul valore della tensione:

$$\begin{aligned} u_x^2 = &\left(-\frac{1}{b}\right)^2 u^2 + \left(-\frac{1}{b}\right)^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{a}] + \left(\frac{y-a}{b^2}\right)^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{b}] - 2\frac{1}{b}\frac{y-a}{b^2}\,\mathbb{C}\mathrm{ov}[\hat{a},\hat{b}] = \\ =&0.959^2\cdot 0.01^2 + (-0.959)^2\cdot 1.167\cdot 10^{-3} + (-0.930)^2\cdot 3.030\cdot 10^{-5} + 2(-0.959)\cdot(-0.930)\cdot(-1.667\cdot 10^{-4}) = \\ =&\,0.000894\mathrm{V}^2 \end{aligned}$$

Il risultato finale è quindi:

$$(0.959 \pm 0.030)\mathrm{V}$$

Il valore dell'incertezza sulla misura senza tenere conto di quella di lettura, si ottiene dalla formula di u_x^2 trascurando il primo termine; numericamente:

$$u_x = 0.028\,\mathrm{V}$$

[1] Il testo del problema diceva di trascurarla

4. (12 Punti) **Quesito.** Una società di distribuzione di energia elettrica serve due gruppi di utenti: domestici (D) e industriali (I). Il numero degli utenti domestici è il 75% del totale. Sulla base di dati storici la potenza massima giornaliera richiesta in entrambi i gruppi è distribuita in modo esponenziale negativo con valori medi 5 MW e 10 MW rispettivamente per utenti domestici e industriali. Scelto un consumo a caso qual è la probabilità che sia maggiore di 15MW? Se si seleziona un consumo maggiore di 15MW qual è la probabilità che sia dovuto all'utenza domestica?

   Soluzione. [tby026] Indicando con W la richiesta di potenza giornaliera massima, la probabilità che sia maggiore di 15 MW, condizionata dal tipo di utenza è:

   Per utenti domestici $\quad P(W > 15|D) = \mathrm{e}^{-15/5} = 0.0498$

   Per utenti industriali $\quad P(W > 15|I) = \mathrm{e}^{-15/10} = 0.223$

   Infatti se una grandezza X è distribuita secondo un esponenziale negativo di valore medio μ, $f(X) = \mathrm{e}^{-X/\mu}/\mu$, la probabilità che X sia maggiore di X_o è:

$$P(X > X_o) = \int_{X_o}^{+\infty} f(X)dX = \int_{X_o}^{+\infty} \frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-X/\mu}dX = \mathrm{e}^{-X_o/\mu}$$

   La probabilità non condizionata di una richiesta di potenza maggiore di 15 MW, per il teorema della probabilità totale, è:

$$\begin{aligned} P(W > 15) =& P(W > 15|D)P(D) + P(W > 15|I)P(I) = \mathrm{e}^{-15/5} \cdot \frac{3}{4} + \mathrm{e}^{-15/10} \cdot \frac{1}{4} = \\ =& 0.0498 \cdot 0.75 + 0.223 \cdot 0.25 = 0.0931 \end{aligned}$$

   Per ottenere la probabilità che, verificatosi un consumo maggiore di 15MW, questo sia dovuto all'utenza domestica, si applica il teorema di Bayes:

$$P(D|W > 15) = \frac{P(W > 15|D)P(D)}{P(W > 15)} = 0.4010$$

---

5. (6 Punti) **Quesito.** Si consideri un pendolo composto reversibile di massa m e momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa I_G, determinare la relazione tra le distanze, l e λ, dell'asse di oscillazione[†] dal centro di massa che danno lo stesso periodo. Dimostrare inoltre che $\lambda + l$ è la lunghezza equivalente del pendolo composto.

   [†]Gli assi di oscillazione sono paralleli a quello attorno al quale si calcola I_G.

   Soluzione. [phy006] Si veda la nota on line "Il Pendolo e La Misura di g" paragrafo 2.

---

6. (6 Punti) **Quesito.** Per valutare l'accuratezza di una certa bilancia di precisione, si pesa un campione standard della massa di 1 grammo (il peso campione ha un'incertezza che può essere ritenuta trascurabile in questo contesto) ripetendo la pesata per 4 volte. Le misure risultanti espresse in grammi, sono: 0.95g, 1.02g, 1.01g, 0.98g.

   Supponendo che le pesate eseguite siano distribuite in modo normale con media μ si calcoli l'intervallo di confidenza del 95% per la media aritmetica μ.

   Soluzione Le misure date sono un campione di dimensione $n = 4$ di una grandezza distribuita in modo normale. Le stime del valore medio e della deviazione standard (della media) sono:

$$\begin{aligned} \mu =& \frac{0.95 + 1.02 + 1.01 + 0.98}{4} = 0.99\,\mathrm{g} \\ s =& \sqrt{\frac{(0.95-0.99)^2 + (1.02-0.99)^2 + (1.01-0.99)^2 + (0.98-0.99)^2}{4 \cdot 3}} = 0.0158\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

Considerata la dimensione del campione (4) e l'informazione che le grandezze sono distribuite in modo normale, per calcolare l'intervallo di confidenza si deve utilizzare la t di Student con $\nu = 3$ gradi di libertà. Dalle tabelle si ricava il valore di $t_{0.025} = 3.182$ per $\nu = 3$. L'intervallo cercato è quindi:

$$= 0.99 \pm 3.182 \cdot 0.0158 = (0.940 \div 1.040)\text{g}.$$