Esperimentazioni di Fisica 1

Prova d'esame del 22 giugno 2018

SOLUZIONI

1. (12 Punti) **Quesito.** In un esperimento si misura la pressione di un certo numero di moli di un gas in funzione del volume occupato dal gas. Il gas è contenuto in un recipiente che può essere considerato adiabatico e il modello matematico che lega le grandezze misurate è:

$$p = \text{cost.} \cdot V^{-\gamma} \tag{1}$$

Nella tabella sono riportati le misure di alcuni valori del volume del gas, misurato con incertezza trascurabile, e la corrispondente pressione con relativa incertezza la cui distribuzione è normale.

V (lit.)	P (bar)	$u(P)$ (bar)
0.11	20.0	1.0
0.40	3.70	0.30
1.00	0.96	0.010
2.00	0.36	0.030
4.00	0.12	0.020
9.00	0.050	0.007

Rappresentare graficamente i dati con le loro incertezze su di un foglio di carta millimetrata, scelto tra quelli a disposizione, in modo che la relazione (1) sia rappresentata da una retta. Disegnare quindi sul grafico la retta che approssima nel modo migliore i punti sperimentali riportati nel grafico.

Dalla retta disegnata:

1. stimare graficamente il valore del parametro γ e della costante.
2. utilizzare il test del χ^2 per calcolare la qualità del fit ottenuto graficamente specificando quali sono le ipotesi necessarie per potere applicare il test.

Soluzione. [plt009] Per rendere lineare una legge di potenza del tipo della (1) si deve utilizzare un grafico doppio-log che per gli intervalli di valori mostrati in tabella deve avere almeno due decadi nell'asse dell ascisse e 4 decadi nell'asse delle ordinate. La figura mostra i punti della tabella riportati nel grafico e la retta tracciata è un'approssimazione eseguita a mano della (1). La carta millimetrata scelta ha lunghezze differenti delle decadi nei due assi in particolare 7.3 cm nell'asse delle ascisse e 5.7 cm in quello delle ordinate. Dalle misure riportate sul grafico si ricava la valutazione del parametro γ che rappresenta il coefficiente angolare, cambiato di segno, della retta:

$$\gamma = \frac{15.7/5.7\,\text{decadi}}{2\,\text{decadi}} = 1.38$$

la costante si può stimare dal valore della pressione $p = 0.97\,\text{bar}$ in corrispondenza del valore del volume pari all'unità ($V = 1\,\text{lit}$). In conclusione il *fit* ha l'espressione:

$$p = 0.97V^{-1.38}$$

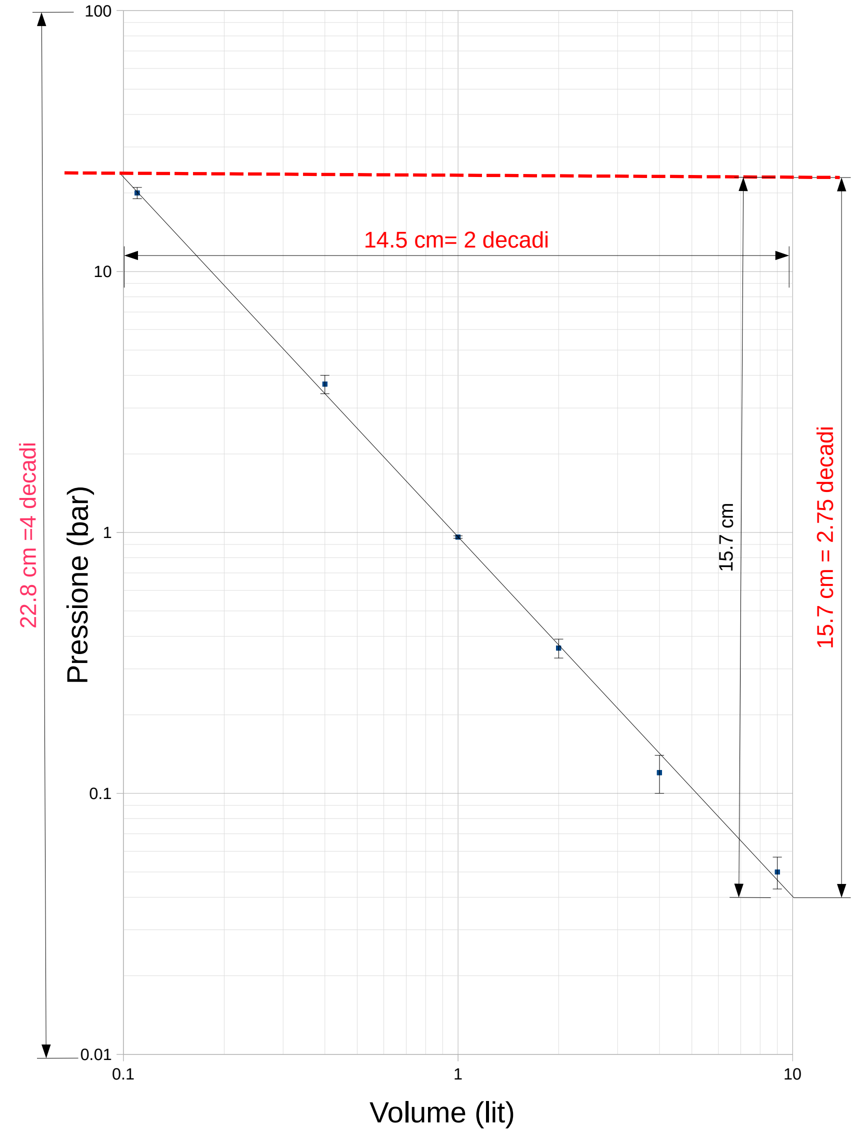
Calcolo del χ^2 :

V (lit.)	P (bar)	$u(P)$ (bar)	$0.97V^{-1.38}$	R_i^2
0.11	20.0	1.0	20.4	0.161
0.40	3.70	0.30	3.43	0.780
1.00	0.96	0.010	0.970	1.000
2.00	0.36	0.030	0.373	0.179
4.00	0.12	0.020	0.143	1.345
9.00	0.050	0.007	0.0468	0.214
				3.68

Si ottiene $\chi^2 = 3.68$ e il numero dei gradi di libertà in questo caso è $\nu = 6 - 2 = 4$. Il χ^2 ridotto è $3.68/4 = 0.92$ e dalle tabelle si ricava

$$P(\tilde{\chi}^2 > 0.92) = 45\%$$

valore che conferma la validità del *fit* ottenuto.


100
10
1
0.1
0.01
0.1
1
10
Pressione (bar)
Volume (lit)
14.5 cm= 2 decadi
22.8 cm =4 decadi
15.7 cm
15.7 cm = 2.75 decadi

2. (12 Punti) **Quesito.** Una bilancia digitale con un *display* a 3 cifre significative ha una risoluzione di $0.1g$. Nel libretto di istruzioni è riportato inoltre che l'incertezza della misura dovuta alla taratura è il 3% del valore letto con un livello di confidenza del 99%. Il costruttore dichiara inoltre che le incertezze delle bilance costruite hanno una distribuzione gaussiana. Pesando la massa m_1 si ottiene il risultato $m_1 = 22.4\,g$, pesando la massa m_2 si ottiene il risultato $m_2 = 22.1\,g$. Le misurazioni ripetute danno sempre lo stesso valore. Stimare:

   - l'incertezza su ciascuna delle due misurazioni indicandone il tipo,
   - l'incertezza sulla grandezza $R = (m_2 - m_1)/m_2$

Soluzione. [unc042] L'incertezza standard sulle misurazioni di m_1 e di m_2 ha due contributi, entrambi di tipo B, quello da associare alla risoluzione dello strumento il cui valore è $u' = 0.1/\sqrt{12}\,g = 0.029\,g$ (identico per le due misurazioni) e quello da associare alla taratura della bilancia che, con le indicazioni del costruttore, risulta essere $u'' = \alpha m = 0.03m/3 = 0.01m$, dove m è la misura letta sul *display* e la divisione per 3 è dovuta al livello di confidenza del 99% e alla distribuzione normale delle incertezze di taratura.

Le due incertezze u' e u'' sono indipendenti e quindi si sommano in quadratura. Quindi le due incertezze su m_1 e m_2 sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} u_1 =& \sqrt{u'^2 + u_1''^2} = \sqrt{(0.029)^2 + (0.01m_1)^2} = 0.22g \\ u_2 =& \sqrt{u'^2 + u_2''^2} = \sqrt{(0.029)^2 + (0.01m_2)^2} = 0.22g \end{aligned}$$

L'incertezza sulla grandezza $R = (m_2 - m_1)/m_2$ si ottiene dalla formula della propagazione delle incertezze, notando che i contributi u'', dovuti alla taratura dello strumento sono correlati tra loro con $\rho = 1$ ($m_1 \simeq m_2$). Le incertezze dovute alla risoluzione, al contrario delle precedenti, non sono correlate. Indicando con u l'incertezza su R, si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} u =& \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial m_1}\right)^2 (u'^2 + u_1''^2) + \left(\frac{\partial R}{\partial m_2}\right)^2 (u'^2 + u_2''^2) + 2\rho \frac{\partial R}{\partial m_1}\frac{\partial R}{\partial m_2} u_1'' u_2''} = \\ =& \sqrt{\left[\left(\frac{\partial R}{\partial m_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial m_2}\right)^2\right] u'^2 + \alpha^2 \left[\left(\frac{\partial R}{\partial m_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial m_2}\right)^2 m_2^2 + 2\rho \frac{\partial R}{\partial m_1}\frac{\partial R}{\partial m_2} m_1 m_2\right]} = \end{aligned}$$

Sostituendo i coefficienti di sensibilità che sono:

$$\frac{\partial R}{\partial m_1} = -\frac{1}{m_2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial m_2} = +\frac{m_1}{m_2^2}$$

si ha

$$u = \sqrt{\left[\frac{1}{m_2^2} + \frac{m_1^2}{m_2^4}\right] u'^2 + \alpha^2 \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 2\left(\rho\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{m_2^2 + m_1^2}{m_2^4} u'^2 + 2\alpha^2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (1-\rho)}$$

e poiché $\rho \simeq 1$ si ha infine:

$$u = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{m_2^2} u' = \frac{\sqrt{22.4^2 + 22.1^2}}{22.1^2} 0.029 = 0.019$$

In conclusione

$$R = -0.014 \pm 0.019$$

3. (12 Punti) **Quesito** In una città operano solo due compagnie di taxi la Verde e la Blu. Di notte un pedone viene travolto da un'automobile pirata e un testimone indica che l'auto era sicuramente un taxi che riteneva essere della compagnia Blu. Il testimone sottoposto ad un test di affidabilità mostra che nelle stesse condizioni di illuminazione e distanza riconosce correttamente nell'80% dei casi il colore del taxi e nel 20% dei casi lo sbaglia. Sapendo che nella città 85% dei taxi sono della Verde e il 15% della Blu, calcolare la probabilità che l'auto coinvolta nell'incidente sia Blu.

Soluzione. [tby020]

Definiamo gli eventi:

- B: "*il taxi coinvolto è della compagnia Blu*"
- T: "*Testimonianza che il taxi coinvolto è della compagnia Blu*"

La probabilità a priori che il taxi coinvolto nell'incidente sia della compagnia Blu è $P(B) = 0.15$ mentre quella della compagnia Verde è $P(\bar{B}) = 0.75$ (considerato che nella città ci sono solo due compagnie di taxi l'evento $\bar{B}$ equivale all'evento "*il taxi coinvolto è della compagnia Verde*"). Si vuole calcolare la probabilità che l'automobile della compagnia Blu sia la responsabile dell'investimento data la testimonianza, ovvero $P(B|T)$.

Applicando il teorema di Bayes si ottiene la relazione:

$$P(B|T) = \frac{P(T|B)P(B)}{P(T)}$$

Tenendo conto dei dati dell'affidabilità del testimone: $P(T|B) = 0.80$ e $P(T|\bar{B}) = 0.20$, la probabilità dell'evento T è:

$$P(T) = P(T|B)P(B) + P(T|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.80 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.85 = 0.29$$

Infine:

$$P(B|T) = \frac{0.80 \cdot 0.15}{0.80 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.85} = 0.414$$

4. (12 Punti) **Quesito.** Stabilire, utilizzando il χ^2, se la seguente distribuzione discreta di numeri:

valore	frequenza
0	19
1	15
2	10
3	5
4	1
5	0

segue la distribuzione di Poisson di valore medio $\mu = 1$

Soluzione. [chi2017] L'espressione matematica della distribuzione attesa è data da:

$$P_\mu = N\frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu} = N\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

dove N è il numero totale degli eventi della distribuzione ottenuta che nel caso in esame vale 50. Aggiungendo alla tabella data 1) la colonna dei valori attesi 2) la colonna della differenza tra valori attesi e i valori della frequenza e 3) la colonna che contiene il contributo al χ^2 dato da

$$\frac{\text{freq.-valore atteso})^2}{\text{valore atteso}}$$

si ottiene

valore	frequenza	valori attesi	χ^2
0	19	18.4	0.02
1	15	18.4	0.63
2	10	9.2	0.07
3	5	3.1	1.02(*)
4	1	0.9	–
5	0	0.2	–
			1.7

(*) questo contributo al χ^2 è la somma dei valori corrispondenti a $x = 3, 4, 5$. Il numero di gradi di libertà in questo caso è: 4-1=3, da cui si ricava

$$P(\chi^2 > 1.7|\nu = 3) = 64\%$$

Valore che conferma la validità dell'ipotesi.

5. (6 Punti) **Quesito.** Nella produzione di dispositivi a semiconduttore non è possibile controllare esattamente il valore della resistenza degli elementi prodotti che tuttavia è noto fluttuare in modo normale. Estratto un campione di $n = 31$ dispositivi dalla produzione, sono stati misurati i valori della resistenza di questi dispositivi, ottenendo una media campionaria $\bar{x} = 1.2\,\Omega$ ed una varianza campionaria $s^2 = 0.36\,\Omega^2$. Qual è l'intervallo di confidenza con il 95% di livello di confidenza per la media della resistenza dei semiconduttori prodotti?

Soluzione. [coin005] Poiché si conosce soltanto la stima della varianza del valore della resistenza, la distribuzione della sua media segue la distribuzione t di Student con una deviazione standard data da $s_m = \sqrt{0.36/31} = 0.108\,\Omega$ e con 30 gradi di libertà. La variabile standardizzata t in questo caso si scrive:

$$t = \frac{\bar{x} - 1.2}{s_m} = \frac{\bar{x} - 1.2}{0.108}$$

Dalle tabelle si ricava che il livello di confidenza del 95% è contenuto per 30 gradi di libertà in un intervallo di ampiezza ± 2.36 attorno allo zero. L'intervallo cercato è quindi:

$$\mu - 2.36 s_m, \mu + 2.36 s_m = (1.2 - 0.25 \div 1.2 + 0.25) = (0.95 \div 1.23)\,\Omega$$

---

6. (6 Punti) **Quesito.** Il valore di una grandezza e y_o si ottiene per interpolazione lineare dal valore di x_o tra le due coppie di punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Le incertezze sulle grandezze x_1, x_2 e x_o possono essere considerate nulle, mentre quelle su y_1 e y_2 sono uguali tra loro e valgono $u(y)$. Inoltre le grandezze y_1 e y_2 sono correlate con coefficiente di correlazione ρ. Calcolare la grandezza y_o con la sua incertezza.

   Soluzione. [upr005]
   Formula dell'interpolazione
   $$y_o = \frac{x_o - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) + y_1$$
   I coefficienti di sensibilità sono:
   $$\frac{\partial y_o}{\partial y_1} = \frac{x_2 - x_o}{x_2 - x_1}; \qquad \frac{\partial y_o}{\partial y_2} = \frac{x_o - x_1}{x_2 - x_1}$$
   L'incertezza della grandezza y_o si ottiene dalla formula di propagazione delle incertezze per variabili correlate:
   $$\begin{aligned} u(y_o) =& \sqrt{\left(\frac{\partial y_o}{\partial y_1}\right)^2 u^2(y) + \left(\frac{\partial y_o}{\partial y_2}\right)^2 u^2(y) + 2\rho \frac{\partial y_o}{\partial y_1}\frac{\partial y_o}{\partial y_2} u^2(y)} \\ =& u(y)\sqrt{\left(\frac{x_2 - x_o}{x_2 - x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_o - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + 2\rho \frac{x_2 - x_o}{x_2 - x_1}\frac{x_o - x_1}{x_2 - x_1}} \\ =& u(y)\frac{\sqrt{(x_2 - x_o)^2 + (x_2 - x_o)^2 + 2\rho(x_2 - x_o)(x_o - x_1)}}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$