Introduzione alla cosmologia

Luca Amendola, OAR

19th February 2002

Contenuti del corso

- La fisica dell'universo: (concetti chiave della relatività ristretta: la velocità della luce è costante; concetti chiave della relatività generale: il principio di equivalenza, relazione geometria-massa; le eq. di Einstein; il principio cosmologico: eq. di Friedmann; definizione di densità, di Omega, di curvatura spaziale k, di fattore di scala; i tre modelli friedmanniani; la legge di Hubble; l'età dell'universo)
- La geografia dell'universo (la distribuzione delle galassie, metodi osservativi, le mappe attuali dell'universo, gli oggetti più remoti, il fondo cosmico.)
- La storia dell'universo (il big bang, l'inflazione, la formazione degli elementi, la formazione delle galassie.)
- Per approfondimenti, vedi L. Amendola, Il cielo infinito, Sperling & Kupfer

Cenni storici

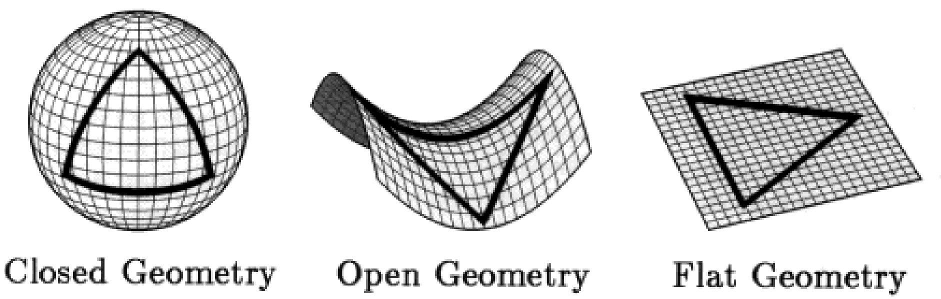
- 1541: La teoria eliocentrica di Copernico
- 1604: Le orbite ellittiche di Keplero
- 1610: Le osservazioni al telescopio di Galileo
- 1687: La teoria gravitazionale di Newton

La gravitazione universale di Newton

- $F = ma$, dove m è la massa inerziale
- $F = G\frac{Mm}{r^2}$, m è la massa gravitazionale
- Perché m è la stessa nelle due formule?
- Ovvero, perché due corpi di diversa massa lasciati liberi alla stessa distanza r da un corpo di massa M cadono con la stessa *accelerazione*?

$$\begin{aligned} ma &= G\frac{Mm}{r^2} \Longrightarrow \\ a &= G\frac{M}{r^2} \end{aligned}$$

La teoria gravitazionale di Einstein



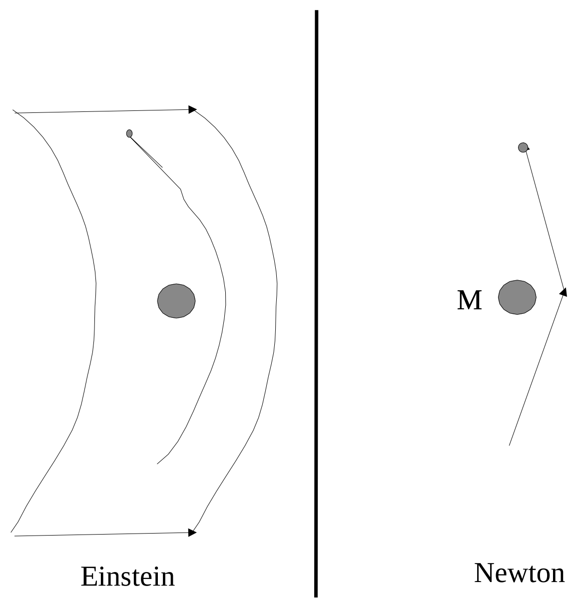
Curvatura dello spazio = Proprietà delle geodetiche

- geodetiche: curve di minima distanza (la distanza è definita in modo da includere anche l'intervallo temporale)

- La massa curva lo spazio:
- La forza di gravità è in realtà una modifica alla geometria dello spazio

Dalla forza di gravità alla geometria

L'immagine illustra il concetto alla base della Teoria della Relatività Generale. A destra abbiamo la visione di Newton: la traiettoria di un corpo nelle vicinanze di una massa è deviata dalla linea retta in virtù di un'azione a distanza della massa. A sinistra abbiamo l'interpretazione di Einstein: il corpo viaggia sempre secondo una geodetica dello spazio in cui è immerso. La presenza della massa modifica la geometria dello spazio e quindi il moto dei corpi.



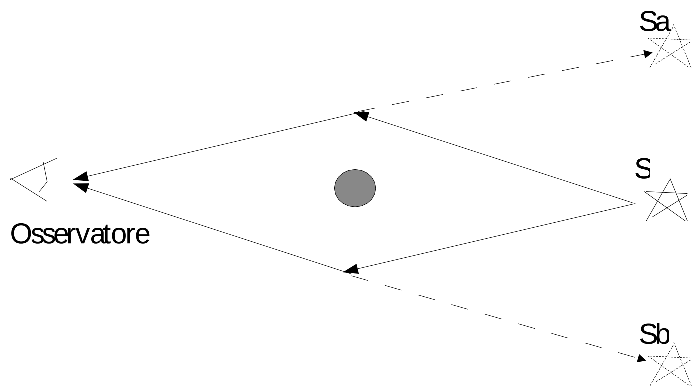
Proprietà geometriche = proprietà della massa

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Einstein, 1916

Due conseguenze della teoria della Relatività Generale (TRG)

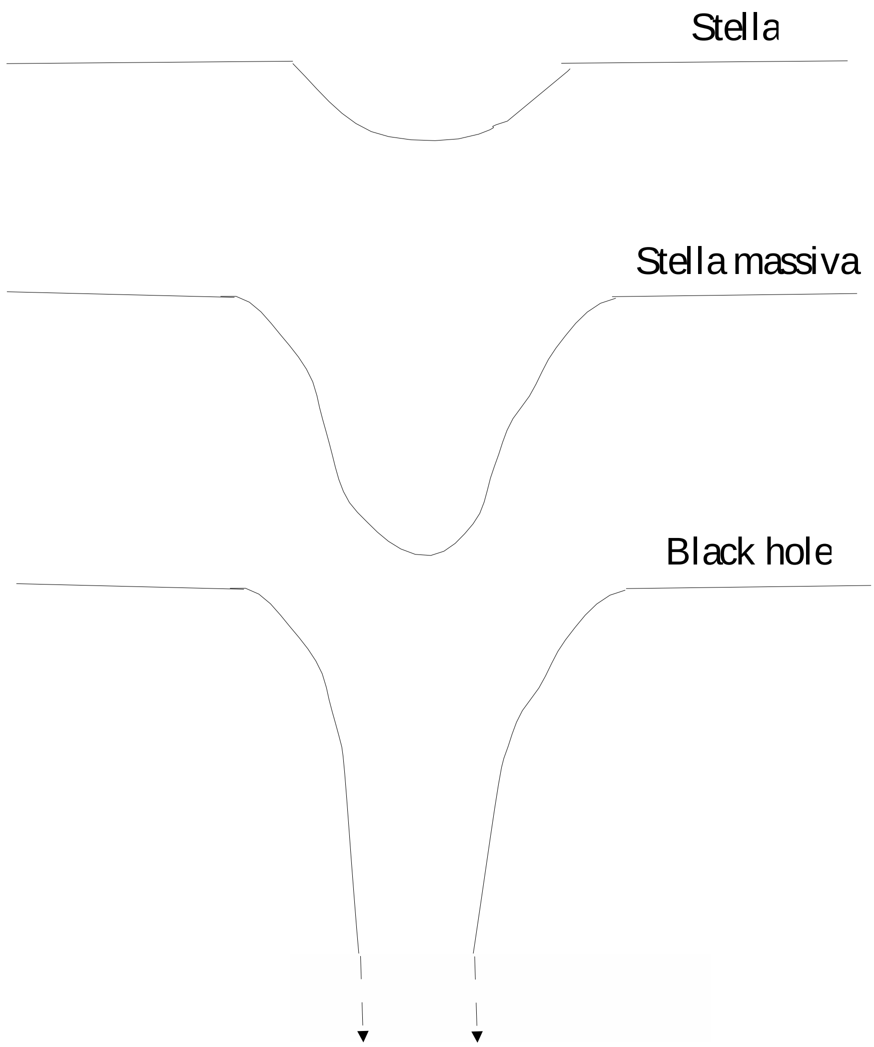
1) Deflessione della luce (effetto lente)



L'osservatore vede due *immagini* nelle direzioni Sa e Sb della stessa stella S.

2) Black holes

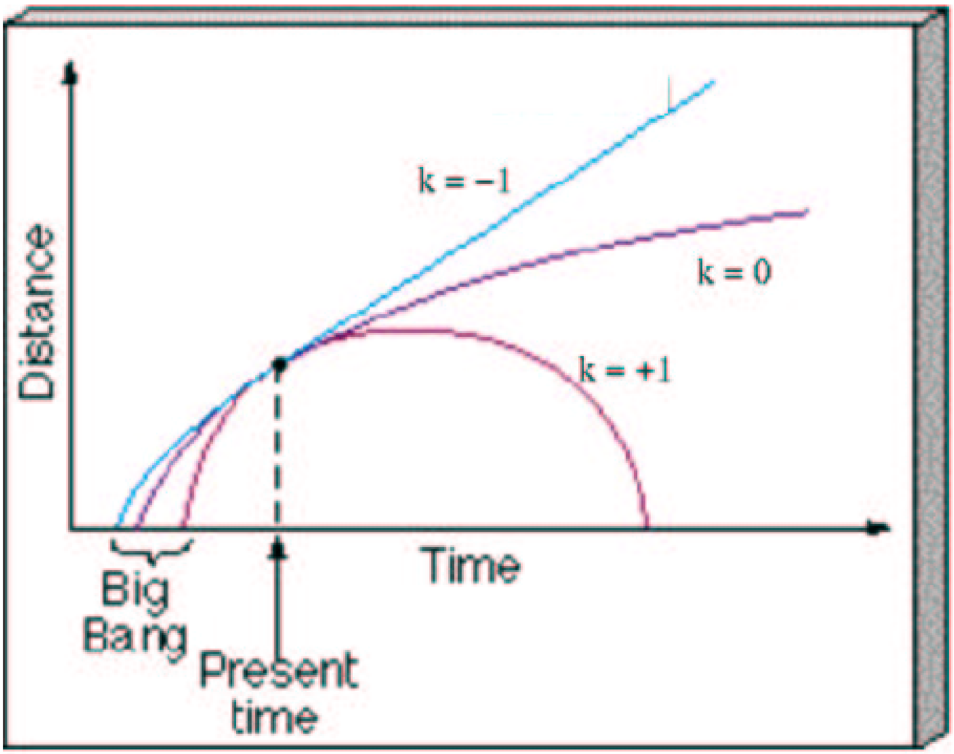
La presenza di un corpo massivo modifica le proprietà geometriche dello spazio-tempo. Tanto maggiore è la massa, tanto più curvo è lo spazio-tempo. Possiamo rappresentare questo effetto mediante la deviazione dalla piattezza di una linea, come in figura. Quando la curvatura tende ad infinito si ha la formazione di un buco nero.



La cosmologia Einsteiniana

- Il problema di Newton: la gravità di una nube infinita
- La soluzione di Einstein
- Spazi a massima simmetria: *il principio cosmologico*
- Equazione di Friedmann
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{1}$$
dove
$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$
è il tasso di espansione (costante di Hubble), ρ è la densità di massa-energia, k è la curvatura della superficie spaziale e a è il fattore di scala.
- Esistono solo tre casi possibili di spazi a massima simmetria (isotropi e uniformi), caratterizzati da $k = 0$, $k = -1$ oppure $k = +1$.
- Definiamo il parametro di densità
$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$$
dove la densità critica è definita da
$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$
- Andamento del fattore di scala nei tre casi:

$k = 0$	spazio piatto
$k = -1$	spazio aperto (iperbolico)
$k = +1$	spazio chiuso (sferico)



Alcuni casi speciali

I caso: Universo vuoto (modello di Milne)

- Poniamo

$$\rho = 0$$

- Segue dall'eq. di Friedmann (1)

$$H^2 = -\frac{k}{a^2}$$

Per avere H^2 positiva si deve avere k negativa, $k = -1$. Si ha perciò

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} \Longrightarrow \dot{a} = 1$$

- Ovvero, la velocità di espansione è costante (accelerazione nulla). L'universo si espande liberamente, senza la gravità della materia.

II caso: Universo chiuso

- Poniamo

$$k = +1$$

- Segue

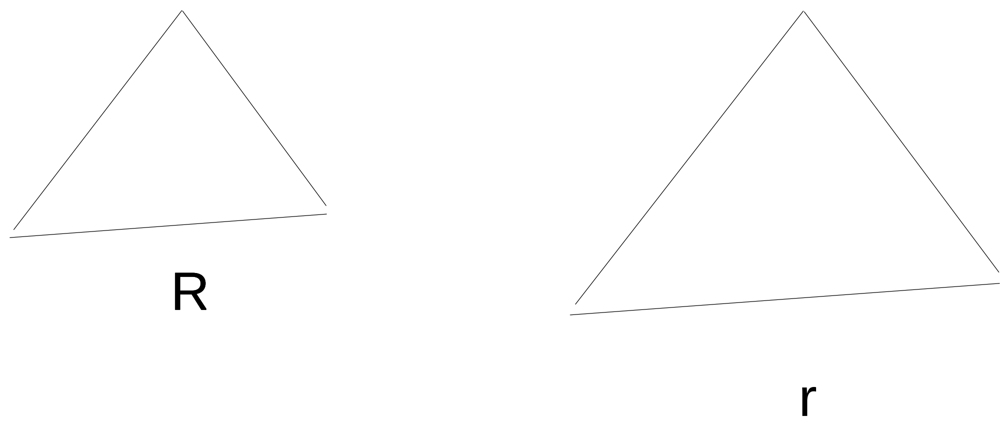
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{1}{a^2}$$

- Si vede che deve esistere un valore di del fattore di scala a per cui l'espansione si arresta, ovvero

$$\rho = \frac{3}{8\pi G a^2} \Longrightarrow H^2 = 0$$

- Si ha allora per un istante $\dot{a} = 0$. Questa è la fase di massima espansione.
- Il modello chiuso deve avere perciò una fase di espansione seguita da una di contrazione.

Il fattore di scala e la legge di Hubble



- Dalla figura si vede che se i triangoli sono simili si ha per ogni lato

$$r = aR$$

ovvero che *tutte* le distanze sono moltiplicate per un fattore a.

- In altre parole, l'espansione mantiene *l'isotropia e l'omogeneità* solo se tutte le distanze vengono ad espandersi dello stesso fattore $a(t)$ (che in generale dipende dal tempo).
- Ne segue la Legge di Hubble (1930):

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} = \dot{a}R = & \frac{\dot{a}}{a}r & \Longrightarrow \\ v & = & Hr \end{array}$$

- Il valore presente della costante di Hubble H è

$$H_0 = 50 - 100 \; km/sec/Mpc$$

Il Redshift

- Dalla figura vediamo che l'onda emessa nella direzione del moto si "accorcia" mentre quella dalla parte opposta si "allunga"

$$\begin{array}{rcl} dr & = & vdt \\ \lambda_0 & = & cdt \\ \lambda_1 & = & \lambda_0 - dr = \lambda_0 - vdt = \lambda_0 - \frac{v}{c}\lambda_0 = \lambda_0(1 - \frac{v}{c}) \end{array}$$

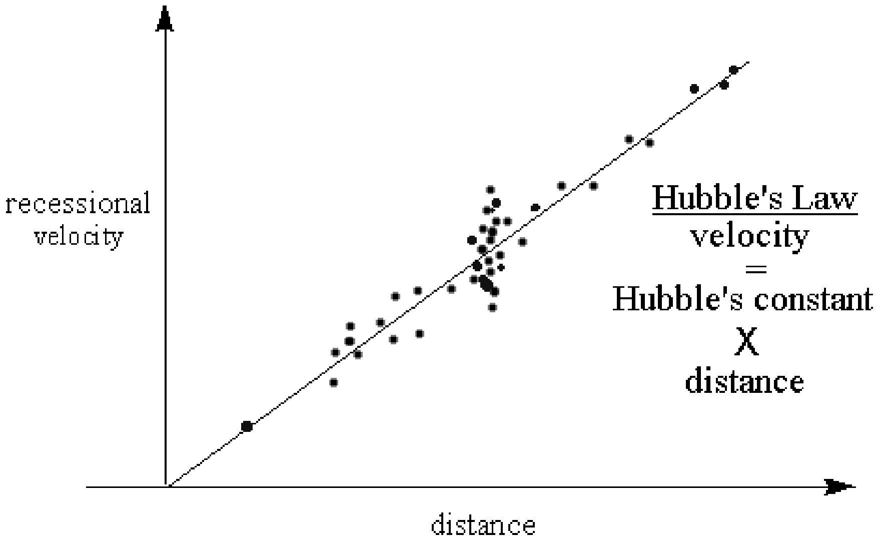
- Si definisce *redshift* (spostamento verso il rosso)

$$z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

(valida per $v \ll c$, cioè per velocità non relativistiche).

Il diagramma di Hubble

- Come si misura la velocità di espansione dell'Universo, ovvero la costante di Hubble H_0?
- Supponiamo di aver misurato la velocità di recessione v di alcune galassie, e la loro distanza R con i vari metodi a disposizione.
- realizziamo allora un grafico che riporta i valori v, R come in figura



- Si ottiene allora un valore

$$H_0 \approx 100h \; km/sec/Mpc$$

dove 1Mpc= $10^6 pc = 3 \cdot 10^{19}$km e $h = 0.5 \div 1$.

Età dell'Universo

- Dalla legge di Hubble

$$v = Hr$$

se la velocità v è costante, il tempo impiegato da una galassia per raggiungere la distanza r è ovviamente

$$T = \frac{r}{v} = \frac{1}{H}$$

da cui

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{100km/sec/Mpc} = \frac{sec \cdot Mpc}{100km} = \frac{sec \cdot 3 \cdot 10^{19} km}{100km} = 3 \cdot 10^{17} sec$$

pari a circa

$$T = \frac{1}{H} \approx 10^{10} anni$$

(dieci miliardi di anni).

- Questo è il tempo impiegato da *ogni* galassia (è infatti lo stesso per ogni v e per ogni r).

Il Big Bang

- Vediamo ora che dalla costatazione che l'universo è in espansione segue che deve esserci stato un istante iniziale di densità infinita.

- Dalla conservazione dell'energia si ha che la massa contenuta in un volume V di universo in espansione resta costante:

$$\begin{aligned} M &= \rho \cdot V = costante \\ \Longrightarrow \quad \rho &= costante/V \end{aligned}$$

Per cui, se il volume V cresce col fattore di scala come

$$V = V_0 a^3$$

è chiaro che quando nel passato a era vicino a zero il volume V era sempre più piccolo, e quindi la densità ρ sempre maggiore. Ovvero si ha

$$\begin{aligned} a &\rightarrow 0 \\ V &\rightarrow 0 \\ \rho &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

- Questa condizione è detta *singolarità.*

- Corrispondentemente, anche la temperatura T, la costante di Hubble H, ed altre quantità fisiche tendono ad infinito.

- L'istante della singolarità è il *big bang*.

Storia termica dell'universo

Dal big bang in poi, l'universo si è espanso (a aumenta), rarefatto (ρ diminuisce) e raffreddato (T diminuisce). Si hanno allora varie fasi:

- Da quarks a protoni/neutroni

$$T \approx 10^{13}K, \quad t \approx 10^{-4}sec$$

- Da p, n a nuclei di idrogeno (H), deuterio (D), elio-3 (He_3), elio-4 (He_4), litio (Li): ovvero, formazione degli elementi leggeri

$$T \approx 10^{10}K, \quad t \approx 1min$$

- Dai nuclei atomici ad atomi neutri (*disaccoppiamento*)

$$T \approx 3000K, \quad t \approx 300.000anni$$

- Formazione delle galassie

$$t \approx 1 \; miliardo \; di \; anni$$

Il fondo cosmico di radiazione

- Dopo il disaccoppiamento, la radiazione non è più assorbita dalla materia, divenuta neutra, e quindi può propagarsi liberamente nello spazio. Si forma perciò un *fondo cosmico di radiazione* isotropo e uniforme alla temperatura di 3000K.
- Oggi, a causa della successiva espansione e raffreddamento, la radiazione di fondo cosmico è alla temperatura di circa 3K (-270 gradi Celsius), rivelata per la prima volta nel 1964 da Penzias e Wilson.
- Le fluttuazioni di temperatura, dovute alle piccole fluttuazioni di densità di materia, sono state rilevate nel 1992 dal satellite COBE.