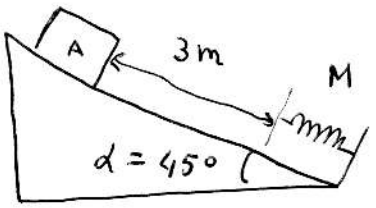
4 Novembre 2010

Esercizio



Il corpo A ha una massa di 0,5kg e, partendo da fermo, scivola, senza attrito, per 3m prima di colpire la molla M di costante elastica $K = 400\ N m^{-1}$. Calcolare la massima deformazione della molla.

L'equazione del moto lungo la direzione del piano inclinato è

$$m a = m g \sin(\alpha) \Rightarrow a = g \sin(\alpha).$$

Il moto è uniformemente accelerato per cui

$$\begin{cases} v_{fin} = a t \\ S_{fin} = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \Rightarrow S_{fin} = \frac{1}{2} \frac{v_{fin}^2}{a}$$

Dopo essere scivolato per 3m il corpo ha energia cinetica $\frac{1}{2} m v_{fin}^2$. Durante la compressione il corpo acquista energia elastica a spese dell'energia cinetica e di quella potenziale.

Sia d la massima deformazione.

L'energia elastica è $E_{el} = \frac{1}{2} k d^2$.

L'energia cinetica è $E_{cin} = \frac{1}{2} m v_{fin}^2$

L'energia potenziale persa nella compressione è $E_{pot} = mgd\sin(\alpha)$

quindi

$$E_{el} = E_{cin} + E_{pot}$$

$$\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m v_{fin}^2 + mgd\sin(\alpha)$$

$$\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m \, 2 g \sin(\alpha) S_{fin} + mgd\sin(\alpha)$$

Otteniamo per d l'equazione di secondo grado

$$\frac{1}{2} k d^2 - mg\sin(\alpha) d - mg\sin(\alpha) S_{fin} = 0$$

da cui

$$d = \frac{mg\sin(\alpha) \pm \sqrt{(mg\sin(\alpha))^2 + 2kmg\sin(\alpha) S_{fin}}}{k}.$$

Dobbiamo scegliere la soluzione con il segno positivo.

Calcoliamo d - $s_{fin} = 3\ m$

$$mg\sin(\alpha) = 0,5 \times 9,81 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\ N$$

$$= 3,4684\ N$$

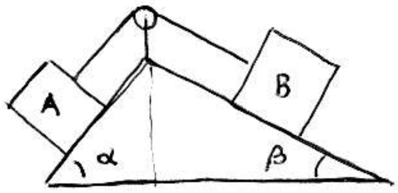
$$d = \frac{3,4684 + \sqrt{(3,4684)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 400 \cdot 3,4684}}{400}$$

$$= \frac{3.4684 + \sqrt{12,0295 + 8324,16}}{400} = 0,2369\,m.$$

4 Novembre 2010

Esercizio

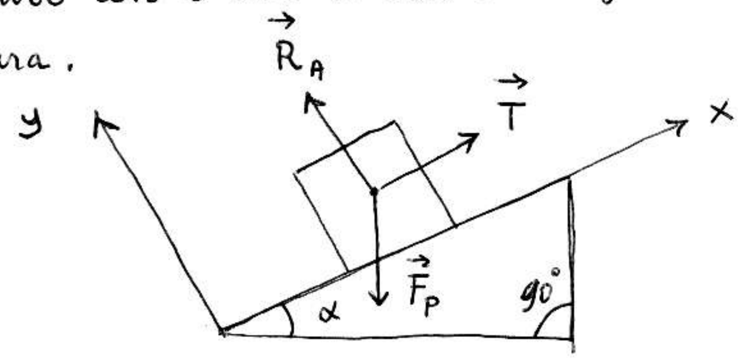
Due piani inclinati sono contrapposti in modo che siano allineati i due lati verticali, come mostrato in figura.

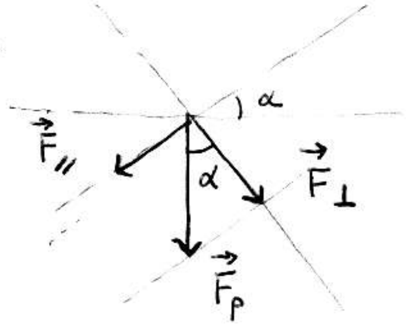


Sui due piani inclinati sono ~~collegat~~ collocati due blocchi di massa m_A e m_B. Tramite una puleggia i blocchi sono collegati da una fune inestensibile. Si suppone inoltre che i blocchi possono scivolare senza attrito lungo i piani inclinati. Si chiede di scrivere le equazioni del moto per i due blocchi e di determinare la tensione della fune in funzione delle masse m_A, m_B e degli angoli α e β. Inoltre si chiede di determinare quale deve essere la massa m_B affinchè i due blocchi restino fermi in equilibrio senza scivolare sapendo che $m_A = 2$ kg, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$.

Quale sarebbe invece il verso dell'accelerazione se le masse fossero uguali? E quale il suo valore con $m_A = m_B = 2$ Kg?

Consideriamo il blocco A. Il suo moto si svolge lungo la direzione del piano inclinato. Prendiamo un sistema di riferimento con l'asse x diretto lungo il piano inclinato, come in figura.





Dalla figura usando la trigonometria ricaviamo le componenti della forza peso lungo l'asse x e y

$$F_x = -|\vec{F}_p| \sin(\alpha) \qquad \text{dove} \quad |\vec{F}_p| = m_A g$$

$$F_y = -|\vec{F}_p| \cos(\alpha) .$$

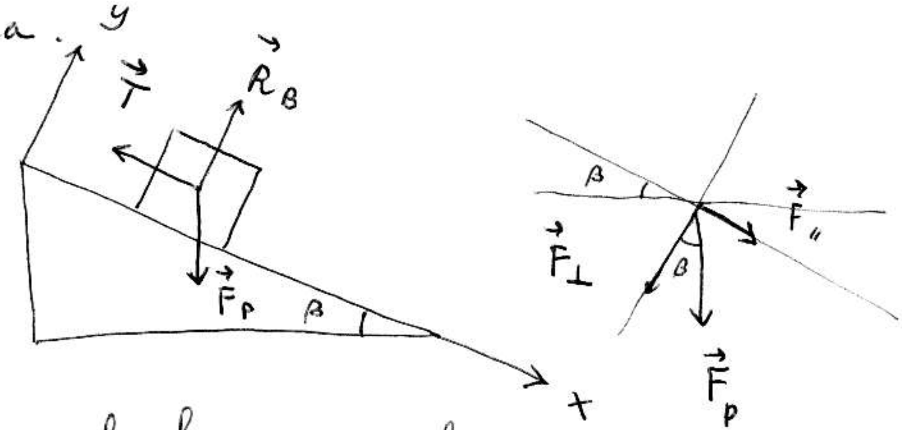
La tensione della corda $\vec{T}$ è diretta lungo l'asse x positivo, mentre la reazione vincolare del piano $\vec{R}_A$ lungo l'asse y positivo. L'equazione del moto di Newton si scrive per i due assi nel modo seguente

$$m_A \, a_{A,x} = T - m_A g \sin(\alpha)$$

$$m_A \, a_{A,y} = R_A - m_A g \cos(\alpha) .$$

Poichè il blocco è sostenuto dal piano, $a_{A,y} = 0$ e quindi $R_A = m_A g \cos(\alpha)$.

Nel caso del secondo piano inclinato procediamo come mostrato in figura.



In modo analogo la forza peso ha componenti

$$F_x = m_B g \sin(\beta)$$
$$F_y = -m_B g \cos(\beta)$$

e le equazioni del moto sono

$$m_B a_{B,x} = m_B g \sin(\beta) - T$$
$$m_B a_{B,y} = R_B - m_B g \cos(\beta).$$

Come nel caso del blocco A, la condizione $a_{B,y}=0$ implica $R_B = m_B g \cos(\beta)$.

Notiamo ora che se il blocco A sale, il blocco B deve scendere e viceversa. Rispetto all'orientazione degli assi x per i due blocchi le accelerazioni sono concordi in verso. Esse sono anche uguali in quanto la fune è inestensibile. Indichiamo con a l'accelerazione comune, cioè $a = a_{A,x} = a_{B,x}$. Otteniamo quindi

$$m_A a = T - m_A g \sin(\alpha)$$

$$m_B a = m_B g \sin(\beta) - T.$$

Se sommiamo le due equazioni si ottiene

$$(m_A + m_B)a = m_B g \sin(\beta) - m_A g \sin(\alpha)$$

cioè

$$a = \frac{g\left(m_B \sin(\beta) - m_A \sin(\alpha)\right)}{m_A + m_B} .$$

Conoscendo a possiamo calcolare la tensione T

$$T = m_A a + m_A g \sin(\alpha)$$

$$= m_A \frac{g\left(m_B \sin(\beta) - m_A \sin(\alpha)\right)}{m_A + m_B} + m_A g \sin\alpha$$

$$= g \frac{m_A m_B \sin(\beta) - \cancel{m_A^2 \sin(\alpha)} + \cancel{m_A^2 \sin(\alpha)} + m_A m_B \sin(\alpha)}{m_A + m_B}$$

$$= g \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\left[\sin(\beta) + \sin(\alpha)\right].$$

Affinchè i blocchi siano in equilibrio, deve essere $a = 0$, cioè non ci deve essere accelerazione. Si ha allora

$$m_B \sin(\beta) = m_A \sin(\alpha),$$

da cui esplicitando rispetto a m_B

$$m_B = m_A \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} .$$

Ora $\quad \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e ~~sin(30°)~~ $\sin(30°) = \frac{1}{2}$

$$m_B = 2\ kg\ \frac{1/\sqrt{2}}{1/2} = 2\ kg\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 2 = 2\cdot\sqrt{2}\ kg$$

$$\simeq 2{,}8284\ kg\ .$$

Se le masse sono uguali $m_A = m_B = m$, si ha

$$a = \frac{g}{2}\left(\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right)$$

e $\quad \sin(30°) - \sin(45°) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$

quindi l'accelerazione è negativa e vale

$$a = -\frac{9{,}81\ m\, s^{-2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} = -\ 1{,}0158\ m\, s^{-2}.$$