18 Novembre 2010

Esercizio

Una ~~persona~~ persona pesa 682 N nell'aria, ma solo 498 N quando sta in piedi immersa nell'acqua fino ai fianchi. Trova:

a. il volume di ognuna delle gambe della persona;

b. la massa di ogni gamba, assumendo che entrambe abbiano una densità totale che è 1,05 volte la densità dell'acqua ?.

Soluzione

La forza peso in acqua è la risultante della forza peso in aria (diretta verso il basso) e della spinta di Archimede (diretta verso l'alto). La spinta di Archimede è data dalla forza peso del volume di liquido spostato. Se indichiamo con V il volume di ciascuna gamba e con ρ la densità dell'acqua, la forza peso in acqua F_{ac} è data

$$F_{ac} = mg - 2V\rho g \qquad (1)$$

da cui

$$V = \frac{mg - F_{ac}}{2\rho g} \qquad (2)$$

La massa di ogni gamba è il prodotto del volume V per la densità $\rho_g = 1,05\rho$, cioè

$$m_g = V\rho_g \qquad (3).$$

Il volume V è quindi

$$V = \frac{682\ N - 498\ N}{2 \cdot 10^{3}\ kg\, m^{-3} \times 9{,}81\ m\, s^{-2}} = 9{,}3782 \cdot 10^{-3}\ m^{3}$$

$$m_g = 1{,}05 \cdot \rho\, \frac{Mg - F_{ac}}{2 \rho g} = 1{,}05 \times \frac{(682 - 498) N}{2 \cdot 9{,}81\ m\, s^{-2}}$$

$$= 9{,}8470\ kg.$$

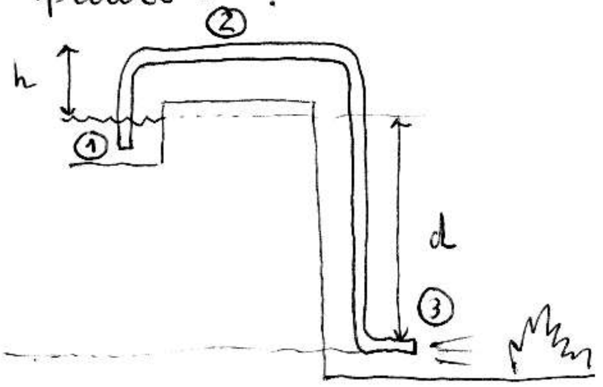
18 Novembre 2010

Esercizio

Un sifone artificiale è una macchina che permette all'acqua di fluire da un livello ad un altro. Il sifone mostrato in figura trasporta l'acqua da un canale di irrigazione ad un campo coltivato. Per rendere operativo il sifone, l'acqua prima è portata lungo tutta la lunghezza del tubo. Dopo che il flusso è partito in questo modo, esso continua per conto suo.

a. Usando i punti 1 e 3 della figura, trova la velocità v dell'acqua che lascia il sifone alla sua estremità inferiore.

b. Il modulo della velocità dell'acqua nel punto 2 è maggiore, minore o uguale a quello della velocità nel punto 3 ?



Soluzione

Alla superficie del liquido la legge di Bernoulli richiede che

$$P_{atm} + \rho g d = \text{costante} , \qquad (1)$$

essendo l'acqua in quiete.

Al punto (3) si ha invece

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 = \text{costante}, \qquad (2)$$

da cui si ottiene subito

$$v_3 = \sqrt{2gd}. \qquad (3)$$

Nel punto 2, sempre la legge di Bernoulli, richiede

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(d+h) = \text{costante}. \qquad (4)$$

Poichè il tubo ha sezione costante la velocità non cambia, cioè $v_2 = v_3$ - Usando la (4) e la (3)

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g(d+h) = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

che conduce a

$$P_2 = P_{atm} - \rho g(d+h) -$$

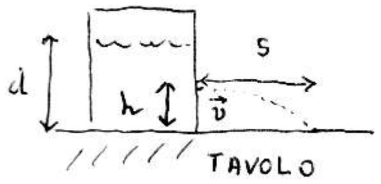
18 Novembre 2010

Esercizio.

Una tanica piena d'acqua fino ad una profondità d ha un buco in un suo lato a un'altezza h al di sopra del tavolo sul quale è posta.
Dimostra che l'acqua che esce dal buco colpisce il tavolo a una distanza orizzontale di $2\sqrt{h(d-h)}$ dalla base della tanica.

Soluzione

La situazione è schematizzata in figura.



In base alla legge di Bernoulli in ogni punto del fluido si ha

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante}.$$

dove z è l'altezza rispetto ad un livello di riferimento. Tale livello sia dato dalla superficie del tavolo. Un punto alla superficie del liquido si trova alla pressione atmosferica, così come un punto presso il foro di uscita. Deve allora valere

$$\rho g d = \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (1)$$

L'acqua che esce dal foro compie un moto parabolico come quello di un proiettile. Prendiamo come asse delle x la direzione di uscita parallela alla superficie del tavolo e come asse z la direzione perpendicolare alla superficie del tavolo.

Lungo l'asse x il moto è uniforme, mentre lungo l'asse z è uniformemente accelerato. Quando l'acqua colpisce il tavolo ha percorso una distanza s in orizzontale e una distanza h in verticale, cioè deve valere

$$\begin{aligned} s &= v t \\ h &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Eliminando t da queste due relazioni si ottiene

$$s = v \sqrt{\frac{2h}{g}} . \qquad (3)$$

Dalla (1) si può ricavare v nella forma

$$v = \sqrt{2(d-h)g} . \qquad (4)$$

Come passo finale inseriamo v data dalla (4) nella (3), e otteniamo

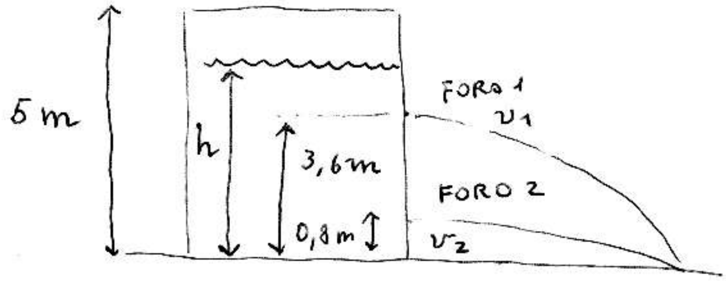
$$s = \sqrt{2(d-h)g} \cdot \sqrt{2h/g} = 2\sqrt{h(d-h)}$$

che è la cosa che bisognava dimostrare.

18 Novembre 2010

Esercizio

Il serbatoio d'acqua della figura è aperto all'atmosfera e ha due buchi, uno a 0,8 m e uno a 3,6 m al di sopra del piano dove è posto. Se i due zampilli d'acqua colpiscono il piano nello stesso punto, qual è la profondità dell'acqua nel serbatoio?



Soluzione

Indichiamo con h il livello dell'acqua e con h_1 e h_2 le posizioni dei due fori da cui esce l'acqua. Per la legge di Bernoulli si ha

$$\rho g h = \text{costante}$$

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \text{costante} \qquad (1)$$

$$\rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{costante} .$$

Usando le ultime due equazioni si ricava una relazione che collega v_1 e v_2, cioè

$$\rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 . \qquad (2)$$

L'acqua che esce dai fori compie un moto parabolico. La direzione x è scelta come parallela al piano e la direzione z in modo perpendicolare. Per l'acqua che esce dai due fori si ha

$$\begin{cases} s_1 = v_1 t_1 \\ h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} s_2 = v_2 t_2 \\ h_2 = \frac{1}{2} g t_2 \end{cases} .$$

In ciascuna coppia di equazioni eliminiamo t_1 e t_2 in modo da ottenere, rispettivamente,

$$s_1 = v_1 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad e \quad s_2 = v_2 \sqrt{\frac{2h_2}{g}} .$$

Poichè l'acqua arriva nello stesso punto deve essere $s_1 = s_2$, che conduce alla relazione

$$v_1 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = v_2 \sqrt{\frac{2h_2}{g}} . \qquad (3)$$

Le (2) e (3) costituiscono un sistema per determinare v_1 e v_2. Ad esempio considerando il quadrato della (3) si ha

$$v_1^2 = v_2^2 \frac{h_2}{h_1}$$

che possiamo ~~dire~~ sostituire a membro di ~~sinistra~~ destra della (2)

$$\rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \frac{h_2}{h_1} .$$

Quest'ultima equazione può essere esplicitata rispetto a v_2^2, cioè

$$v_2^2 = 2g \frac{h_1 - h_2}{1 - \frac{h_2}{h_1}} = 2g\,h_1 \quad . \quad (4)$$

Essendo nota v_2^2 possiamo scrivere usando la prima e la terza delle (1)

$$\rho g h = \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$= \rho g h_2 + \frac{1}{\cancel{2}} \rho \cancel{2} g h_1$$

cioè

$$h = h_1 + h_2 = 3{,}6\,m + 0{,}8\,m = 4{,}4\,m.$$