11 Novembre 2010 Esercizio.

Considera due carrelli a cuscino d'aria che si muovono entrambi verso destra. Il carrello a sinistra ha massa m e velocità iniziale di modulo v_0; il carrello a ~~sinistra~~ destra ha una velocità iniziale $v_0/2$. Se il centro di massa di questo sistema si muove verso destra con una velocità di modulo $2v_0/3$, qual è la massa del carrello a destra?

Soluzione.

$m_S = m$ = massa del carrello di sinistra

m_D = massa del carrello di destra

v_S = velocità del carrello di sinistra

v_D = velocità del carrello di destra

La velocità del centro di massa è

$$v_{CM} = \frac{m_S v_S + m_D v_D}{m_S + m_D}$$

Esplicitiamo questa relazione rispetto a m_D

$$v_{CM}(m_S + m_D) = m_S v_S + m_D v_D$$

$$v_{CM} m_S + v_{CM} m_D = m_S v_S + m_D v_D$$

$$m_D (v_{CM} - v_D) = m_S (v_S - v_{CM})$$

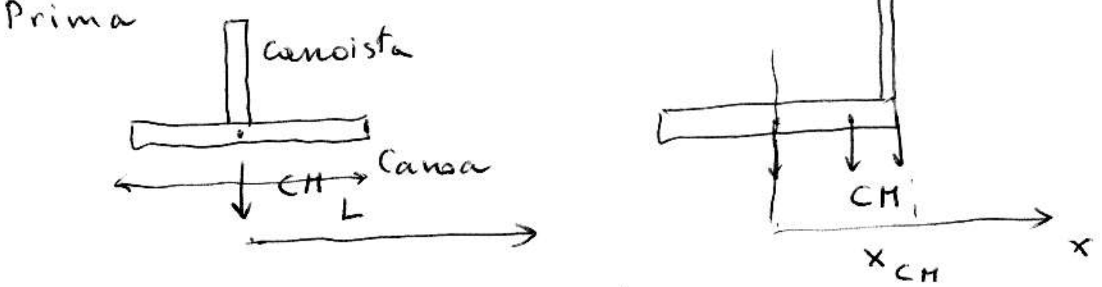
$$\Rightarrow m_D = m_S \frac{v_S - v_{CM}}{v_{CM} - v_D} = m \frac{v_0 - \frac{2}{3}v_0}{\frac{2}{3}v_0 - \frac{v_0}{2}} = m \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = m \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2m.$$

11 Novembre 2010 — Esercizio

Una canoista di 63 kg sta in piedi nel mezzo della sua canoa di 22 kg. La canoa è lunga 3 m, e l'estremità che è più vicina ad attraccare è a 2,5 m dalla riva. La canoista ora cammina verso la riva fino a raggiungere l'estremità della canoa. Quando la canoista si ferma alla fine della canoa, qual è la sua distanza dalla riva?

Soluzione

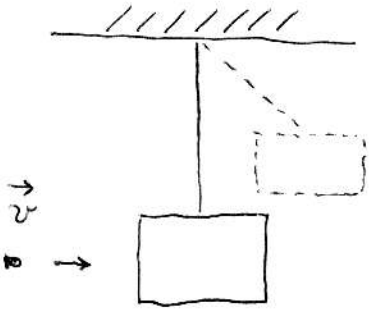
Canoista e canoa sono un sistema isolato, trascurando l'attrito dell'acqua. Rispetto alla riva il centro di massa del sistema non si deve muovere.
All'inizio il centro di massa del sistema è al centro della canoa e quindi dista 4 m dalla riva.
Quando la canoista si sposta, il centro di massa si sposta in avanti di 1,1 m. Infatti



$$x_{CM} = \frac{m_{canoista} \times L/2}{m_{canoista} + m_{canoa}} = 1{,}1 \text{ m}.$$

Dall'estremità della canoa il centro di massa dista allora 0,4 m. Poichè la sua distanza dalla riva è sempre 4 m, l'estremità della canoa dista 3,6 m dalla riva.

11 Novembre 2010 Esercizio



Il dispositivo in figura è un pendolo balistico usato per determinare la velocità di un proiettile misurando l'altezza a cui sale il blocco dopo che il proiettile si è conficcato dentro. Se il blocco, di massa 2kg, sale di 0,5 m, qual è la velocità del proiettile di massa 20 g. ?

Indichiamo con m ed M le masse del proiettile e del blocco, rispettivamente. Prima dell'urto il proiettile ha velocità v, mentre il blocco è fermo. Poichè dopo l'urto il proiettile resta conficcato nel blocco, l'urto è anelastico. Durante l'urto si conserva la quantità di moto nella direzione del proiettile incidente, cioè

$$m v = (m + M) v_f , \qquad (1)$$

dove con v_f si è indicata la velocità, dopo l'urto, del sistema proiettile-blocco. Dalla (1) si ha

$$v_f = \frac{m}{m + M} v . \qquad (2)$$

Immediatamente dopo l'urto, il sistema proiettile-blocco inizia un moto rotatorio dovuto al fatto che il blocco è sospeso.

Il blocco si muoverà verso l'alto finché il guadagno di energia potenziale è pari all'energia cinetica subito dopo l'urto. Dunque si ha

$$\frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = (m+M)gh \, . \quad (3)$$

Dalla (3) si ottiene

$$h = \frac{1}{2g} v_f^2 \, . \qquad (4)$$

Inserendo la (2) nella (4) si ha

$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v^2 \, . \qquad (5)$$

La (5) ci permette di calcolare l'altezza h se conosciamo la velocità iniziale v del proiettile. Se però la ~~ma~~ esplicitiamo rispetto a v riusciamo a rispondere alla domanda del problema, cioè di determinare v conoscendo h. Infatti

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh} \, . \quad (6)$$

Usiamo i dati del problema

$$v = \frac{0{,}02+2}{0{,}02}\sqrt{2 \times 9{,}81 \times 0{,}5} \; m\,s^{-1} =$$

$$= 101 \cdot \sqrt{9{,}81} \; m\,s^{-1} = 316{,}3416 \; m\,s^{-1} .$$

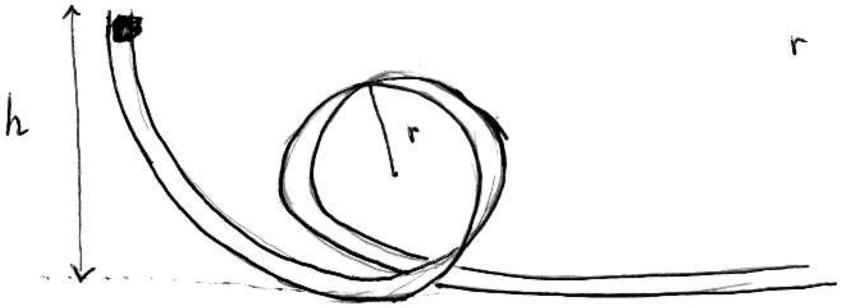
11 Novembre 2010

Esercizio

Un blocco di massa m scivola da fermo su una pista priva di attrito con «giro della morte», così come è mostrato in figura.

a) Qual è la minima altezza h da cui può venire liberato il blocco, perchè esso mantenga il contatto con la pista in ogni momento durante il percorso?

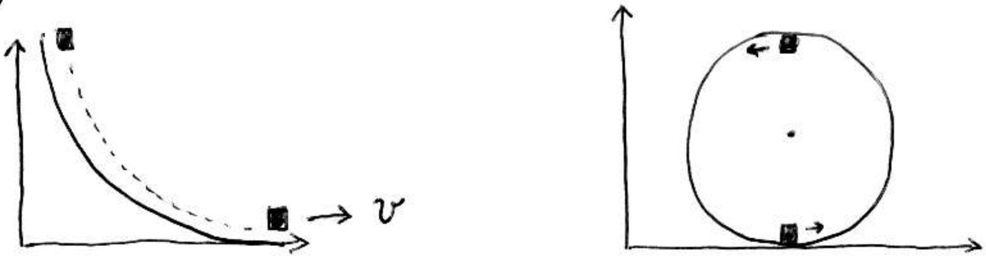
b) Spiega perché l'altezza ottenuta nella domanda a) è indipendente dalla massa del blocco.



r raggio del «giro della morte».

Soluzione

È utile analizzare il moto del blocco considerando due fasi: nella prima il blocco discende dall'altezza h ed arriva, con velocità orizzontale, all'imboccatura ~~del~~ del «giro della morte»; nella seconda compie il «giro della morte». In figura lo schema delle due fasi.



Poichè la pista non ha attrito, l'energia si conserva. L'energia potenziale che il corpo ha inizialmente si tramuta in energia cinetica.

Abbiamo quindi $\quad mgh = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (1)$

dove v_i indica il modulo della velocità all'imboccatura del « giro della morte » -

Il « giro della morte » è un moto circolare su una circonferenza di raggio r. In un moto circolare l'accelerazione centripeta è data da

$$a_c = \frac{v_t^2}{r} \qquad (2)$$

dove v_t è la velocità tangenziale. Il blocco compie una traiettoria circolare poichè la pista lo obbliga a tale moto - La pista esercita quindi sul corpo una reazione vincolare diretta verso il centro della circonferenza - Se il moto circolare fosse effettuato in assenza di gravità, allora la reazione vincolare sarebbe la stessa in ogni punto - Infatti usando la seconda legge di Newton avremo, usando la (2),

$$m\, a_c = R \quad \text{cioè} \quad m \frac{v_t^2}{r} = R \qquad (3)$$

dove R indica il modulo della reazione vincolare.

Nel caso in esame dobbiamo includere l'effetto della gravità. Tale effetto dipende dalla posizione del blocco lungo la traiettoria circolare.

Ad esempio, quando il blocco è nella posizione più bassa, la forza di gravità è diretta in modo opposto alla reazione vincolare della pista, mentre quando il blocco è nella posizione più alta la gravità è diretta in modo concorde con la reazione vincolare. Nelle situazioni intermedie la gravità può essere scomposta in una componente radiale ed una tangenziale.

Il punto importante del ragionamento è che, quando il blocco si trova in alto, si ha

$$m \frac{v_{alto}^2}{r} = R_{alto} + mg \qquad (4)$$

mentre quando è in basso

$$m \frac{v_{basso}^2}{r} = R_{basso} - mg \qquad (5)$$

Dalla (4) vediamo che tutti i valori di R_{alto} sono possibili, purchè positivi. In particolare, il valore $R_{alto} = 0$, definisce la velocità minima $\bar{v}_{alto}$ con cui il blocco può arrivare nel punto più alto, cioè

$$\bar{v}_{alto} = \sqrt{rg} \qquad (6)$$

Affinché nel punto più alto il blocco abbia velocità $\bar{v}_{alto}$ data dalla (6), deve avere una velocità minima $\bar{v}_{basso}$ nel punto basso data da

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_{basso}^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_{alto}^2 + 2mgr, \qquad (7)$$

che si ottiene considerando la differenza di energia potenziale tra i due punti considerati.

Il valore di $\bar{v}_{basso} = v_i$ dipende dall'altezza iniziale in virtù della (1), per cui ~~la alt~~ l'altezza minima $\bar{h}$ deve soddisfare la relazione

$$mg\bar{h} = \frac{1}{2} m rg + 2mgr$$

da cui eliminando m e g

$$\bar{h} = \frac{5}{2} r . \qquad (8)$$

Il motivo per cui $\bar{h}$ non dipende dalla massa è dovuto al fatto che nel punto più alto l'accelerazione centripeta deve coincidere con quella gravitazionale che è la stessa per tutti i corpi.