9. Urti e conservazione della quantità di moto.

1 Conservazione dell'impulso

Consideriamo due punti materiali di massa m_1 e m_2 che si muovono in una dimensione. Supponiamo che i due punti materiali possono muoversi senza alcun attrito, cioè non esiste alcuna forza che possa influenzare il loro moto. Immaginiamo che ad un dato istante i due punti materiali si muovono in direzione opposta l'uno verso l'altro, come illustrato in figura 1. Intuitivamente comprendiamo che i due punti materiali entreranno in collisione. Vogliamo analizzare tale situazione prescindendo dalle modalità specifiche di come tale collisione avviene. Tale modalità dipendono dalle forze che reciprocamente i due punti materiali esercitano l'uno sull'altro. Tali forze possono avere varia natura. Possono essere forze gravitazionali, elettriche, magnetiche, nucleari, etc.. Il punto di vista che vogliamo sviluppare durante questa lezione è che qualunque sia la natura di tali forze, affinchè ci sia una collisione i due punti materiali devono esercitare reciprocamente una forza. Se non ci fosse alcuna forza reciproca, in base alla seconda legge del moto, i punti materiali non muterebbero il loro stato di moto e non ci sarebbe alcuna collisione. D'altra parte stiamo supponendo che al di fuori delle forze che i due punti materiali esercitano l'uno sull'altro non ci sono altre forze. Se, come si usa dire, consideriamo i due punti materiali come un unico sistema, non esistono forze esterne al sistema. Le uniche forze in gioco sono quelle interne, quelle cioè che i punti materiali esercitano l'uno sull'altro. In queste circostanze possiamo definire l'impulso totale del sistema

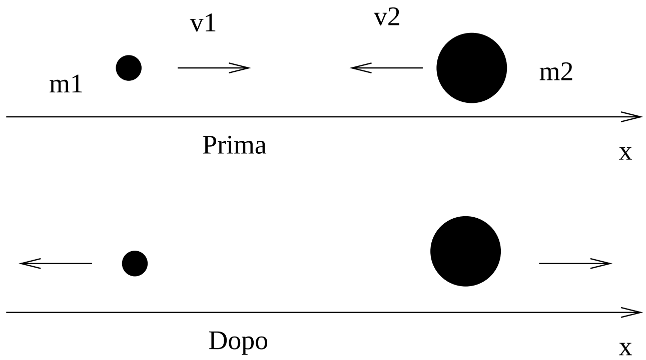

Figure 1: Due punti materiali si muovono in verso opposto. v_1 e v_2 sono le velocità prima della collisione, mentre v_1' e v_2' sono quelle dopo la collisione.

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{1}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità delle due particelle. L'impulso totale non può variare perché non ci sono forze esterne. Tale affermazione prende il nome di legge di conservazione della quantità di moto. Qui la stiamo enunciando nel caso di un sistema di due punti materiali che si muovono in una dimensione, ma la sua validità è generale. Per motivi di semplicità espositiva continuiamo a considerare una situazione unidimensionale. Il problema che vogliamo risolvere è sapere come si muovono i due punti materiali dopo la collisione. Durante la collisione, ogni punto materiale esercita una forza sull'altro e varia di conseguenza l'impulso dell'altro. Dalla III legge del moto sappiamo che le forze che i due punti materiali esercitano reciprocamente sono uguali ed opposte. Ciò è intuitivamente comprensibile considerando la situazione della figura 1. Prima della collisione il punto di massa m_1 ha una velocità positiva, mentre il secondo punto ha una velocità negativa. Dopo la collisione la situazione è invertita. Dunque il primo punto ha sperimentato una variazione negativa di velocità (e di impulso), mentre il secondo una variazione positiva. Corrispondentemente, la forza sperimentata dal primo punto è negativa, mentre è positiva quella agente sul secondo. Indichiamo con v_1' e v_2' le velocità dei due punti materiali dopo la collisione. La conservazione dell'impulso totale implica che la collisione può solo portare ad una ridistribuzione interna degli impulsi tra i due punti materiali

$$P = m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{2}$$

A partire dall'impulso totale del sistema di due punti materiali possiamo definire la velocità del centro di massa

$$V_{CM} = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{3}$$

che è la velocità corrispondente ad un sistema con impulso P e massa pari alla massa totale dei punti materiali costituenti il sistema. Dalla definizione vediamo che la velocità del centro di massa (CM) del sistema è diversa da quella dei punti materiali costituenti il sistema. Ad esempio, se le masse sono uguali e le velocità dei punti sono uguali in valore assoluto ma opposte in segno, $V_{CM} = 0$. Per capire questo fatto, consideriamo che ad un dato istante i due punti materiali di massa uguale si trovano ad una certa distanza. È chiaro che il centro di massa si trova a metà strada tra i due punti. Dopo un certo tempo la distanza tra i due punti si è ridotta, ma il CM è sempre a metà strada tra i due punti e quindi non si è mosso. La sua velocità è quindi nulla. Se consideriamo il caso invece che uno dei due punti ha una massa molto superiore rispetto a quella dell'altro, il CM si troverà in una posizione molto vicina a quella del punto materiale di massa più grande. Dopo un certo tempo il punto di massa più grande si sarà spostato ed anche il CM del sistema. In questo caso $V_{CM} \neq 0$. Per masse arbitrarie V_{CM} è dato dalla (3).

La conservazione dell'impulso totale implica che la velocità del CM è costante. Ciò suggerisce che la velocità di un punto materiale si può decomporre nella somma di due velocità

$$v_1 = V_{CM} + w_1 \tag{4}$$

dove w_1 indica la velocità relativa rispetto al CM. In modo analogo si decompone la velocità del secondo punto materiale. Le velocità w_1 e w_2 si ottengono

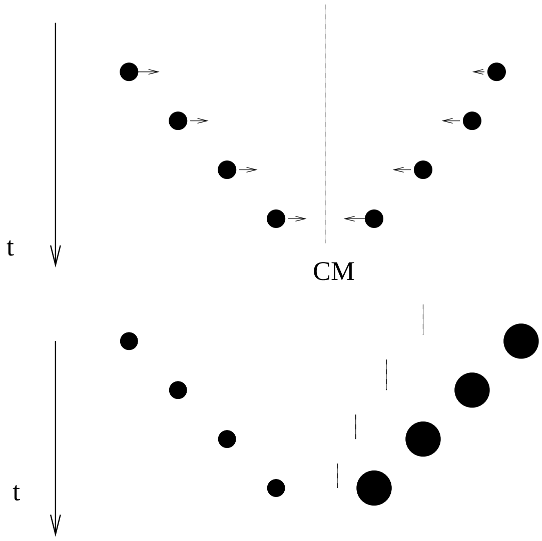

Figure 2: In figura è rappresentata la situazione di due punti materiali che si avvicinano con velocità opposta. Nella parte superiore si mostra il caso di masse uguali, mentre le masse sono diverse nel caso inferiore. La linea verticale tra i punti materiali indica la posizione del centro di massa allo scorrere del tempo, indicato con l'asse verticale orientato verso il basso.

facilmente

$$w_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{5}$$

$$w_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1) \tag{6}$$

per modo che

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = 0. \tag{7}$$

La (7) deve restare valida anche dopo la collisione, cioè

$$m_1 w_1' + m_2 w_2' = 0. \tag{8}$$

Dunque si ha

$$\frac{w_1}{w_2} = -\frac{m_2}{m_1} = \frac{w_1'}{w_2'}. \tag{9}$$

Una volta note w_1' e w_2' si ottengono le velocità dopo la collisione

$$v_1' = V_{CM} + w_1' \tag{10}$$

$$v_2' = V_{CM} + w_2'. \tag{11}$$

2 Urti elastici

Se durante una collisione si conserva l'energia, la collisione è detta elastica. Tale denominazione trae origine dalla considerazione che quando due corpi elestici entrano in collisione si deformano accumulando energia elastica. Tale energia elastica, come nel caso dell'oscillatore armonico, viene ottenuta a spese dell'energia cinetica che i corpi hanno prima della collisione. Dopo la collisione i corpi riassumono la forma originaria e rilasciano l'energia elastica accumulata. Quest'ultima si trasforma nuovamente in energia cinetica. Prima e dopo la collisione l'energia cinetica è la stessa. Tale proprietà naturalmente non si presenta quando i corpi che collidono non sono elastici. Consideriamo ora urti elastici. La conservazione dell'energia può essere scritta in base alla (4)

$$E = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} V_{CM}^2 + \frac{m_1}{2} w_1^2 + \frac{m_2}{2} w_2^2. \tag{12}$$

La seconda uguaglianza della (12) esprime il fatto che l'energia cinetica può essere decomposta in due contributi: l'energia cinetica del CM e l'energia cinetica dei punti materiali rispetto al CM. La conservazione dell'energia rispetto al CM diventa quindi

$$E = \frac{m_1}{2} w_1^2 + \frac{m_2}{2} w_2^2 = \frac{m_1}{2} w_1'^2 + \frac{m_2}{2} w_2'^2. \tag{13}$$

Facendo uso delle (9) e (13) si ottiene

$$w_1' = -w_1 \tag{14}$$

$$w_2' = -w_2. \tag{15}$$

Queste relazioni consentono di ottenere le espressioni delle velocità dopo l'urto

$$v_1' = V_{CM} - w_1 \tag{16}$$

$$v_2' = V_{CM} - w_2. \tag{17}$$

Come applicazione consideriamo che prima della collisione $v_1 = v$, mentre $v_2 = 0$. Si ottiene allora per le velocità dopo la collisione

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \tag{18}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \tag{19}$$

Se le due particelle hanno la stessa massa, cioè $m_1 = m_2$ si ha

$$v_1' = 0 \tag{20}$$

$$v_2' = v, \tag{21}$$

cioè il corpo inizialmente in moto cede tutta la sua energia cinetica al corpo inizialmente fermo. Se ad esempio la massa del corpo inizialmente fermo è molto più grande di quella del corpo inizialmente in moto, cioè $m_2 \gg m_1$ allora si ha

$$
\begin{aligned}
v_1' &\approx -v && (22)\\
v_2' &\approx 0, && (23)
\end{aligned}
$$

in modo che il corpo pesante non si muove per effetto della collisione mentre quello leggero rimbalza all'indietro.