8. Energia e lavoro

1 Definizione di lavoro

Consideriamo una forza applicata ad un corpo di massa m. Per semplicità ci limitiamo, inizialmente ad una forza costante, come ad esempio la gravità alla superficie terrestre. Sempre per semplicità consideriamo un moto unidimensionale con la forza diretta lungo la direzione del moto. Per fissare le idee consideriamo la forza di gravità $F = -mg$ agente lungo la verticale verso il basso (Il segno meno è dovuto al fatto che l'asse delle x è orientato verso l'alto e la forza agisce verso il basso, cf. figura 1). Sia x lo spazio percorso dal corpo durante l'intervallo di tempo in cui agisce la forza. Definiamo *lavoro compiuto dalla forza F* la quantità

$$L = Fx. \tag{1}$$

Notiamo che il lavoro è positivo se la forza e lo sposamento sono concordi in segno.

2 Teorema dell'energia per un moto uniformemente accelerato

Nelle ipotesi del precedente paragrafo dimostriamo il seguente teorema dell'energia. Sia t il tempo necessario al corpo a compiere lo spostamento x durante l'azione della forza. Essendo la forza costante, il moto è uniformemente accelerato e lo spostamento risulta

$$x = v_{in}t + \frac{1}{2}at^2. \tag{2}$$

Se usiamo la (2) nella (1) si ottiene

$$\begin{aligned} L &= ma\left[v_{in}t + \frac{1}{2}at^2\right] \\ &= m\left[v_{in}at + \frac{1}{2}a^2t^2\right] \\ &= m\left[v_{in}(v_{fin} - v_{in}) + \frac{1}{2}(v_{fin} - v_{in})^2\right] \\ &= m(v_{fin} - v_{in})\left[v_{in} + \frac{1}{2}(v_{fin} - v_{in})\right] \\ &= \frac{1}{2}m(v_{fin} - v_{in})(v_{fin} + v_{in}) \\ &= \frac{1}{2}m(v_{fin}^2 - v_{in}^2). \end{aligned} \tag{3}$$

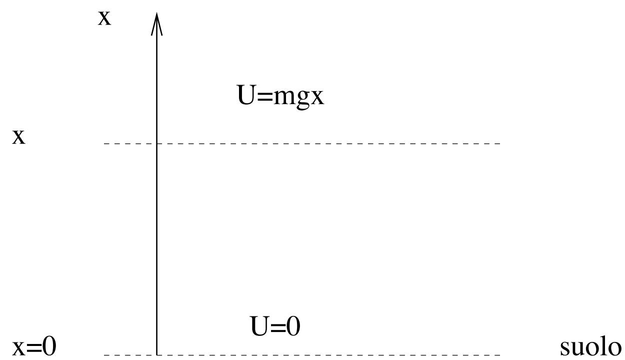

Figura 1: Definizione di energia potenziale

Per comprendere il significato della (3) definiamo l'*energia cinetica* di un corpo di massa m in moto con velocità v

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \tag{4}$$

L'energia cinetica dipende dalla velocità e dunque può variare nel tempo se cambia la velocità. La (3) afferma che il lavoro compiuto da una forza su un corpo è pari alla variazione di energia cinetica del corpo tra l'istante iniziale e quello finale. Nel caso in cui il lavoro è positivo, vi è un guadagno di energia cinetica. Nel caso della gravità, tale guadagno di energia è dovuto al fatto che il corpo si trova inizialmente ad una certa altezza. È chiaro che tale guadagno è maggiore nel caso in cui l'altezza cui si trova il corpo è maggiore. Questa diversa potenzialità a guadagnare energia cinetica a seconda dell'altezza cui si trova un corpo suggerisce di introdurre il concetto di *energia potenziale*. Per definizione assumiamo, sempre avendo in mente l'esempio del corpo che cade, che quando il corpo è al suolo non è più in grado di guadagnare energia cinetica. Definiamo quindi l'energia potenziale gravitazionale

$$U = -Fx = -(-mg)x = mgx, \tag{5}$$

dove x rappresenta l'altezza cui il corpo si trova (cf. figura (1)). L'energia potenziale è quindi pari al lavoro, cambiato di segno, che la forza di gravità compierebbe durante la caduta del corpo da un'altezza x. Poichè, in virtù della (5) $U = -L$, la (3) può essere quindi riscritta nella forma

$$-\Delta U = \Delta T$$

cioè la variazione dell'energia potenziale è pari alla variazione dell'energia cinetica cambiata di segno. In altre parole esiste una quantità chiamata energia totale o semplicemente *energia* che rimane costante durante il moto

$$E = T + U = \text{costante}. \tag{6}$$

La (6) è la legge di conservazione dell'energia. Qui è stata ricavata nel caso di un moto unidimensionale uniformemente accelerato. In realtà tale legge di conservazione ha validità generale.

3 Teorema dell'energia nel caso generale

Ci proponiamo di dimostrare la (3) senza fare alcuna assunzione circa la natura del moto di un corpo sotto l'azione di una forza. Consideriamo quindi un moto che avvenga durante un intervallo di tempo di durata t. Immaginiamo di dividere tale intervallo in N intervalli più piccoli tutti di durata τ in modo che valga la relazione $t = N\tau$. Assegnamo un indice discreto n ad ogni istante di tempo corrispondente ad un multiplo dell'intervallo temporale τ, cioè, $t_n = n\tau$, con $t_0 = 0$ corrispondente all'istante iniziale. La velocità al tempo t_n è indicata con v_n. La strategia della nostra dimostrazione è di immaginare di poter considerare l'intervallo di tempo τ arbitrariamente piccolo e il numero N degli intervalli arbitrariamente grande, in modo che sia sempre $t = N\tau$. Da questo punto di vista la conoscenza di tutti i valori v_n descrive completamente il moto. Infatti quando τ tende a diventare infinitamente piccolo, v_n tende al valore della velocità istantanea. Per dimostrare il teorema dell'energia dobbiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza durante il moto del corpo. Osserviamo che, se tutti i valori v_n fossero uguali, allora significherebbe che non c'è accelerazione e quindi non ci sono forze in gioco ed il lavoro è nullo. Definiamo quindi l'accelerazione che occorre durante un'intervallo di tempo τ

$$a_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{\tau}. \tag{7}$$

Inoltre, durante l'intervallo di tempo τ, il corpo compie uno spostamento pari a

$$x_n = \frac{v_{n-1}\tau + v_n\tau}{2}, \tag{8}$$

che corrisponde al valor medio degli spostamenti che il corpo compierebbe dutante l'intervallo di tempo τ se si muovesse a velocità costante (cioè compiendo un moto uniforme) o con la velocità posseduta all'inizio dell'intervallo, cioè $v_{n-1}\tau$, o con la velocità acquistata alla fine dell'intervallo, cioè $v_n\tau$. Durante l'intervallo di durata τ, tra gli istanti t_{n-1} e t_n, il lavoro compiuto dalla forza deve essere, in virtù della seconda legge della dinamica,

$$L_n = ma_nx_n. \tag{9}$$

Il lavoro totale compiuto durante l'intervallo $t = N\tau$ sarà quindi

$$L = \sum_{n=1}^{N} L_n = m\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}(v_n - v_{n-1})(v_n + v_{n+1}) = m\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(v_n^2 - v_{n-1}^2). \tag{10}$$

Considerando la somma su n esplicitamente si ottiene

$$L = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2 + v_2^2 - v_1^2 + \ldots + v_N^2 - v_{N-1}^2) = \frac{m}{2}(v_N^2 - v_0^2). \tag{11}$$

Se adesso identifichiamo $v_0 \equiv v_{in}$ e $v_N \equiv v_{fin}$, si ottiene la (3).

4 Caso dell'oscillatore armonico

Abbiamo visto che nel moto armonico come quello di un corpo attaccato ad una molla, la forza elastica della molla tende a frenare il corpo nella fase di allungamento o compressione della molla, cioè durante la fase del moto in cui il corpo si allontana dalla posizione di equilibrio. Naturalmente durante la fase di ritorno verso la posizione di equilibrio la forza elastica tende invece ad accelerare il corpo. In altre parole nella fase di allungamento o compressione il lavoro esercitato è negativo, mentre è positivo nella fase di ritorno. Calcoliamo il lavoro durante la fase di allungamento. Poichè la forza non è costante durante il moto, dividiamo lo spazio percorso in N intervalli Δx. Lo spazio percorso dopo n intervalli è $x_n = n\Delta x$. Utilizzando la consueta strategia possiamo immaginare di considerare intervalli arbitrariamente piccoli e il loro numero, N, arbitrariamente grande. Definiamo il lavoro in ciascuno intervallo come

$$L_n = F_n \Delta x. \tag{12}$$

Usando la legge di Hook per la forza di richiamo elastica $F = -kx$, abbiamo

$$L_n = -k x_n \Delta x = -kn\Delta x^2. \tag{13}$$

Come ci aspettiamo il lavoro è negativo in quanto i versi della forza e dello spostamento sono discordi. Il lavoro totale si ottiene sommando su tutti gli intervalli

$$L = -k \sum_{n=1}^{N} n\Delta x^2 = -\frac{k}{2} N^2 \left(1 + \frac{1}{N}\right) \Delta x^2 \tag{14}$$

dove abbiamo usato la regola di Gauss. Quando N diventa arbitrariamente grande, ma $x = N\Delta x$ costante, otteniamo

$$L = -\frac{k}{2} x^2. \tag{15}$$

Tale lavoro negativo è analogo al caso in cui bisogna portare un corpo ad una certa altezza facendogli fare uno spostamento di verso discorde rispetto a quello della forza di gravità. Tale lavoro negativo corrisponde, come abbiamo visto, ad una acquisita capacità del corpo di successivamente cadere e acquistare energia cinetica. In modo analogo, quindi, definiamo l'energia potenziale elastica

$$U = \frac{k}{2} x^2 \tag{16}$$

e l'energia totale risulta

$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} x^2. \tag{17}$$

La (17) è la legge di conservazione dell'energia nel caso dell'oscillatore armonico.

5 Piccole oscillazioni del pendolo

Il vantaggio dell'uso del concetto di energia lo si può apprezzare nello studio delle piccole oscillazioni del pendolo. Consideriamo il pendolo della figura (2), costituito da un punto materiale di massa m appeso ad un filo di lunghezza l. Ad ogni istante l'energia del pendolo ha i due contributi potenziale e cinetico

$$E = \frac{m}{2}v^2 + mgl(1 - \cos(\alpha)). \tag{18}$$

Esprimendo la velocità in termini della velocità angolare, cioè $v = l\omega$ e usando la fomula trigonometrica

$$1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

otteniamo la (18) nella forma

$$E = \frac{ml^2}{2}\omega^2 + 2mgl\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{19}$$

Se consideriamo le oscillazioni con angolo piccolo $\sin\alpha \approx \alpha$, l'energia diventa

$$E = \frac{ml^2}{2}\omega^2 + \frac{mgl}{2}\alpha^2. \tag{20}$$

La (20) ha la forma dell'energia dell'oscillatore armonico in termini della variabile angolare α e la velocità angolare ω corrispondente. Concludiamo che il moto del pendolo con piccole oscillazioni è un moto armonico quando sia descritto in termini dell'angolo α spazzato allo scorrere del tempo. La pulsazione Ω (da non confondere con la velocità angolare ω) e il periodo delle oscillazioni sono

$$\Omega = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{21}$$

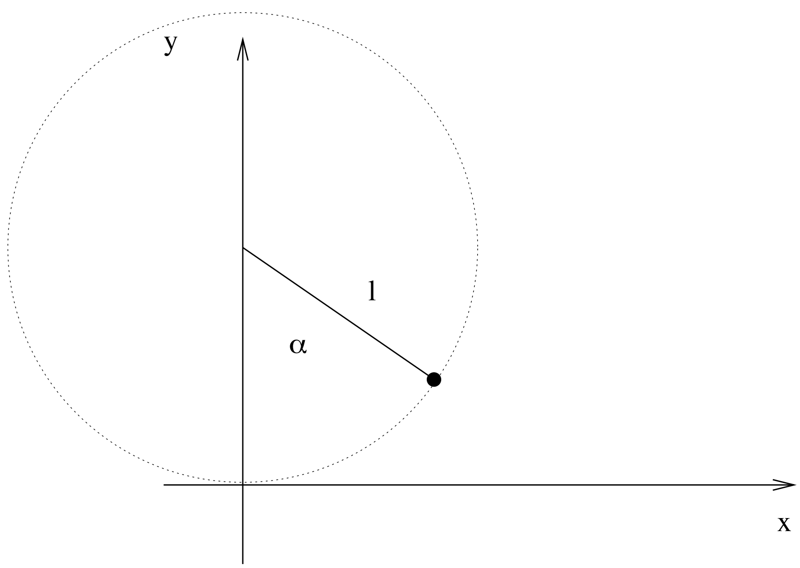

Figura 2: Pendolo.