7. Forze elastiche

1 Moti periodici

Un caso particolare di moto accelerato è un moto periodico. In figura 1 è riportato un esempio di moto periodico unidimensionale. Un moto periodico si ripete identicamente dopo un tempo pari al periodo T. In formule ciò si esprime

$$x(t+T) = x(t). \tag{1}$$

Nella figura 1 il periodo è $T = 2s$ e corrisponde ad un moto unidimensionale limitato tra i valori $x = 0$ ed $x = 1$.

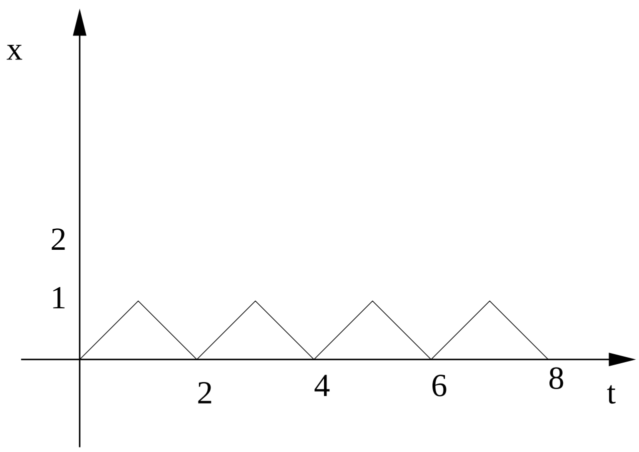

Figure 1: Esempio di moto periodico con periodo $T = 2s$.

2 Moto armonico

Consideriamo il moto circolare studiato in una precedente lezione. Come abbiamo discusso, in un moto circolare le coordinate x ed y della posizione istantanea variano continuamente, in modo però che resta costante la distanza dal centro della circonferenza, cioè

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Ricordando la definizione delle funzioni seno e coseno di un'angolo, per un generico punto P, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x &= R\cos\alpha \\ y &= R\sin\alpha \end{aligned} \tag{3}$$

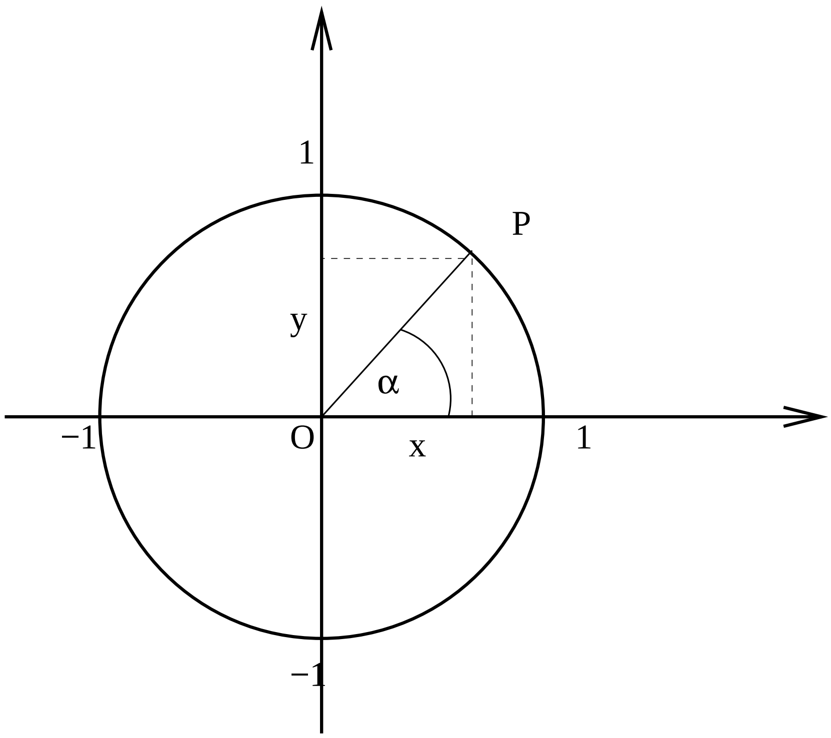

Figure 2: Definizione di seno e coseno.

dove l'angolo α varia nel tempo in modo lineare secondo la legge

$$\alpha = \omega t \tag{4}$$

dove ω è la velocità angolare. Vogliamo prendere in esame la proiezione del moto circolare su uno dei due assi cartesiani. Scegliamo, ad esempio, l'asse delle x. È chiaro che, poiché il moto circolare è periodico, lo è anche la sua proiezione lungo l'asse x. In base alla (3) tale moto è sinusoidale ed ha la forma mostrata in figura 3 cui corrisponde l'equazione

$$x = \cos(\omega t) \tag{5}$$

Tale moto periodico è detto moto armonico. Il periodo è lo stesso del moto circolare ed è dato da $T = 2\pi/\omega$.

3 Proprietà del moto armonico

Una proprietà notevole del moto armonico è che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento cambiato di segno. Per rendercene conto consideriamo la figura

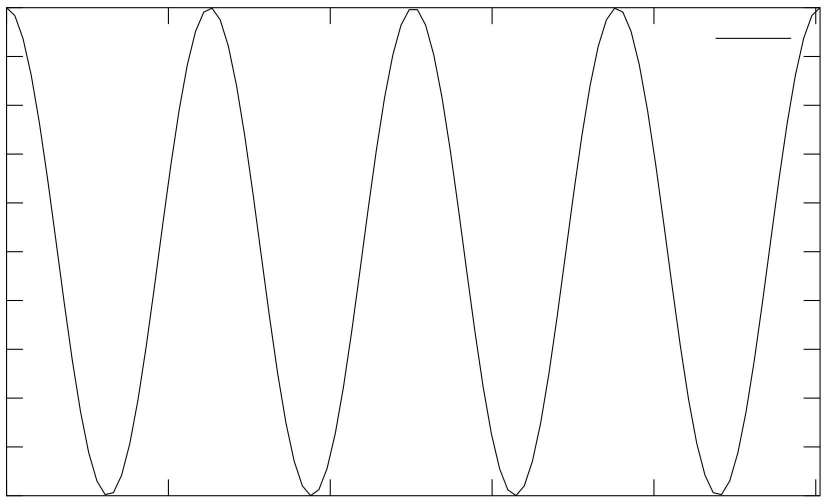

Figure 3: Moto sinusoidale.

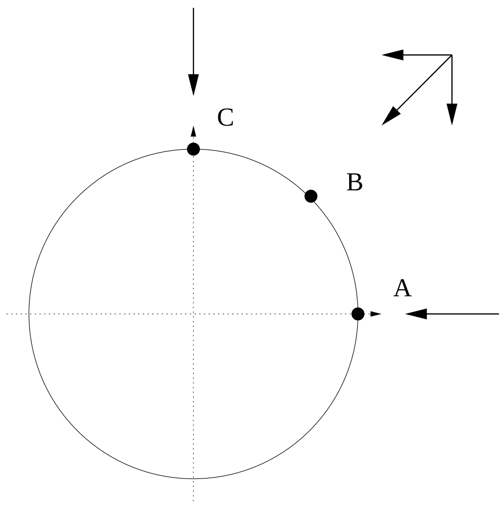

Figure 4: In un moto circolare, benché l'accelerazione sia sempre diretta verso il centro le sue componenti variano. Nel punto A è diversa da zero la sola componente x all'opposto di quanto accade in C. In B sono diverse da zero entrambe le componenti.

4. In figura 4 sono evidenziati tre particolari posizioni durante un moto circolare. Come abbiamo discusso nella lezione sul moto circolare, l'accelerazione è sempre diretta verso il centro della circonferenza. Nella figura ciò è evidenziato per le tre posizioni mediante una freccia. Le componenti dell'accelerazione, cioè le sue proiezioni sugli assi delle x e delle y variano durante il moto. Ad esempio in A, l'accelerazione è diretta lungo l'asse delle x, che coincide, in questa posizione con la direzione radiale. È evidente che nel punto B la direzione radiale è mutata e l'accelerazione ha componenti sia lungo l'asse delle x che in quello delle y. A noi qui interessa la proiezione lungo l'asse delle x, dato che questo è il moto che stiamo esaminando. Notiamo che nel punto A si ha il massimo spostamento nel moto lungo l'asse delle x, mentre nel punto C lo spostamento è nullo. Nella posizione B intermedia, il valore dello spostamento è compreso tra il 0 e il valore massimo. L'accelerazione lungo l'asse delle x segue un'evoluzione temporale analoga. Nel punto A è massima ed ha un segno opposto a quello dello spostamento, mentre in C è nulla corrispondentemente ad uno spostamento nullo.

4 Trattazione matematica del moto armonico

La proprietà del moto armonico discussa nel paragrafo precedente può essere derivata matematicamente. A tale scopo consideriamo un intervallo di tempo τ. La velocià media tra il tempo t e quello $t+\tau$ è

$$v(t) = \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}. \tag{6}$$

Usando la forma del moto armonico (5) abbiamo

$$v(t) = \frac{\cos(\omega(t+\tau)) - \cos(t)}{\omega\tau}. \tag{7}$$

Dalla trigonometria sappiamo che

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

che applicata alla (7) conduce a

$$v(t) = \frac{1}{\tau}\left(\cos(\omega t)\cos(\omega\tau) - \sin(\omega t)\sin(\omega\tau) - \cos(\omega t)\right).$$

Vogliamo ora considerare questa formula quando l'intervallo di tempo τ tende a zero. In appendice mostriamo che la funzione seno quando l'argomento tende a zero può essere approssimata dal suo argomento, cioè

$$\sin(\alpha) \approx \alpha, \quad \text{quando} \quad \alpha \ll 1, \tag{8}$$

mentre la funzione coseno tende a 1, cioè

$$\cos(\alpha) \approx 1, \quad \text{quando} \quad \alpha \ll 1, \tag{9}$$

Se usiamo queste formule si ottiene

$$\begin{aligned} v(t) &\approx \frac{1}{\tau}\left(\cos(\omega t) - \omega\tau \sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right) \\ v(t) &= -\omega \sin(\omega t). \end{aligned} \tag{10}$$

Procedendo in modo analogo possiamo derivare l'accelerazione

$$\begin{aligned} a(t) &= -\frac{\omega}{\tau}\left(\sin(\omega t + \omega\tau) - \sin(\omega t)\right) \\ &= -\frac{\omega}{\tau}\left(\sin(\omega t)\cos(\omega\tau) + \cos(\omega t)\sin(\omega\tau) - \sin(\omega t)\right) \\ &\approx -\frac{\omega}{\tau}\left(\sin(\omega t) + \omega\tau\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{11}$$

5 Legge di Hook

Torniamo alla fisica per discutere le forze elastiche. Consideriamo una molla. Sappiamo che, quando allungata, la molla esercita una forza di richiamo. Tale forza di richiamo dipende dall'entità dell'allungamento cui è stata sottoposta la molla. Hook trovò che per allungamenti non troppo elevati, la forza di richiamo dipende linearmente dall'allungamento, cioè vale la relazione

$$F = -kx \tag{12}$$

dove k è una costante che dipende dalle caratterisitche della molla. Il segno meno nella (12) indica che la forza di richiamo è sempre esercitata in direzione opposta allo spostamento. Consideriamo ora il moto di un corpo di massa m attaccato ad una molla come mostrato in figura 5. Se usiamo la legge di Hook nella II legge del moto otteniamo

$$-kx = ma \tag{13}$$

cioè che il moto prodotto da una forza elastica deve avere un'accelerazione proporzionale e di segno opposto allo spostamento. Tale proprietà è proprio quella soddisfatta dal moto armonico.

A Formula limite

Consideriamo nella figura 2, l'arco di circonferenza s corrispondente all'angolo α. Deve valere la proporzione

$$s : \alpha = 2\pi R : 2\pi$$

da cui

$$s = R\alpha.$$

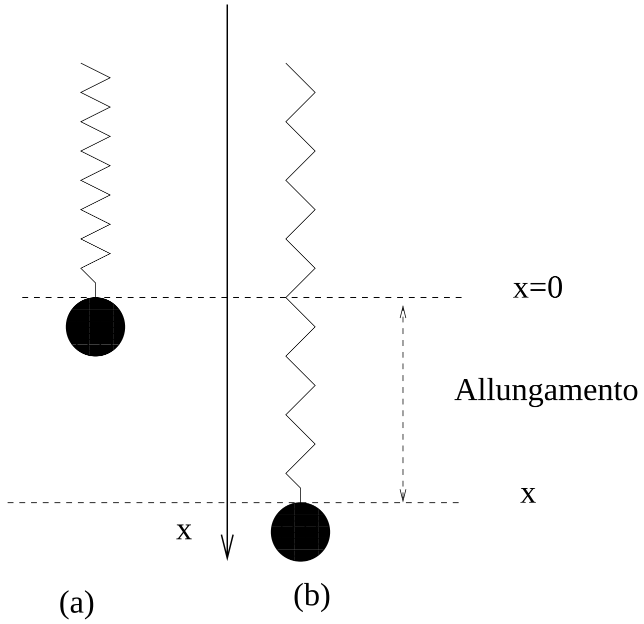

Figure 5: Un corpo di massa m attaccato ad una molla. In (a) la posizione della molla è a riposo. In (b) la molla è allungata.

Per la definizione di funzione seno si ha

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{R}.$$

Quando l'angolo α è piccolo si ha $s \approx y$ che implica

$$\sin(\alpha) \approx \alpha.$$

Nello stesso spirito si ha $x \approx R$, cioè $\cos(\alpha) \approx 1$.