6. Moto in due dimensioni

1 Vettori

Per descrivere il moto in un piano, in analogia con quanto abbiamo fatto per il caso del moto in una dimensione, è utile usare una coppia di assi cartesiani, come illustrato in figura 1. I due assi, convenzionalmente chiamati asse delle x e delle y, hanno in comune l'origine O. Un punto generico del piano è individuato da una coppia di numeri x ed y che sono dati dalla distanza dall'origine O dei piedi delle perpendicolari tracciate dal punto P sugli assi stessi. Il segmento $\overline{OP}$ è detto raggio vettore del punto P. Come un qualsiasi vettore è rappresentato da una *freccia* che parte dall'origine e termina nel punto P. I vettori sono necessari ogni volta che per una data grandezza fisica dobbiamo specificare non solo il valore della sua entità ma anche la direzione e il verso. Si stabilisce che la *lunghezza* del vettore indica la sua entità. Nell'esempio della figura 1 il raggio vettore, d'ora in poi indicato con $\mathbf{r}$, descrive lo spostamento del punto P rispetto all'origine. La lunghezza della freccia si indica con il simbolo $|\mathbf{r}|$ ed è anche detta modulo del vettore. Il modulo ci dice quanto lontano è P da O. Non ci dice però da che parte si trova P rispetto ad O. Per specificare questa informazione introduciamo l'angolo α formato dal vettore con l'asse delle x. L'informazione data dal modulo del vettore e dall'angolo α è equivalente a quella data assegnando i valori delle coordinate del punto P. Infatti il modulo del vettore si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di vertici ONP

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Usando la trigonometria la tangente dell'angolo α è determinata da

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Rimandiamo all'appendice per il significato delle funzioni trigonometriche elementari. In sintesi un vettore può essere descritto in due modi: a) dando il valore del modulo e l'angolo che forma con l'asse delle x; b) dando le coordinate del suo punto estremo P. Molte grandezze fisiche hanno una natura vettoriale. Oltre al raggio vettore $\mathbf{r}$ che indica la posizione di un punto materiale, sono grandezze vettoriali la velocità, l'accelerazione e la forza agente su corpo.

2 Moto circolare

Per rendersi conto della natura vettoriale della velocità, consideriamo il moto circolare uniforme, cioè un moto circolare a velocità costante. Tale moto è illustrato in figura 2. Durante il moto, il vettore velocità $\mathbf{v}$ mantiene costante il suo modulo, ma cambia continuamente la sua direzione e verso. Sia v il modulo della velocità. Vogliamo determinare il modulo del vettore accelerazione. Osserviamo che il vettore velocità è sempre tangente alla circonferenza come si

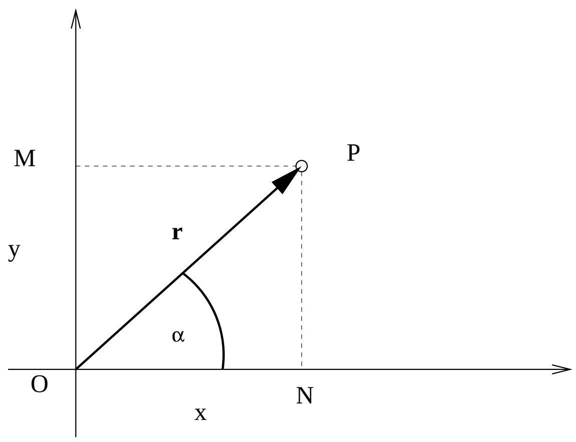

Figure 1: In un piano un punto P è individuato dalle coordinate x ed y. Queste corrispondono ai segmenti $\overline{ON}$ e $\overline{OM}$. Il segmento $\overline{OP}$ è detto raggio vettore del punto.

può vedere in figura 2. Consideriamo il vettore velocità nei due punti P e Q e supponiamo che il tempo impiegato per andare da P a Q sia τ. Per determinare l'accelerazione, trasportiamo il vettore velocità del punto P nel punto Q, come illustrato. L'angolo tra i vettori velocità al tempo $t = 0$ e al tempo $t = \tau$ è lo stesso angolo α formato dai raggi vettori tracciati dall'origine O ai punti P e Q. Il vettore $\mathbf{w}$ che unisce l'estremità del vettore velocità del punto P e l'estremità del vettore velocità nel punto Q rappresenta la variazione di velocità intercorsa nel tempo τ. Notiamo che l'accelerazione è puramente centripeta, cioè sempre diretta verso il centro della circonferenza. Infatti ad ogni istante il moto proseguirebbe lungo la direzione tangente se non ci fosse l'accelerazione verso il centro. Sottilineamo che al momento non discutiamo qual è la causa del moto circolare, ma soltanto la sua descrizione cinematica. Consideriamo i due triangoli isoscele OPQ e quello formato dai vettori velocità. In base ai teoremi sui triangoli simili, cioè aventi angoli uguali, il rapporto tra la corda s ed il raggio è pari al rapporto tra w e v, cioè

$$\frac{s}{R} = \frac{w}{v}. \tag{3}$$

Se ora consideriamo un intervallo di tempo τ molto piccolo, i due punti P e Q si trovano molto vicini. In queste condizioni l'arco di circonferenza tra P e Q può essere approssimato dalla corda s e quindi si ha

$$v = \frac{s}{\tau}. \tag{4}$$

Se definiamo il modulo dell'accelerazione $a = w/\tau$, usando (3) e (4) si ha

$$a = \frac{w}{\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{vs}{R} = \frac{v^2}{R}. \tag{5}$$

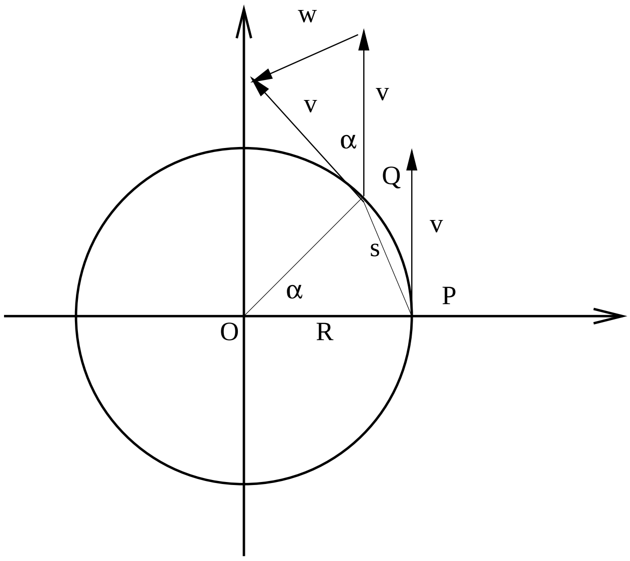

Figure 2: Moto circolare uniforme in senso antiorario. Nel punto Q è riportato il vettore velocità del punto P. w è la variazione di velocità. s è la corda tra i punti P e Q.

Questa è la legge del moto circolare uniforme. Introduciamo la velocità angolare ω come l'angolo spazzato nell'unità di tempo. Sia T il tempo impiegato a fare un giro completo. Allora deve essere

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{6}$$

D'altro canto la velocità deve essere

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R. \tag{7}$$

Questa relazione connette la velocità lineare a quella angolare attraverso il raggio.

Applichiamo la legge (5) al caso in cui la causa dell'accelerazione centripeta sia la forza gravitazionale. Immaginiamo cioè un punto materiale di massa m in un'orbita circolare intorno ad un altro corpo di massa M. In base alla II legge del moto e alla legge della gravitazione universale si ha

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}. \tag{8}$$

Esprimendo v in termini del periodo si ottiene

$$R^3 = \frac{GM}{(2\pi)^2}T^2. \tag{9}$$

Questa relazione non è altro che la legge di Keplero che mette in relazione il raggio dell'orbita con il periodo di tempo necessario a percorrerla. La (9) è scritta per il caso semplice di un'orbita circolare. D'altro canto la circonferenza è un caso limite dell'ellissi ed è quindi plausibile che una relazione simile alla (9) valga per le orbite ellittiche. In effetti è proprio così, anche se nel caso dell'ellissi la trattazione geometrica è leggermente più complicata. Le orbite dei pianeti intorno al sole sono in generale delle orbite ellittiche e Keplero trovò la legge (9) considerando i dati delle osservazioni astronomiche. Il fatto che questa legge, ricavata sperimentalmente da osservazioni astronomiche, sia deducibile dalle leggi del moto e dalle legge della gravitazione universale, costituisce una spettacolare conferma della teoria newtoniana.

A Funzioni trigonometriche

Consideriamo, come illustrato in figura 3, un sistema di assi cartesiani. In questo sistema consideriamo un circonferenza di raggio unitario. Un generico punto P sulla circonferenza è univocamente determinato dall'angolo α formato dal segmento $\overline{OP}$ e l'asse delle x. Le coordinate x ed y di P sono chiamate coseno e seno dell'angolo α e si indicano

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha. \tag{10}$$

Per il teorema di Pitagora deve valere $x^2 + y^2 = 1$ che implica

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{11}$$

Questa è la relazione fondamentale della trigonometria e ci dice che seno e coseno di un angolo non sono indipendenti. La funzione tangente è definita in termini del rapporto tra seno e coseno

$$\tan\alpha \equiv \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}. \tag{12}$$

I valori del seno e del coseno per tutti gli angoli compresi tra 0^0 e 360^0 sono stati calcolati e oggi sono generalmente disponibili in un comune calcolatore tascabile.

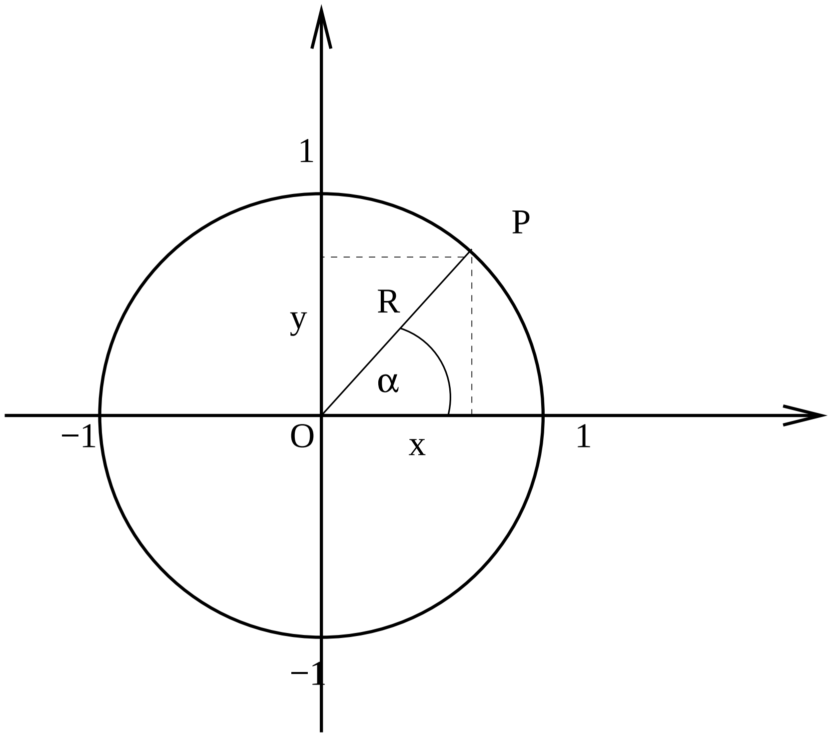

Figure 3: Definizione della funzione seno e coseno di un angolo.