

3. Moto accelerato

1 Moti accelerati

Il moto uniforme, caratterizzato da una retta nel sistema di assi cartesiani, si svolge a velocità costante. Tutti i moti nei quali la velocità varia sono moti non uniformi. Nella figura 1 ci sono tre esempi. Nel I moto ad un certo tempo la velocità cambia bruscamente ad un valore più basso. Nel II moto avviene il contrario. Esistono infiniti tipi di moti accelerati a seconda di come varia la velocità. Negli esempi I e II della figura 1, il moto accelerato è una composizione di due moti uniformi. In questi moti la variazione di velocità avviene una volta sola. Nel III moto la variazione di velocità avviene continuamente. La linea retta tangente in un dato punto (ad esempio la linea tratteggiata in figura) rappresenta la velocità istantanea del moto. I moti uniformi sono caratterizzati dal solo parametro della velocità. I moti accelerati richiedono infiniti parametri che possono essere pensati come le velocità istantanee. È utile a questo punto introdurre il concetto di accelerazione definita come la variazione di velocità per unità di tempo. Ci dedichiamo ora allo studio dei moti accelerati più semplici.

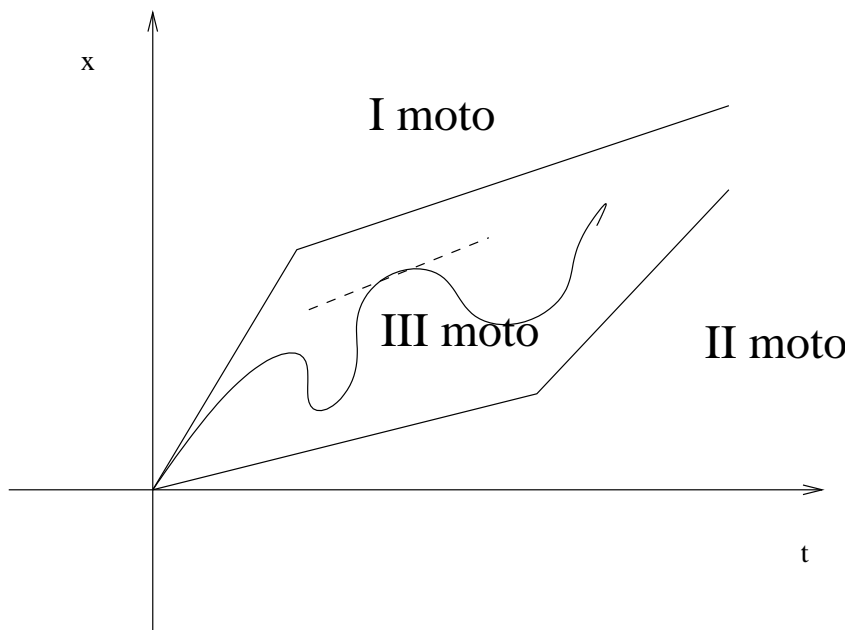


Figure 1: Rappresentazione di moti accelerati.

2 Moto uniformemente accelerato

Consideriamo il seguente moto. All'istante $t = 0$ un punto materiale si muove con velocità costante v_{in} , dove v_{in} è la velocità iniziale. Sia τ un intervallo di tempo di valore assegnato. Consideriamo una successione di tempi $t_n = n\tau$ con $n = 1, 2, 3, \dots$. Stabiliamo che ad ogni t_n , cioè ad intervalli di durata τ , la velocità del punto materiale incrementa della quantità w . Quindi al tempo t_1 la velocità diventa $v_1 = v_{in} + w$, al tempo t_2 $v_2 = v_{in} + 2w$, e così via. Ci chiediamo quale velocità e quale spazio percorso caratterizzano il punto materiale dopo N intervalli di tempo di durata τ ciascuno. Si ha per i vari intervalli

$$t_1 = \tau, \quad v_1 = v_{in} + w, \quad x_1 = v_{in}\tau,$$

$$t_2 = 2\tau, \quad v_2 = v_{in} + 2w, \quad x_2 = v_{in}\tau + v_1\tau,$$

$$t_3 = 3\tau, \quad v_3 = v_{in} + 3w, \quad x_3 = v_{in}\tau + v_1\tau + v_2\tau,$$

e dopo N intervalli

$$t_N = N\tau, \quad v_N = v_{in} + Nw, \quad x_N = (v_{in} + v_1 + v_2 + \dots + v_{N-1})\tau,$$

in modo che la velocità finale è

$$v_{fin} \equiv v_N = v_{in} + Nw. \quad (1)$$

Lo spazio percorso è pari a

$$\begin{aligned} x_{fin} \equiv x_N &= (v_{in} + v_1 + v_2 + \dots + v_{N-1})\tau \\ &= (v_{in} + v_{in} + w + v_{in} + 2w + \dots + v_{in} + (N-1)w)\tau \\ &= v_{in}N\tau + (1 + 2 + 3 + \dots + N-1)w\tau \\ &= v_{in}t_{fin} + (1 + 2 + 3 + \dots + N-1)w\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

L'equazione (2) ha due termini. Il primo rappresenta lo spazio percorso se il punto materiale non avesse cambiato velocità. Il secondo termine rappresenta lo spazio percorso in virtù dell'aumento di velocità. Per calcolarlo devo sapere quanto vale la somma dei primi $N-1$ numeri. Come spiegato in appendice la somma dei primi k numeri vale

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (3)$$

Nel caso in esame dobbiamo porre $k = N-1$, in modo che la (2) diventa

$$x_{fin} = v_{in}t_{fin} + \frac{1}{2} \frac{w}{\tau} (N\tau)^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right). \quad (4)$$

Supponiamo ora che τ sia preso molto piccolo, ma lasciamo t_{fin} , il tempo finale invariato. È chiaro che il numero di intervalli N deve aumentare. Se N è

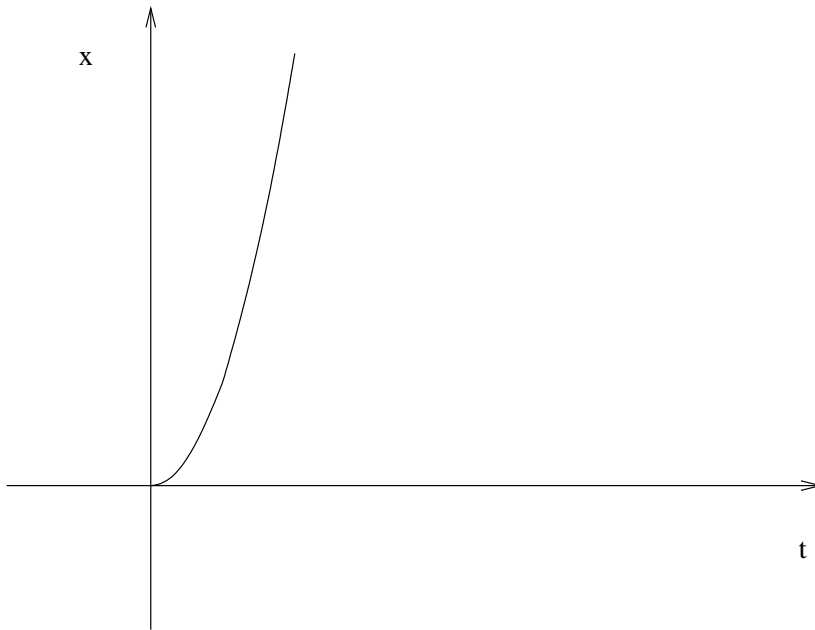


Figure 2: Rappresentazione di un moto uniformemente accelerato.

grande, il termine $1/N$ nella (4) diventa piccolo. Definiamo l'accelerazione ad ogni intervallo come la variazione di velocità in un intervallo, cioè

$$a = \frac{w}{\tau}. \quad (5)$$

Consideriamo la situazione limite nella quale N è molto grande, tendente all'infinito, mentre τ è molto piccolo, tendente a zero. In questo caso l'accelerazione a nella (5) definisce l'accelerazione istantanea ed è costante durante il moto. In questa situazione la (4) diventa

$$x_{fin} = v_{in}t_{fin} + \frac{1}{2}at_{fin}^2. \quad (6)$$

L'equazione (6) definisce il moto uniformemente accelerato. Nel sistema di assi cartesiani tale moto è rappresentato da una parabola come si mostra in figura 2.

3 Caduta libera

Un caso importante di moto uniformemente accelerato è quello della caduta libera di un grave, cioè di un qualunque oggetto dotato di peso. Per caduta libera si intende il lasciar andare da una certa altezza un corpo senza dargli alcuna spinta iniziale. Se trascuriamo l'effetto della resistenza dell'aria, è un

fatto sperimentalmente accertato che tutti i corpi, per effetto della attrazione terrestre, cadono seguendo un moto uniformemente accelerato, dove la cosiddetta accelerazione di gravità vale

$$g = 9,8m/s^2. \quad (7)$$

Galileo verificò questo fatto lasciando cadere due palle di cannone di peso diverso dalla torre di Pisa.

A Regola di Gauss per la somma dei primi k numeri

Ordiniamo i primi k numeri (supponiamo k pari) nel modo indicato.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & k/2 \\ k & k-1 & k-3 & \dots & k/2+1 \\ \hline k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k+1. \end{array}$$

Sommiamo il primo numero con l'ultimo, il secondo con il penultimo, il terzo con il terzultimo e via discorrendo. Tutte queste somme parziali sono pari a $k+1$. Di tali somme ne abbiamo $k/2$ per cui si ricava

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Se k è dispari, allora $k-1$ è pari, per cui

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = (1 + 2 + 3 + \dots + k-1) + k = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

come nel caso di k pari.