

2. Il paradosso di Zenone

1 Il paradosso nella fisica newtoniana

In un'immaginaria gara di corsa, Achille concede alla tartaruga un vantaggio iniziale di cento metri. Poichè Achille è dieci volte più veloce della tartaruga, si chiede in quanto tempo Achille riuscirà a raggiungere la tartaruga. Zenone argomenta che in un primo lasso di tempo Achille colmerà lo svantaggio iniziale di cento metri. In questo stesso lasso di tempo, d'altro canto, la tartaruga percorre una distanza di dieci metri. A questo punto Achille si trova di nuovo in svantaggio. Il ragionamento può essere ripetuto. In un altro lasso di tempo Achille percorre i dieci metri di svantaggio, ma nel frattempo la tartaruga si è portata avanti ancora di un metro. Il ragionamento può essere reiterato all'infinito e si giunge alla conclusione paradossale che Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

Prima di esaminare dove è errato il ragionamento di Zenone, vediamo come si risolve questo problema utilizzando la fisica newtoniana. Supponiamo che Achille corra con velocità costante v_A , cioè svolga un moto uniforme. La legge oraria del moto di Achille è quindi

$$x_A = v_A \cdot t. \quad (1)$$

Notiamo che al tempo iniziale, $t = 0$, l'equazione precedente dà $x_A = 0$ per la posizione di Achille come deve essere. Inoltre la natura uniforme del moto si esprime attraverso la proporzionalità diretta tra tempo e spazio percorso. Per il moto della tartaruga ragioniamo in modo analogo. La corrispondente legge oraria è

$$x_T = v_T \cdot t + d_0, \quad (2)$$

dove v_T indica la velocità della tartaruga e d_0 il vantaggio iniziale di questa. È utile rappresentare le due leggi orarie in un diagramma cartesiano dove in ascisse è riportato il tempo e in ordinate lo spazio. Il moto di Achille corrisponde ad una retta passante per l'origine come mostrato nella figura 1. Il moto della tartaruga è invece una retta con intercetta diversa da zero. Il valore dell'intercetta è proprio il vantaggio iniziale d_0 . L'inclinazione della retta è la velocità: maggiore è la velocità e maggiore è l'inclinazione della retta. Nella figura vediamo infatti che la retta della tartaruga è meno inclinata di quella di Achille. Il punto di intersezione delle due rette rappresenta l'istante t^* e il punto x^* in cui Achille raggiunge la tartaruga. L'espressione esplicita di t^* e x^* può essere ottenuta dalle due leggi orarie (1,2), imponendo $x_A(t^*) = x_T(t^*) = x^*$,

$$v_A \cdot t^* = v_T \cdot t^* + d_0, \quad (3)$$

$$(v_A - v_T)t^* = d_0, \quad (4)$$

$$t^* = \frac{d_0}{v_A - v_T}, \quad (5)$$

$$x^* = v_A \cdot t^* = d_0 \frac{v_A}{v_A - v_T}. \quad (6)$$

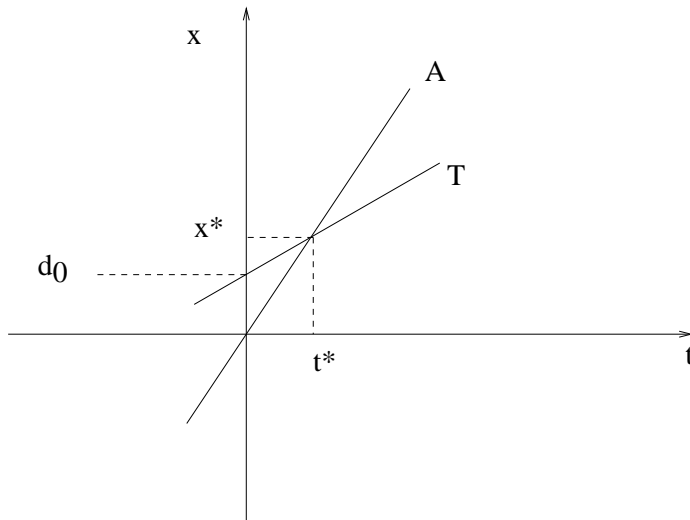


Figure 1: La retta passante per l'origine rappresenta il moto di Achille, mentre quella con intercetta pari a d_0 il moto della tartaruga.

2 Intermezzo matematico: la serie geometrica

Dall'algebra elementare richiamiamo la formula

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n). \quad (7)$$

Se poniamo $a = 1$, la formula precedente può essere riscritta

$$1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1} + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}. \quad (8)$$

Ci chiediamo cosa succede a questa formula quando n diventa grande e tende all'infinito. Se $n \rightarrow \infty$, il membro di sinistra della (8) diventa una somma con infiniti addendi. È chiaro che se $b \geq 1$ tale somma diventa infinita. D'altro canto, se $b < 1$, anche se il numero di addendi è infinito, ogni addendo successivo è più piccolo del precedente. Allora nel limite di n infinito, la somma di infiniti termini può tendere ad un valore finito. Tale valore finito può essere desunto dal membro di destra della (8). A tale scopo basta notare che, per $b < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0. \quad (9)$$

La formula (8) diventa quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1 - b}. \quad (10)$$

3 Soluzione del paradosso

Torniamo al paradosso di Zenone ed esaminiamo il suo ragionamento un po' più da vicino. Indichiamo con x_0 il vantaggio iniziale della tartaruga. Il primo lasso di tempo in cui Achille percorre una distanza pari a x_0 è evidentemente

$$t_0 = \frac{x_0}{v_A}, \quad (11)$$

durante il quale la tartaruga percorre l'ulteriore distanza x_1 pari a

$$x_1 = v_T \cdot t_0 = v_T \cdot \frac{x_0}{v_A}. \quad (12)$$

A questo punto Achille deve colmare il nuovo svantaggio di x_1 e lo fa in un altro lasso di tempo di durata t_1 pari a

$$t_1 = \frac{x_1}{v_A} = \frac{x_0}{v_A} \cdot \frac{v_T}{v_A}. \quad (13)$$

È chiaro che, seguendo Zenone, possiamo iterare il ragionamento. Scopriamo quindi che la durata del lasso di tempo $n + 1$ -esimo, t_n durante il quale Achille percorre la distanza x_n è data da

$$t_n = \frac{x_0}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n. \quad (14)$$

La soluzione del paradosso consiste nel fatto che, benchè il numero di lassi di tempo in cui Achille raggiunge la tartaruga sia infinito, in accordo con quanto argomenta Zenone, la durata di ciascun lasso diminuisce rispetto a quella del lasso precedente. Tale diminuzione è precisamente controllata dal rapporto tra la velocità della tartaruga e quella di Achille. Il tempo t^* necessario ad Achille per raggiungere la tartaruga si ottiene sommando l'infinito numero di lassi di tempo di durata via via decrescente, cioè

$$t^* = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots \quad (15)$$

$$= \frac{d_0}{v_A} \left(1 + \frac{v_T}{v_A} + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n + \dots \right) \quad (16)$$

$$= \frac{d_0}{v_A} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k \quad (17)$$

$$= \frac{d_0}{v_A} \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} \quad (18)$$

$$= \frac{d_0}{v_A - v_T}, \quad (19)$$

risultato che coincide con quello precedentemente trovato. Notiamo che per arrivare al risultato finale abbiamo utilizzato la formula (10) per sommare

il numero infinito di intervalli di tempo. L'origine del paradosso è dunque nell'assumere, implicitamente, che un numero infinito di lassi di tempo implica un tempo infinito. Questo sarebbe vero se tutti i lassi di tempo avessero la stessa durata. Abbiamo invece visto che i lassi di tempo sono sempre più piccoli ed è quindi possibile sommarne un numero infinito. Abbiamo ottenuto questo risultato utilizzando la serie geometrica della formula (10), di cui abbiamo dato una dimostrazione elementare. Esiste comunque, nell'ambito dell'analisi matematica, una teoria generale delle serie numeriche e delle condizioni nelle quali ammettono un risultato finito.