

19. Le trasformazioni di coordinate spazio-temporali nella teoria della relatività ristretta

1 Le trasformazioni di Galileo

Consideriamo per semplicità un moto unidimensionale. Come abbiamo più volte sottolineato, il moto è descritto una volta noto il valore della coordinata x ad un dato tempo t . La coppia di valori x e t costituisce un *evento*. Graficamente possiamo rappresentare il moto in un sistema di assi cartesiani come mostrato in figura 1. La retta di equazione

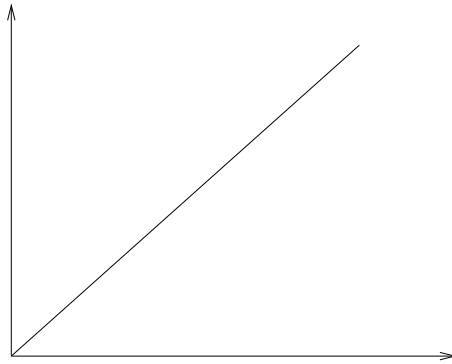


Figura 1: In figura l'asse delle ascisse descrive lo spazio (x), mentre quello delle ordinate il tempo (t). La retta in figura rappresenta un moto con velocità v ed ha quindi equazione $t = x/v$.

$t = x/v$ rappresenta il moto di un punto che al tempo $t = 0$ si trova nella posizione $x = 0$. La retta è anche detta *linea di universo* del punto. Una linea di universo è una successione di eventi, cioè di punti nel diagramma spazio-tempo. Nel rappresentare il moto in un piano cartesiano (x, t) abbiamo scelto un sistema di riferimento. Il principio di relatività afferma che tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro sono equivalenti. Supponiamo allora di avere due sistemi K e K'. K è il sistema in *quiete*, mentre K' è quello in *moto* con velocità v rispetto a K.

Supponiamo che al tempo $t = 0$ le origini dei due sistemi K e K' coincidano. In modo analogo alle coordinate (x, t) di un evento osservato da K, indichiamo con (x', t') le coordinate dello stesso evento quando visto da K'. La trasformazione di Galileo, che

stiamo per discutere, ci permette di ottenere la coppia (x', t') una volta nota la coppia (x, t) e viceversa.

L'origine del sistema K è ovviamente ferma in K. La sua linea di universo è proprio l'asse delle t in K stesso. Analogamente l'origine di K' è ferma in K'. L'origine di K' vista da K è però in moto con velocità v . Allora la linea di universo dell'origine di K' vista da K descrive l'asse delle t' visto da K, come mostrato nella figura 2. Allora la

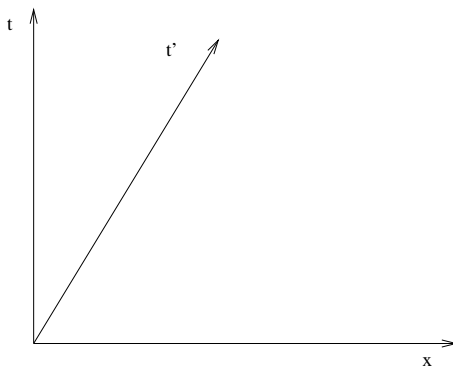


Figura 2: L'asse dei tempi di K', cioè delle t' ha equazione, in K, $t = x/v$.

retta di equazione $t = x/v$ descrive l'asse dei tempi di K' rispetto a K. Qualunque punto spaziale che sia solidale con K', avrà come linea di universo, rispetto a K, una retta parallela all'asse delle t' . In sintesi, l'asse dei tempi di K', visto da K, appare inclinato rispetto all'asse dei tempi di K.

Bisogna ora chiedersi come appare l'asse delle posizioni di K' visto da K. A tale scopo osserviamo che due eventi che si trovino sull'asse delle posizioni sia in K che in K', sono per definizione eventi *simultanei* in quanto hanno la stessa coordinata temporale. Ad esempio, due punti che abbiano coordinata spaziale x_1 e x_2 rispettivamente e stessa coordinata temporale $t = 0$ in K, corrispondono a due eventi simultanei in K ed accadenti al tempo $t = 0$. Secondo Newton, questa relazione di simultaneità è assoluta, cioè non dipende dal sistema di riferimento. Ciò implica che l'asse delle ascisse di K', visto da K, deve coincidere con l'asse delle ascisse di K. Si ha allora la situazione mostrata in figura 3. Consideriamo infatti un evento P (un punto nel diagramma cartesiano spazio-tempo) e tracciamo da esso le parallele agli assi delle posizioni e dei tempi in K. I punti dove tali parallele incontrano gli assi stessi individuano le coordinate x e t in K dell'evento in questione. Ripetiamo la stessa procedura relativamente agli assi delle posizioni e dei tempi di K', come visti da K. Notiamo che per effettuare tale procedura non è necessario che gli assi siano ortogonali tra loro. In particolare, gli assi x' e t' di K' appaiono non ortogonali se visti dal sistema K. L'intersezione della retta tracciata da P e parallela all'asse delle posizioni di K', individua un evento che in K' è simultaneo all'evento P. Poiché questi due eventi si trovano su una retta che è parallela anche all'asse delle posizioni di K (come è logico aspettarsi dato che gli assi delle posizioni sono paralleli nei due sistemi), ne segue che i due eventi sono simultanei anche in K,

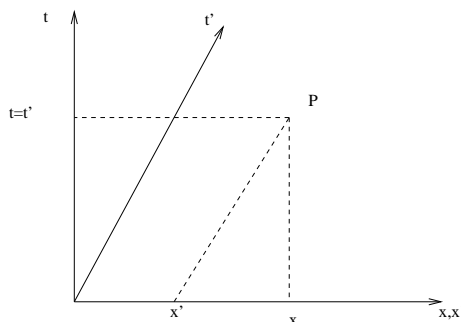


Figura 3: La relazione tra le coordinate spazio-temporali in K e quelle in K' relativamente ad un evento P secondo la meccanica newtoniana e galileana.

cioè il tempo misurato nei due sistemi deve essere lo stesso, $t = t'$. È facile poi rendersi conto attraverso semplici ragionamenti geometrici che la differenza tra x e x' è pari alla distanza percorsa dall'origine di K' nel tempo t , a cui accade l'evento P. In sintesi otteniamo le trasformazioni di Galileo, cioè

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{1}$$

Una conseguenza ben nota dell'eq.(1) è la legge di addizione delle velocità. Se in K' un punto materiale percorre una distanza x' nel tempo t' , ha una velocità $w' = x'/t'$. In K in un tempo t il punto percorre una distanza x ed ha quindi una velocità $w = x/t$. Dalla (1) segue che

$$w' = w - v \tag{2}$$

cioè in K' la velocità è maggiore o minore di quella di K a seconda se il verso di w è discorde o concorde con quello di v .

2 Le trasformazioni di Lorentz

La teoria della relatività ristretta mentre accetta il principio di relatività della meccanica classica, rifiuta il concetto di un tempo assoluto. Tale rifiuto è basato sull'evidenza sperimentale dell'invarianza della velocità della luce, c , rispetto a un cambiamento di sistema di riferimento. Tale invarianza non è in accordo con la (2). Il rifiuto del tempo assoluto si basa su un'analisi rigorosa del concetto di simultaneità di due eventi.

Poiché la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento (II postulato), possiamo in tutti i sistemi di riferimento definire l'unità di misura del tempo a partire da quella dello spazio. Se l'unità di misura delle lunghezze è il metro, adottiamo come unità di tempo la quantità di tempo necessaria alla luce a percorrere un metro. Risulta allora conveniente adottare su entrambi gli assi coordinati dello spazio tempo la stessa unità di misura (quella delle lunghezze). Ciò implica che sull'asse dei tempi riporteremo

la misura del tempo di un evento moltiplicata per la velocità della luce c . Nella figura 4 il sistema K ha dunque assi coordinati x e ct .

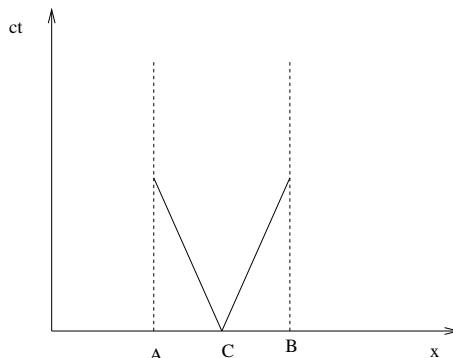


Figura 4: In figura sono mostrate le linee di universo di due raggi di luce che, al tempo $t = 0$, dal punto C si dirigono verso i due punti A e B, ciascuno distante L dal punto C.

Consideriamo due punti A e B che distano tra loro $2L$. Se al tempo $t = 0$ si emette un raggio di luce da un punto C a metà strada tra A e B, tale raggio raggiunge simultaneamente A e B dopo un tempo $\tau = L/c$. Allora i due eventi corrispondenti al raggio di luce che arriva in A e B sono simultanei quando siano visti nel sistema di riferimento di K. Notiamo che tale affermazione di simultaneità si basa sul fatto che i due punti sono fermi in K e che conosciamo la velocità della luce c . Supponiamo ora che i due punti non sono fissi in K, ma che lo sono in K'. I due punti A e B, visti da K, si muovono come mostrato in figura 5. L'asse dei tempi di K' ha equazione $ct = (c/v)x$ o anche

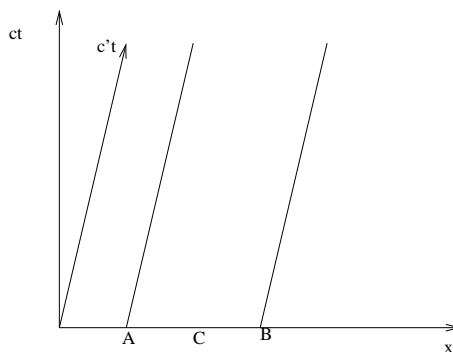


Figura 5: Le linee di universo, viste da K, dell'origine di K' (asse delle $c't$) e dei punti A e B, solidali con K'.

$ct = x/\beta$, dove $\beta = v/c$ è un parametro che useremo spesso nel seguito. Se al tempo $t = 0$ un raggio di luce parte da C verso A e B, è chiaro che tale raggio di luce arriva prima in A che in B. Infatti mentre A si muove verso il raggio di luce, B se ne allontana.

Per un osservatore solidale con K, il raggio di luce arriva in A al tempo t_A . Nel tempo t_A , la luce percorre una distanza ct_A . Tale distanza è pari a L (la distanza tra A e C) diminuita della distanza percorsa da A nel tempo t_A , cioè

$$ct_A = L - vt_A$$

da cui

$$t_A = \frac{L}{c+v} = \frac{L}{c} \frac{1}{1+\beta} = \frac{\tau}{1+\beta}. \quad (3)$$

In modo analogo il raggio di luce arriva in B al tempo t_B

$$t_B = \frac{\tau}{1-\beta}. \quad (4)$$

Notiamo che $t_A < \tau$, mentre $t_B > \tau$. Dunque i due eventi dell'arrivo in A e B del raggio di luce non sono simultanei se visti da K, mentre lo sono, per il principio di relatività, se visti da K'. Infatti i due eventi visti da K' descrivono esattamente la stessa situazione quando i due punti A e B erano fissi in K nel primo esempio considerato. Per l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento le considerazioni svolte per il sistema K devono essere applicabili nello stesso modo per il sistema K'. Indichiamo con A' e B' le posizioni, nel diagramma (x, ct) , di A e B quando sono raggiunti dai raggi di luce, come mostrato nella figura 6. La retta nel diagramma (x, ct) passante per i punti A'

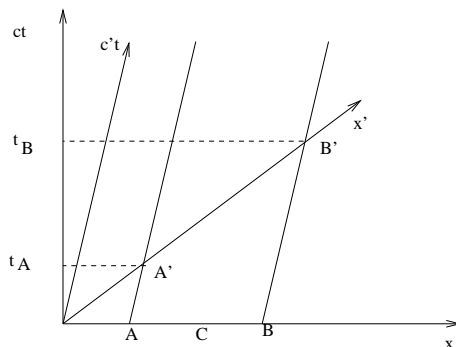


Figura 6: I due eventi, corrispondenti all'arrivo del raggio di luce in A e B, come visti da K.

e B' individua l'asse delle posizioni del sistema di riferimento K' visto da K. Tale asse passa per l'origine e quindi ha equazione $ct = \alpha x$ dove il coefficiente angolare α dipende dal rapporto delle differenze dei tempi e delle posizioni dei punti A' e B'. Si ha

$$A' = (x_A + vt_A, ct_A), \quad B' = (x_B + vt_B, ct_B)$$

da cui

$$\alpha = \frac{c(t_B - t_A)}{x_B - x_A + v(t_B - t_A)} = \frac{2\tau\beta c}{1 - \beta^2} \frac{1}{2L + v \frac{2\tau\beta}{1 - \beta^2}} = \beta. \quad (5)$$

Riassumendo, gli assi di K' visti da K hanno equazione:

$$\text{asse } x' : ct = \beta x; \quad \text{asse } ct' : ct = \frac{1}{\beta}x. \quad (6)$$

Se la velocità della luce fosse infinita, allora si avrebbe $\beta = 0$. In tal caso l'asse delle posizioni di K' coinciderebbe con l'asse delle posizioni di K , come avviene nella meccanica newtoniana. In figura 7 è riassunto il contenuto dell'equazione (6). Il problema è ora di

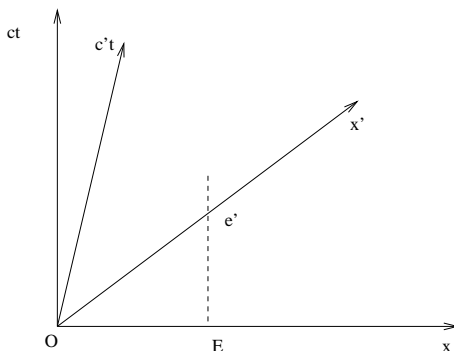


Figura 7: Regolo di K visto da K' .

capire come una misura di posizione o tempo in K' è connessa a quella in K . Supponiamo che il segmento \overline{OE} rappresenti l'unità di misura in K per le lunghezze, cioè \overline{OE} sia un regolo rigido di lunghezza 1 metro. Come giudichiamo tale lunghezza se ci troviamo in K' che si muove rispetto a K . Dobbiamo misurare, simultaneamente, la posizione degli estremi del regolo, cioè di O e di E . A tale scopo dobbiamo tracciare le linee di universo di O e di E ed individuare le rispettive intersezioni con l'asse delle posizioni di K' , poiché in K' tale asse rappresenta eventi simultanei (al tempo $t' = 0$).¹ In K le rette di universo per O ed E sono l'asse dei tempi e la retta passante per E parallela all'asse dei tempi. Nella figura 7 il segmento $\overline{Oe'}$ rappresenta il regolo unitario di K come visto da K' . Per brevità indichiamo con e' ed E i segmenti $\overline{Oe'}$ e \overline{OE} . Il segmento $\overline{Ee'}$ ha lunghezza $E\beta$. Allora applicando il teorema di Pitagora al triangolo OEE' si ha

$$e' = E\sqrt{1 + \beta^2}. \quad (7)$$

Consideriamo, come in figura 8, il problema di come un regolo unitario in K' è visto da K . In K' le linee di universo di O ed E' sono l'asse dei tempi di K' ed una retta passante per E' e parallela all'asse dei tempi di K' , esattamente come in K . La retta parallela all'asse dei tempi di K' e passante per e ha equazione

$$ct = \frac{x - e}{\beta}. \quad (8)$$

¹Gli eventi simultanei ad un qualunque tempo t' sono individuati da una retta parallela all'asse delle x' .

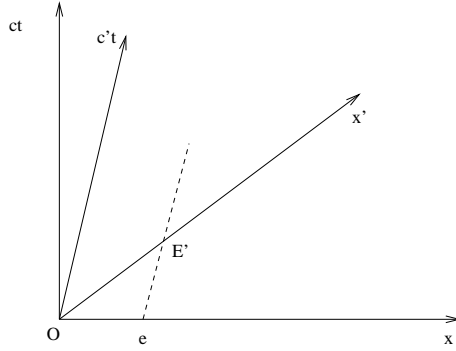


Figura 8: Regolo di K' visto da K .

Le coordinate del punto E' si ottengono dall'intersezione della (8) con l'asse delle posizioni di K' , cioè risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} ct &= \beta x \\ ct &= \frac{x - e}{\beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Risolvendo (9), il punto E' ha coordinate

$$E' = \left(\frac{e}{1 - \beta^2}, \frac{\beta e}{1 - \beta^2} \right)$$

da cui si trova che E' vale

$$E' = e \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{1 - \beta^2}. \quad (10)$$

Il numero e/E è il rapporto, in K , tra la lunghezza del regolo unitario di K' giudicato da K ed il regolo unitario di K . Il numero e'/E' è l'analoga quantità invertendo i ruoli di K e K' . In base al principio di relatività questi rapporti devono essere uguali, cioè

$$\frac{e}{E} = \frac{e'}{E'}. \quad (11)$$

Le relazioni (7,10-11) permettono di determinare il rapporto E/E' . Infatti dalla (11) si ha $E'e = e'E$ e moltiplicando la (10) per e , e la (7) per E , si ha

$$E^2 \sqrt{1 + \beta^2} = e^2 \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{1 - \beta^2},$$

cioè

$$e = E \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (12)$$

da cui

$$\frac{E}{E'} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}. \quad (13)$$

La (13) è il rapporto delle unità di misura nei due sistemi K e K'. Inoltre la (12) descrive la cosiddetta contrazione relativistica delle lunghezze. Il regolo unitario di K' appare *più corto* se visto da K, in virtù del moto relativo di K e K'. Ovviamente anche il regolo unitario di K apparirà contratto quando visto da K'. Analoga contrazione dei regoli accade per la misura sull'asse dei tempi. Vediamo che cosa ciò comporta. Consideriamo due eventi in K' che accadono a tempi diversi. L'intervallo di tempo misurato in K' è, per esempio, due metri, cioè corrisponde al tempo necessario alla luce a percorrere due metri. Per la contrazione delle lunghezze in presenza di un moto relativo, tale intervallo di due metri in K', apparirà contratto in K. Poiché la velocità della luce è sempre la stessa, il tempo per percorrere un'intervallo contratto sarà inferiore a quello necessario per l'intervallo originario. In definitiva in K risulterà lo scorrimento di un intervallo di tempo inferiore rispetto a quello registrato in K'. Tale rallentamento del tempo è denominata dilatazione relativistica dei tempi.

Siamo ora in grado di derivare la trasformazione delle coordinate spazio-temporali tra i sistemi K e K'. Consideriamo ora in figura 9 un punto P qualsiasi. La distanza $\overline{Ox'}$

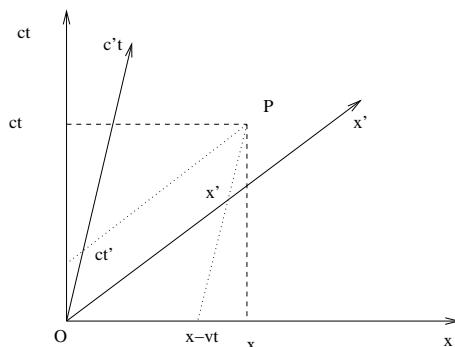


Figura 9: Coordinate di un punto P in K e K'.

misurata in K è analoga alla (10), cioè si ha

$$\overline{Ox'} = (x - vt)E \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{1 - \beta^2}.$$

Per avere $\overline{Ox'}$ misurata in K', cioè in unità E' , si ha

$$\overline{Ox'} = (x - vt) \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{1 - \beta^2} \frac{E}{E'} E' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} E'.$$

Concludiamo allora che la coordinata x' misurata in K' è legata al valore x e ct misurati in K da

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (14)$$

Ragionando in modo analogo per il tempo si trova

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15)$$

Le (14-15) sono le trasformazioni di Lorentz. Dividendo la (14) per la (15) e ponendo $w = x/t$ e $w' = x'/t'$ si ottiene la legge di trasformazione delle velocità

$$w' = \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}}. \quad (16)$$

Se poniamo $w = c$ nella (16) otteniamo $w' = c$, cioè la velocità della luce non cambia da K a K' . Se w, w' , e v sono velocità molto inferiori a c , allora la (16) è bene approssimata dalla (2), cioè dalla legge classica. La meccanica di Newton vale quindi quando le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità della luce.