17. Elettromagnetismo

1 Equazioni di Maxwell

Nelle lezioni precedenti abbiamo considerato i campi elettrico e magnetico statici, cioè abbiamo considerato fenomeni indipendenti dal tempo. I campi elettrico e magnetico sono vettoriali e in quanto tali sono definiti una volta che siano noti il flusso e la circolazione attraverso superfici e curve chiuse arbitrarie. Richiamiamo tali leggi. Per il campo elettrico si ha

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

$$\mathcal{C}_E = 0, \tag{2}$$

dove Φ_E è il flusso attraverso una superficie chiusa e q è la carica elettrica all'interno. $\mathcal{C}_E$ è la circolazione lungo un'arbitraria curva chiusa.

Per il campo magnetico si ha invece

$$\Phi_B = 0, \tag{3}$$

$$\mathcal{C}_E = \mu_0 I, \tag{4}$$

dove Φ_B è il flusso attraverso una superficie chiusa e I è la corrente che attraversa una superficie delimitata dalla curva lungo la quale è calcolata la circolazione. Le equazioni (1,2,3,4) devono essere modificate quando si prendono in considerazione fenomeni dipendenti dal tempo. Tali modifiche riguardano le equazioni (2) e (4). La modifica della (2) è dovuta a Faraday

$$\mathcal{C}_E = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}, \tag{5}$$

dove $\Delta\Phi_B$ rappresenta la variazione di flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la curva chiusa su cui si calcola la circolazione di $\mathbf{E}$. Tale variazione avviene nel tempo Δt. Tale intervallo deve essere preso abbastanza piccolo in modo che $\Delta\Phi_B/\Delta t$ rappresenti la velocità di variazione del flusso di $\mathbf{B}$. La (5) si può esprimere graficamente come mostrato nella figura 1 (a). Se in una regione dello spazio c'è una variazione delle linee di forza del campo magnetico $\mathbf{B}$, allora si generano delle linee di forza del campo elettrico $\mathbf{E}$, disposte come nella gura 1 (a). Dunque un campo magnetico variabile genera nelle sue vicinanze un campo elettrico. Tale fenomeno è detto induzione magnetica.

La modifica della (4) è dovuta a Maxwell

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}. \tag{6}$$

Il termine aggiuntivo, detto corrente di spostamento, può essere rappresentato come in 1 (b). Dunque un campo elettrico variabile genera un campo magnetico. Le equazioni (1,5,3,6) sono le celebri equazioni di Maxwell.

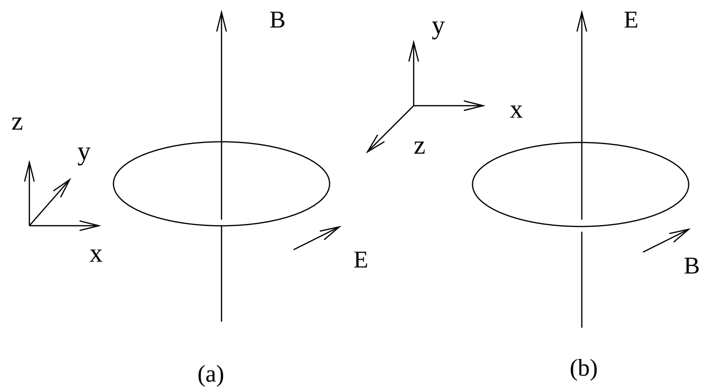

Figura 1: (a) Una linea di forza chiusa per il campo elettrico **E** è generata da una variazione del flusso del campo magnetico **B** concatenato con la linea di forza di **E**). (b) Lo stesso che in (a), con i ruoli di **E** e **B** invertiti.

2 Onde elettromagnetiche

Nel vuoto, cioè in assenza di cariche e correnti, le equazioni di Maxwell diventano

$$\Phi_E = 0, \tag{7}$$

$$\Phi_B = 0, \tag{8}$$

$$\mathcal{C}_E = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}, \tag{9}$$

$$\mathcal{C}_B = \mu_0\epsilon_0\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}. \tag{10}$$

La conseguenza più importante di queste equazioni è l'esistenza delle onde elettromagnetiche. Prima di vedere questo fatto dal punto di vista matematico, cerchiamo di capirlo in modo qualitativo. Immaginiamo che in una regione dello spazio ci sia un campo elettrico variabile. Allora nelle sue vicinanze si genera un campo magnetico. Tale campo magnetico risulta anch'esso variabile. Possiamo quindi aspettarci un campo elettrico ulteriore generato dal campo magnetico. Tale campo elettrico è generato in una regione separata da quella da dove era presente il campo elettrico iniziale. Questa propagazione suggerisce che si ha un fenomeno ondulatorio. Le equazioni (7,8) ci dicono che le linee di forza di **E** e **B** devono essere chiuse. La generazione concatenata di campi elettrico e magnetico può quindi essere rappresentata nella forma di una catena dove gli anelli rappresentano alternativamente le linee di forza del campo elettrico e magnetico, come in figura (2). In figura la direzione x è quella lungo la quale si sviluppa la catena di anelli. Un trattamento matematico rigoroso richiede l'uso della analisi vettoriale che non possiamo utilizzare in questa sede. Però possiamo ugualmente farci un'idea di come sia possibile ottenere matematicamente un'onda elettromagnetica.

Supponiamo che in un certo punto dello spazio ci sia un campo magnetico dipendente dal tempo in modo che la linea di forza sia una retta infinita come in figura 1(a).

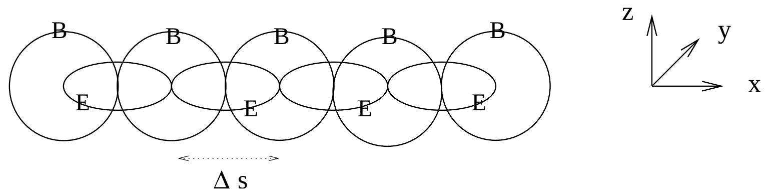

Figura 2: Propagazione di un'onda elettromagnetica attraverso la generazione concatenata di linee di forza dei campi elettrici e magnetici.

Prendiamo l'asse z coincidente con la retta della linea di forza. Consideriamo una circonferenza di raggio Δs centrata nella linea di forza del campo magnetico e giacente nel piano perpendicolare a questa, cioè nel piano x-y. Se in un tempo Δt il campo magnetico varia di ΔB_z, la variazione di flusso corrispondente è $\Delta B_z \pi \Delta s^2$, dove $\pi \Delta s^2$ è l'area dell'anello costituito dalla linea di forza. Il campo elettrico (cf. figura 1(a)) è per costruzione sempre tangente all'anello. Dunque il campo elettrico ha modulo costante, pari a E, lungo l'anello, ma la sua direzione varia secondo la tangente all'anello. La circolazione del campo elettrico è allora $2\pi \Delta s E$, dove $2\pi \Delta s$ è la circonferenza dell'anello. L'equazione (9) diventa

$$2\pi \Delta s E = -\pi \Delta s^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t}. \tag{11}$$

Vediamo di capire il significato di questa equazione. Per far questo colleghiamo il valore del modulo del campo elettrico alle variazioni spaziali del campo elettrico stesso. Facciamo riferimento alla figura 3. Indichiamo per comodità di esposizione il verso delle x positive come la direzione Est in un quadrante di una bussola. Il verso delle y positive corrisponde al Nord, quello delle x negative all'Ovest, e infine quello delle y negative al Sud. Ad Est il campo elettrico ha soltanto componente y, mentre a Nord ha solo componente x, etc. Posso dire che se vado da Ovest verso Est, cioè spostandomi lungo la direzione x di un tratto $2\Delta s$, la componente y del campo elettrico varia di $2E$, mentre se mi muovo da Sud verso Nord, cioè spostandomi lungo la direzione y di un tratto $2\Delta s$, la componente x del campo elettrico varia di $-2E$. Allora l'equazione (11) può essere riscritta

$$\frac{\Delta E_y}{\Delta x} - \frac{\Delta E_x}{\Delta y} = -\frac{\Delta B_z}{\Delta t}, \tag{12}$$

dove $\Delta x = \Delta y = \Delta s$. Abbiamo allora una relazione che connette le variazione nel tempo della componente z del campo magnetico alla variazione nello spazio delle componenti x e y del campo elettrico. Ragionando in modo analogo si ottiene

$$\frac{\Delta B_x}{\Delta z} - \frac{\Delta B_z}{\Delta x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta E_y}{\Delta t}. \tag{13}$$

Le due equazioni (12,13) descrivono come variazioni nel tempo di un campo magnetico o un campo elettrico con verso e direzione assegnata (la linea di flusso infinita) generino nello spazio circostante linee chiuse (circolari) di forza di campo elettrico e

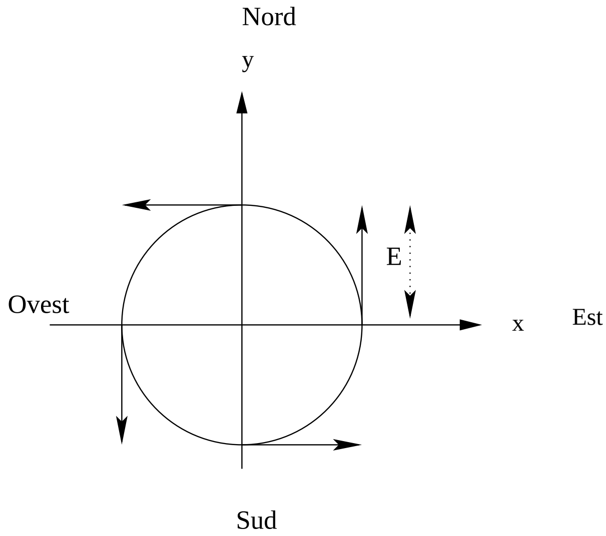

Figura 3: La circonferenza rappresenta la linea di forza del campo elettrico. Le frecce indicano il vettore campo elettrico nei quattro punti cardinali. Ad esempio, ad Est, il campo elettrico ha componente soltanto lungo l'asse y, mentre a Nord esiste solo la componente x, ad Ovest si ha nuovamente solo componente y, ed infine a Sud di nuovo solo la componente x.

magnetico, rispettivamente. È chiaro che i campi generati (gli anelli) genereranno, a loro volta, altri campi. Il calcolo diventa più complicato perchè ora non abbiamo più linee di forza infinite da cui partire ma cerchi. Ragionando come nel caso della catena di punti materiali oscillanti, immaginiamo di muoverci lungo una direzione assegnata, ad esempio x, e che le variazioni dei campi elettrici e magnetici siano solo possibili nel piano perpendicolare alla direzione x. Allora nelle (12,13) possiamo porre a zero le componenti x dei campi. Quindi abbiamo

$$\frac{\Delta E_y}{\Delta x} - = -\frac{\Delta B_z}{\Delta t}, \quad (14)$$

$$-\frac{\Delta B_z}{\Delta x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta E_y}{\Delta t} \quad (15)$$

da cui si ottiene

$$\frac{\Delta E_y}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta E_y}{\Delta t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\Delta B_z}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta B_z}{\Delta t^2} \quad (17)$$

dove abbiamo introdotto la velocità la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Le equazioni (16-17) hanno la stessa forma dell'equazione trovata per la corda vibrante, che descrive la propagazione di onde elastiche. Allora le equazioni (16-17) descrivono la propagazione di onde di campi elettrici e magnetici, che costuiscono quindi un'unica entità denominata campo elettromagnetico.