16. Onde elastiche

1 Catena di oscillatori

Vogliamo discutere il fenomeno della propagazione ondulatoria in un mezzo elastico. A tale scopo consideriamo un insieme di punti materiali disposti lungo una retta, ad uguale distanza s tra loro. Supponiamo che i punti materiali siano connessi da molle di costante elastica k. Tale insieme di oscillatori è mostrato in figura (1). Supponiamo

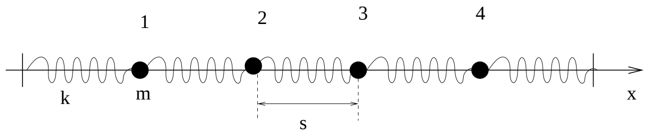

Figura 1: Una catena di punti materiali (indicati con un pallino nero) connessi da molle e disposti lungo l'asse delle ascisse.

che le molle abbiano distanza di riposo nulla e che quindi la forza elastica che una molla esercita tra due punti dipende dalla distanza tra i due punti. Nella figura (1) i punti sono tutti alla stessa distanza e quindi su ogni punto vengono esercitate due forze di intensità uguale e verso opposto. Supponiamo inoltre che i punti materiali possano muoversi anche in direzione verticale. L'entità di questo spostamento è indicata da u_i, dove l'indice $i = 1, 2, 3, .$ individua il punto cui si riferisce lo spostamento. In figura (2) è indicato lo spostamento u_i per il punto $i = 2$. Ora è chiaro che, se tutti i punti

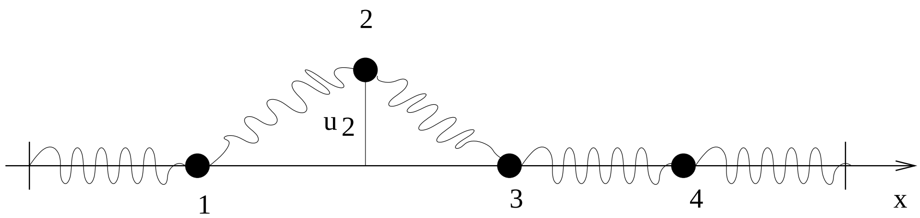

Figura 2: Il punto materiale di indice $i = 2$ è spostato rispetto alla posizione d'equilibrio in cui $u_2 = 0$.

hanno $u_i = 0$, tale situazione non cambia nel tempo poichè la risultante delle forze agenti su ogni punto è nulla. Se però un punto materiale acquista, ad un dato tempo, un certo spostamento, questo fatto provoca uno spostamento anche degli altri punti. Si dice allora che lo spostamento si propaga da un punto ad un altro. Tale propagazione dello spostamento è un'onda. Noi vogliamo dedurre alcune proprietà di questo modo ondulatorio. Consideriamo in dettaglio la forza esercitata su punto materiale dai punti suoi vicini, come illustrato in figura (3). La componente verticale della forza che la massa

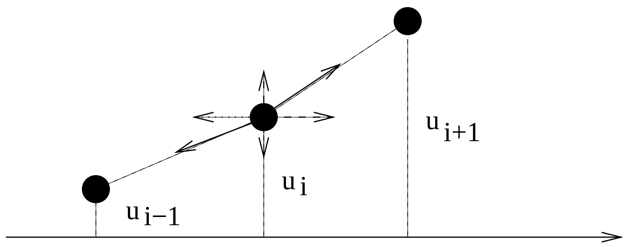

Figura 3: Poichè i punti materiali non si spostano orizzontalmente, le forze di richiamo orizzontali (cioè lungo l'asse delle x) si compensano. La forza risultante è quindi diretta lungo la verticale e può essere verso il basso o verso l'alto a seconda dello spostamento dei punti vicini.

$i-1$-esima esercita sulla massa i-esima è diretta verso il basso e vale

$$F_{i-1\to i} = -k(u_i - u_{i-1}) \tag{1}$$

cioè dipende dalla differenza degli spostamenti. In modo analogo la forza che la massa $i+1$-esima esercita sulla massa i-esima è

$$F_{i+1\to i} = -k(u_i - u_{i+1}). \tag{2}$$

Se si considera un moto verticale dei punti, le componenti orizzontali delle forze esercitate si compensano. Osserviamo ora che punti materiali e molle possono essere interpretati come atomi e forze agenti tra essi. Se consideriamo la distanza s molto piccola, arriviamo ad un punto di vista continuo. Se s dimunuisce, la forza orizzontale che ogni punto esercita su quello vicino diminuisce anch'essa poichè ha intensità ks. Per mantenere costante tale intensità introduciamo la tensione h del filo definita da

$$h = ks \tag{3}$$

in modo che h è indipendente dal valore di s. Allora per un dato valore di s si ha

$$k = \frac{h}{s}. \tag{4}$$

Anche per la massa dei punti materiali possiamo fare una considerazione analoga. È chiaro che se le masse sono più vicine, cioè s ha un valore minore, affinchè la densità di materia sia costante, le masse devono avere un valore più piccolo. In altre parole deve essere

$$\rho = \frac{m}{s}. \tag{5}$$

Usando le relazioni (1,2,4,5) l'equazione del moto per il punto materiale i-esimo si scrive

$$ma_i = -k(u_i - u_{i-1} + u_i - u_{i+1})$$

cioè

$$\rho a_i = -\frac{h}{s^2}(u_i - u_{i-1} + u_i - u_{i+1}), \tag{6}$$

dove a_i è l'accelerazione del moto verticale del punto materiale i-esimo. Per capire il significato dell'equazione (6) introduciamo le deformazioni

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{s} && (7) \\ d_{i-1} &= \frac{u_i - u_{i-1}}{s} && (8) \end{aligned}$$

che danno una misura dell'entità degli spostamenti relativi di due punti vicini. d_i rappresenta la velocità di variazione nello spazio dello spostamento u_i. Allora la quantità

$$\frac{1}{s}\left[\frac{u_{i+1} - u_i}{s} - \frac{u_i - u_{i-1}}{s}\right] = \frac{d_i - d_{i-1}}{s} \equiv f_i \tag{9}$$

rappresenta la variazione della velocità di variazione di u_i rispetto allo spazio. L'equazione (6) diventa

$$a_i = \frac{h}{\rho} f_i \tag{10}$$

e connette l'accelerazione del punto i-esimo (cioè la variazione della velocità per unità di tempo) con la variazione della velocità spaziale, d_i. Per sottolineare il significato fisico della (10), notiamo che nel caso del continuo, cioè quando la distanza s tende a zero, lo spostamento u_i diventa una funzione del tempo e della posizione x lungo la catena, cioè $u = u(t, x)$. Allora per t dato, $u(t, x)$ descrive lo spostamento di ogni punto a quel dato tempo, mentre, per x dato, $u(t, x)$ descrive l'andamento nel tempo dello spostamento nel punto x dato.

2 Moto ondulatorio

Risolvere l'equazione del moto vuol dire trovare $u(t, x)$ nel caso continuo o $u_i(t)$ nel caso discreto. Quando abbiamo discusso il moto armonico si è trovato che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, cioè

$$a_i = -\omega^2 u_i \tag{11}$$

dove l'andamento temporale di u_i è

$$u_i = A_i \cos(\omega t), \tag{12}$$

dove $\omega = 2\pi/T$, con T il periodo. Se usiamo la (11) nella (10) si ha

$$f_i = -\frac{\rho}{h}\omega^2 u_i. \tag{13}$$

Se passiamo al continuo la (13) diventa

$$f(t,x) = -\frac{\rho}{h}\omega^2 u(t,x) \tag{14}$$

dove $f(t,x)$ rappresenta la variazione di velocità di variazione spaziale al tempo t. La (14) è simile alla (11) e suggerisce che f debba essere collegata ad u dall'analogo spaziale di $\omega^2 = (2\pi/T)^2$. Tale analogo spaziale è $\Omega^2 = (2\pi/\lambda)^2$, dove λ è il periodo spaziale. Dobbiamo quindi avere

$$\Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho}{h}, \tag{15}$$

cioè

$$\frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{h}{\rho}} \equiv c. \tag{16}$$

λ è detta lunghezza d'onda e il rapporto tra λ e T definisce la velocità c dell'onda, cioè la velocità con cui si sposta il profilo dell'onda. In definitiva la funzione $u(t,x)$ sarà della forma

$$u(t,x) = \cos(\omega t - \Omega x). \tag{17}$$

Consideriamo appunto il profilo dato dalla (17) a due istanti di tempo diversi. Quando $t = 0$ si ha

$$u(t=0,x) = \cos(\Omega x) = \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right).$$

Consideriamo ora un tempo t successivo. Si ha

$$\Omega x - \omega t = 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda}{T}t\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct).$$

Allora al tempo t il profilo dell'onda si ottiene spostando di $\Delta x = ct$ il profilo ottenuto al tempo $t = 0$. La quantità $\Omega\Delta x$ è detta differenza di fase.

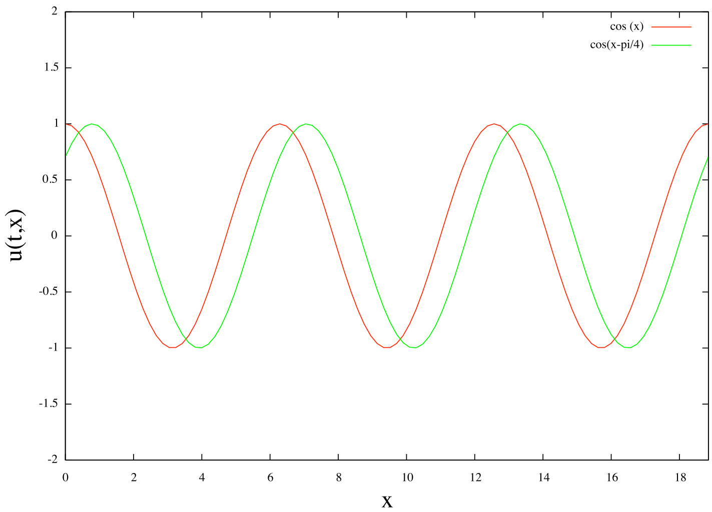

Figura 4: Profili di un'onda a due tempi diversi. La differenza di fase è pari a $\pi/4$.