

13. Campi vettoriali

1 Il campo di velocità di un fluido

Il concetto di campo in fisica non è limitato ai fenomeni elettrici. In generale il valore di una grandezza fisica assegnato per ogni punto dello spazio definisce un campo. Ad esempio, se si conosce il valore della temperatura in ogni punto, si ha un campo di temperatura. Consideriamo un fiume. Ognuno ha constatato che in tratti diversi del fiume la corrente può avere intensità diverse. Un modo per verificare questo è quello di lanciare un piccolo oggetto galleggiante e vedere come si sposta per effetto della corrente. Possiamo, almeno idealmente, prendere nota del valore e direzione della velocità che il nostro oggetto galleggiante assume a seconda del punto dove lo lanciamo in acqua. La velocità dell'oggetto è la velocità dell'acqua in quel punto. Possiamo quindi costruire una mappa della velocità dell'acqua in ogni punto. La velocità è una grandezza vettoriale cioè individuata da modulo direzione e verso. Una mappa di velocità è quindi un campo vettoriale ed è detto anche campo di velocità del fluido. Vogliamo discutere come si rappresenta un campo vettoriale. Consideriamo, per semplicità, un campo di velocità bidimensionale. Per fissare le idee pensiamo di voler rappresentare il campo di velocità in superficie. Introducendo un sistema di assi cartesiani ogni punto è individuato da una coppia di coordinate (x,y) . Il campo di velocità è definito assegnando un vettore per ogni punto. Graficamente ciò può esser fatto come indicato in figura (1). In ogni

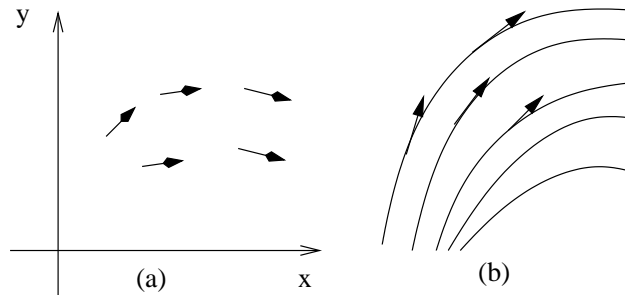


Figura 1: In (a) un campo vettoriale è indicato assegnando un vettore ad ogni punto dello spazio. In (b) invece si usa il metodo delle linee di forza.

punto si disegna una freccia la cui direzione e verso coincidono con quelli del vettore velocità. La lunghezza della freccia rappresenta il valore della velocità. In pratica una tale rappresentazione grafica non è molto conveniente poichè se i punti considerati sono molto vicini il disegno diventa troppo affollato. Un metodo grafico più conveniente è quello delle linee di forza. Consideriamo il campo in figura (1). Le linee di forza sono in ogni punto tangenti al vettore velocità. Questo vuol dire che se in un dato punto di una linea di forza tracciamo la tangente, la direzione della tangente individua la direzione del vettore velocità. Il verso della velocità è individuato da un verso di percorrenza sulla

linea di forza stessa. Ad esempio, un fascio di linee di forza parallele individua un flusso uniforme, cioè la velocità ha sempre la stessa direzione e verso. Le linee di forza danno informazione sulla direzione e verso, ma non sul modulo del vettore velocità. A questo scopo si adotta la seguente convenzione. È chiaro che le linee di forza esistono in ogni punto. Al fine di fare una rappresentazione grafica, si disegna un fascio di linee di forza. La convenzione consiste nel disegnare un fascio molto fitto quando il modulo è elevato ed un fascio meno fitto quando il modulo è meno elevato. In altre parole il numero di linee per unità di area è una misura del valore del modulo del vettore velocità.

2 Il campo elettrico come campo vettoriale

Il campo elettrico è un campo vettoriale. Il nostro scopo è di descriverlo una volta che conosciamo la carica o le cariche che lo hanno generato. La legge di Coulomb ci ha insegnato come è fatto il campo elettrico di una carica puntiforme. Supponiamo tale carica positiva. Si è detto (Cf. Lezione 12) che il campo elettrico determina la forza che agisce su una carica di prova e che tale forza è diretta lungo la retta congiungente la carica di prova con la carica generatrice del campo stesso. Tale informazione è sufficiente a tracciare il campo elettrico mostrato in figura (2). Le linee di forza di una carica

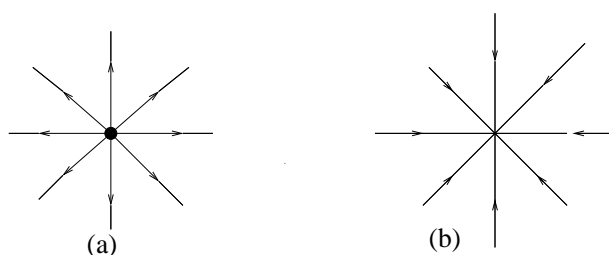


Figura 2: In (a) le linee di forza di un campo elettrico di una carica positiva, mentre in (b) le linee di forza per il campo di una carica negativa.

puntiforme si dipartono radialmente in tutte le direzioni. Anche se il disegno è in due dimensioni, nella realtà bisogna immaginare la stessa cosa in tre dimensioni. Un modo per memorizzare questo tipo di campo elettrico è di usare l'analogia con il campo di velocità di un fluido. Una carica positiva è come una sorgente, da cui si dipartono le linee di forza dette anche linee di flusso. Si può intuire che il campo elettrico di una carica puntiforme negativa si ottiene invertendo il verso delle linee di forza. Una carica negativa agisce quindi come un pozzo per le linee di forza. In presenza di più cariche vale il principio di sovrapposizione, cioè il campo elettrico di una distribuzione di cariche è la somma vettoriale dei campo elettrici delle singole cariche. Usiamo ora questo principio per determinare il campo elettrico di due cariche positive uguali. Esattamente a metà strada tra le due cariche il campo elettrico è nullo in quanto i versi dei due campi sono opposti, mentre direzione e modulo sono uguali per simmetria. Lungo tutti i punti della retta che passa perpendicolare per il punto delle due cariche la composizione vettoriale è

mostrata in figura (3). Eseguendo la composizione vettoriale punto per punto si arriva al

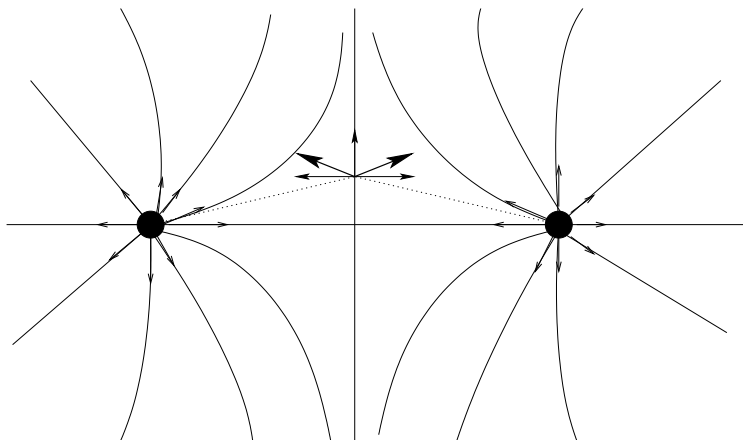


Figura 3: Il campo elettrico di due cariche elettriche positive. Come esempio sono tracciati i vettori rappresentanti il campo elettrico di ciascuna carica e la loro composizione vettoriale.

risultato mostrato in figura. Nel caso di cariche di uguale entità ma di segno opposto si ottiene la configurazione di figura (4). Tutte le linee di forza hanno origine nella sorgente positiva e terminano nel pozzo negativo. Un tale campo è detto di dipolo, mentre quello di una carica è detto di monopolo.

3 Proprietà dei campi vettoriali

Ci sono due proprietà che caratterizzano la natura di un campo vettoriale. Immaginiamo di racchiudere una carica positiva all'interno di una sfera e di porre la carica al centro della sfera come mostrato in figura (5). Sia R il raggio della sfera. Le linee di forza attraversano la superficie sferica. Per la simmetria del problema, tali linee sono perpendicolari alla superficie sferica. Inoltre il campo vettoriale deve essere lo stesso in ogni punto della sfera. Il prodotto del valore del campo vettoriale per la superficie della sfera è detto *flusso del campo* e si indica con Φ . Nel caso di un campo elettrico si ha

$$\Phi = E \cdot S = E \cdot 4\pi R^2. \quad (1)$$

Per convenzione il flusso è positivo se linee di forza sono uscenti, negativo se sono entranti. Se usiamo l'analogia con il campo di velocità di un fluido, possiamo dire che il fatto di avere un flusso positivo attraverso una superficie chiusa corrisponde ad avere una sorgente all'interno della superficie stessa. In modo analogo il fatto di avere un flusso negativo corrisponde ad un pozzo all'interno della superficie. È chiaro che se all'interno della superficie vi sono una sorgente ed un pozzo, il flusso risultante può essere sia positivo che negativo. Questo è il caso di una sfera che racchiude una carica positiva ed

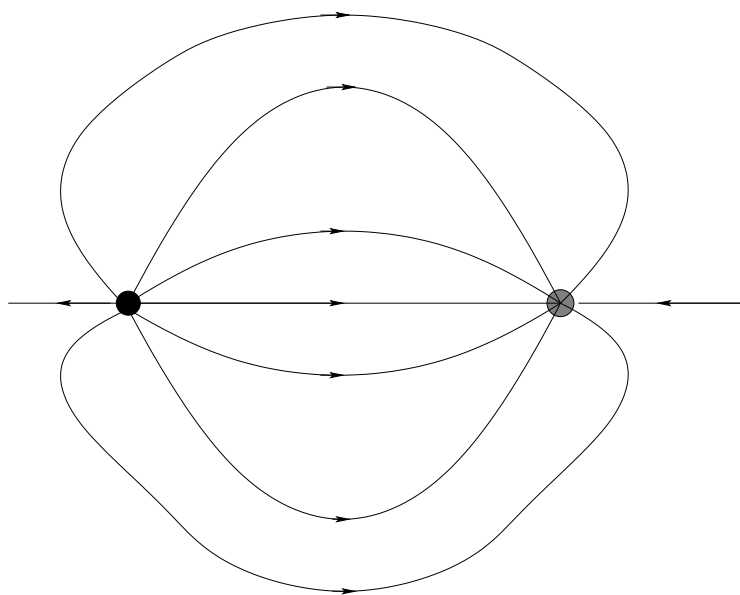


Figura 4: Il campo elettrico di due cariche elettriche di segno opposto.

una negativa. Gauss ha dimostrato che la legge di Coulomb è equivalente alla seguente affermazione: per una qualunque superficie chiusa il flusso del campo elettrico attraverso la superficie è pari alla quantità netta di carica elettrica dentro la superficie, cioè

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2)$$

dove ϵ_0 è connessa a k da

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k. \quad (3)$$

Se la carica elettrica q è nulla, le linee di forza del campo devono in parte entrare e in parte uscire dalla superficie. Consideriamo il caso di due cariche di segno opposto. Il fatto che alcune linee di forza siano uscenti ed altre entranti è dovuto al fatto che le linee di forza devono partire dalle sorgenti ed arrivare nei pozzi. Notiamo inoltre che possiamo scegliere la superficie chiusa in tanti modi. Se la scegliamo in modo da racchiudere entrambe le cariche il flusso attraverso di essa è nullo; se invece la superficie racchiude una sola carica il flusso sarà diverso da zero e di segno concorde con quello della carica racchiusa. Immaginiamo ora di avvicinare le due cariche fino a farle coincidere. È chiaro che in tal caso qualunque superficie le racchiude entrambe ed il flusso è sempre nullo. Le linee di forza del campo elettrico devono allora essere necessariamente delle linee chiuse in quanto non ci sono sorgenti o pozzi da dove partire o dove arrivare. La legge di Gauss è una delle celebri equazioni di Maxwell. Se ci sono cariche positive e negative, allora la configurazione delle linee di forza del campo elettrico possono sorgere e finire nei punti dove si trovano le cariche, altrimenti le linee di forza devono essere chiuse.

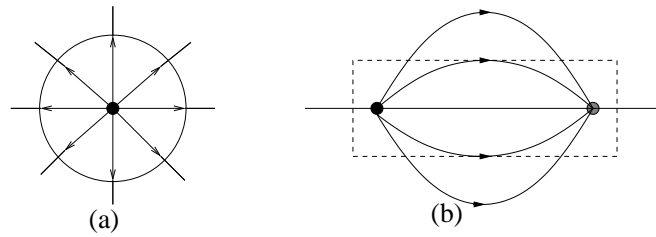


Figura 5: In (a) una carica positiva è posta al centro di una sfera. In (b) una superficie, indicata con una linea tratteggiata racchiude due cariche di segno opposto.

Oltre il flusso, esiste una seconda proprietà di un campo vettoriale. Consideriamo i campi vettoriali mostrati in figura (6). La linea tratteggiata rappresenta un cammino chiuso. Si

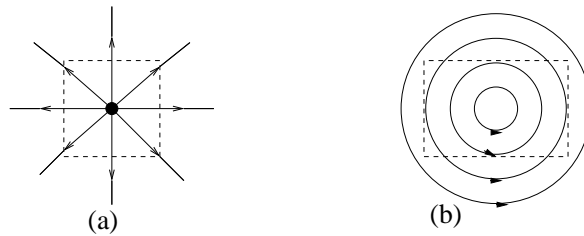


Figura 6: In (a) e (b) la linea tratteggiata rappresenta un cammino chiuso.

definisce circolazione del campo vettoriale il prodotto del valore medio della componente del campo tangente alla curva per la lunghezza della curva. La circolazione si indica con C . Nel caso del campo vettoriale di una sorgente la circolazione è nulla, mentre è diversa da zero nel caso del campo vettoriale con linee di forza chiuse. Per sviluppare un'immagine più intuitiva pensiamo ad un fluido che scorre. Se il flusso è regolare il campo di velocità ha circolazione nulla, mentre se il flusso crea vortici la circolazione è diversa da zero.

In sintesi il campo elettrico è un campo vettoriale. Come ogni campo vettoriale è caratterizzato da flusso e circolazione. In situazioni statiche, cioè non dipendenti dal tempo, la circolazione del campo elettrico è nulla, mentre il flusso dipende dalle cariche elettriche. In generale, una volta noti flusso e circolazione siamo in grado di ricostruire la configurazione delle linee di forza del campo vettoriale.