LA TEORIA DELLA RELATIVITA'

Prof. G. Degrassi

PROGRAMMA

- **Iª Parte:**
  - La natura della luce. La teoria E.M. di Maxwell. L'etere.
  - L'esperimento di Michelson e Morley

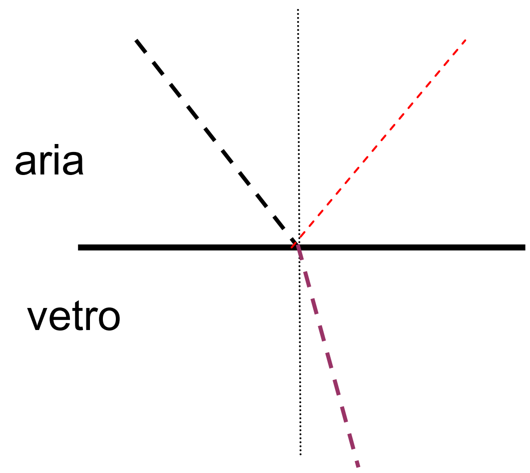
- **IIª Parte:**
  - Principio di relatività di Einstein.
  - Invarianza dell'intervallo. Trasformazioni di Lorentz.
  - Conseguenze di spazio e tempo "relativi".

La natura della luce

Due teorie in contrapposizione a partire dalla fine del XVII secolo:
Corpuscolare (Newton) ; Ondulatoria (Huygens).

Corpuscolare:
Ogni corpo luminoso emette piccole particelle, il cui moto avviene secondo le leggi della meccanica, che colpendo l'occhio producono la sensazione della luce.
Motivazione: propagazione rettilinea della luce

Riflessione: urto di una sfera contro una superficie



Rifrazione: i corpuscoli di luce subiscono una attrazione da parte del mezzo più denso quando vi penetrano e vengono quindi accelerati sotto l'azione di un impulso perpendicolare alla superficie di separazione.

La velocità della luce è maggiore in un mezzo più denso che in uno meno denso.

Ondulatoria:

La luce è una eccitazione che si propaga come un impulso elastico in un mezzo particolare, l'etere, che permea tutto lo spazio all'interno ed all'esterno dei corpi materiali.

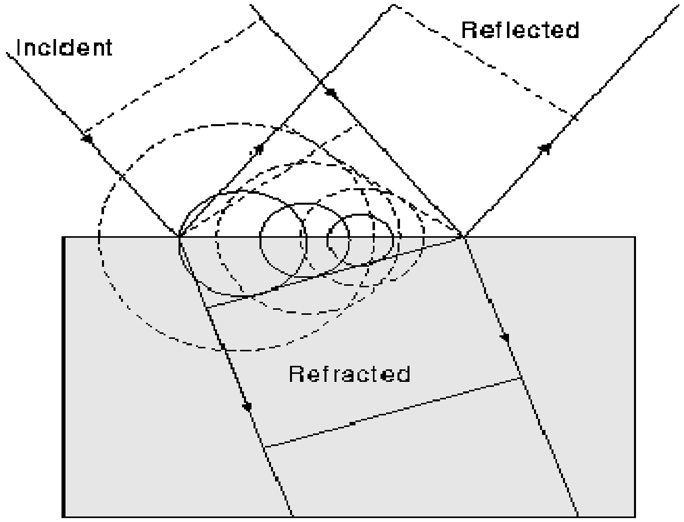
Motivazione: analogia tra fenomeni acustici ed ottici.

Riflessione e rifrazione spiegate a partire dal principio di Huygens:

in ogni punto in cui arriva una onda luminosa si genera una onda sferica secondaria; la superficie che inviluppa le onde secondarie ad un certo istante indica la posizione del fronte d'onda che si propaga effettivamente.

Rifrazione:

le onde secondarie si propagano nel mezzo più denso con velocità minore; l'inviluppo è spostato verso sinistra



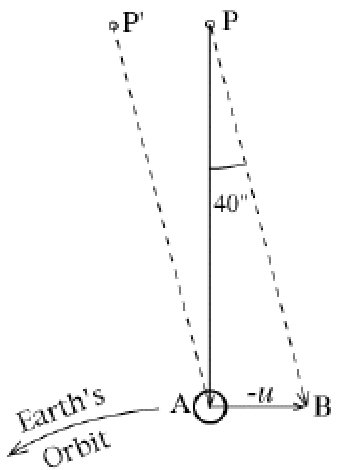
La velocità della luce è minore in un mezzo più denso che in uno meno denso.

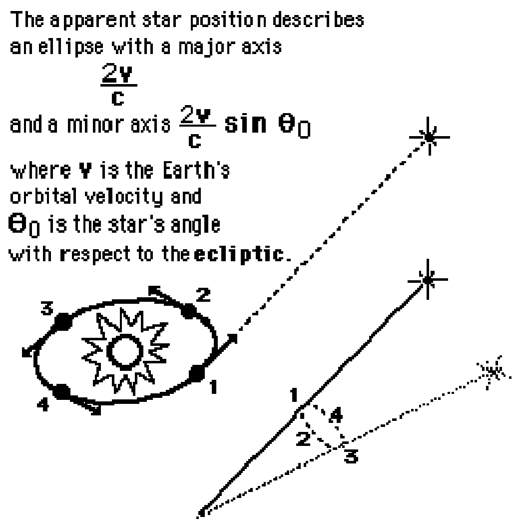
XVIII secolo: la teoria corpuscolare è in auge

Newton e scoperta della aberrazione della luce (Bradley, 1727).

Aberrazione: moto apparente di una stella fissa su una orbita ellittica di semiasse maggiore pari a 20.5″ con periodo pari ad un anno.

Spiegazione:
effetto dovuto al moto della terra intorno al sole





Interpretazione: il moto del mezzo di trasmissione (nel caso rarefatto) è ininfluente per la velocità della luce. La luce non viene trasportata dall'atmosfera. *(la terra non trascina l'etere)*

XIX secolo: si afferma la teoria ondulatoria.

Interferenza :
i fasci luminosi che si intersecano si sovrappongono senza interferire tra di loro. La vibrazione risultante, cioè l'ampiezza dell'onda, è la somma delle vibrazioni individuali. Luce sommata ad altra luce può dar luogo al buio.

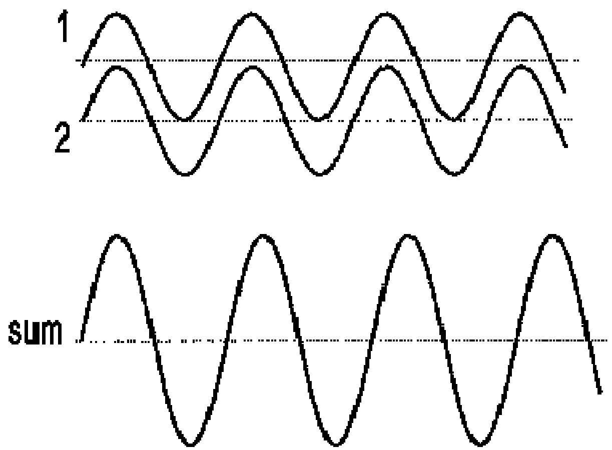


Figure I
Constructive Interference

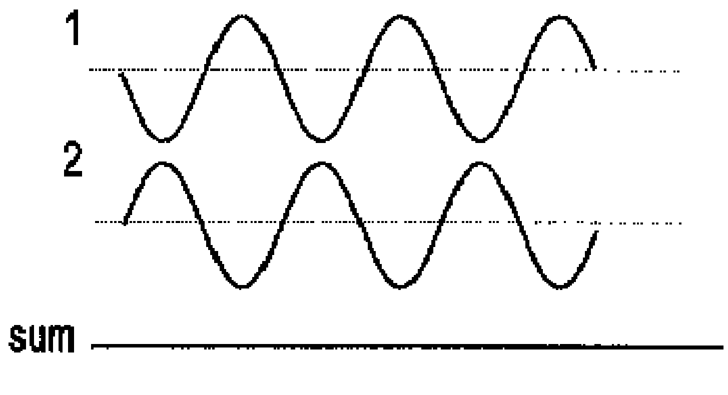
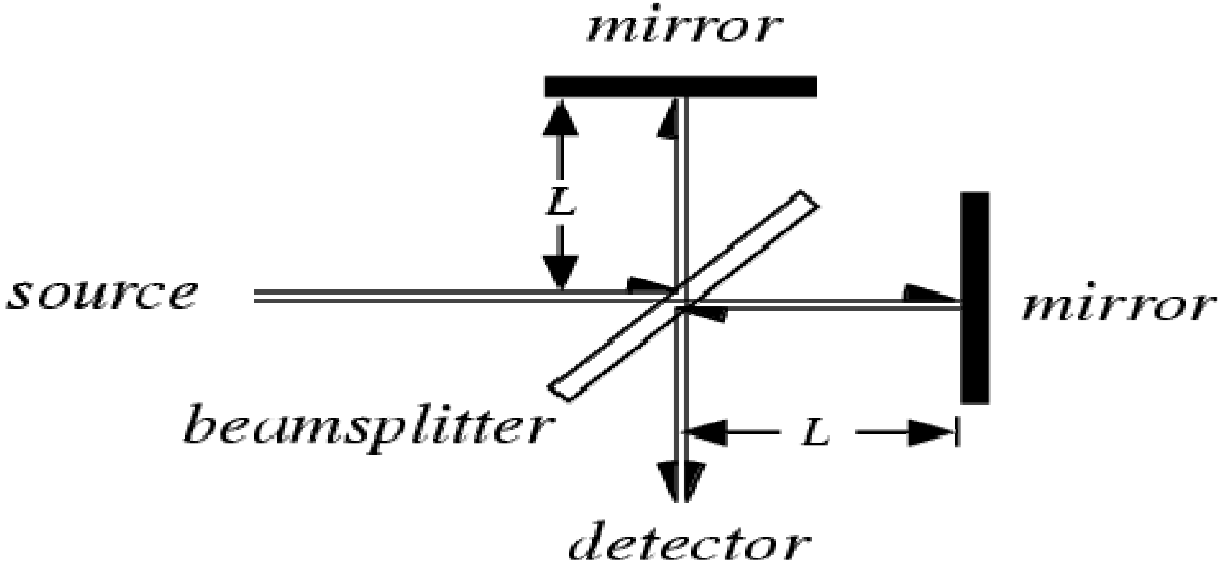


Figure II
Destructive Interference

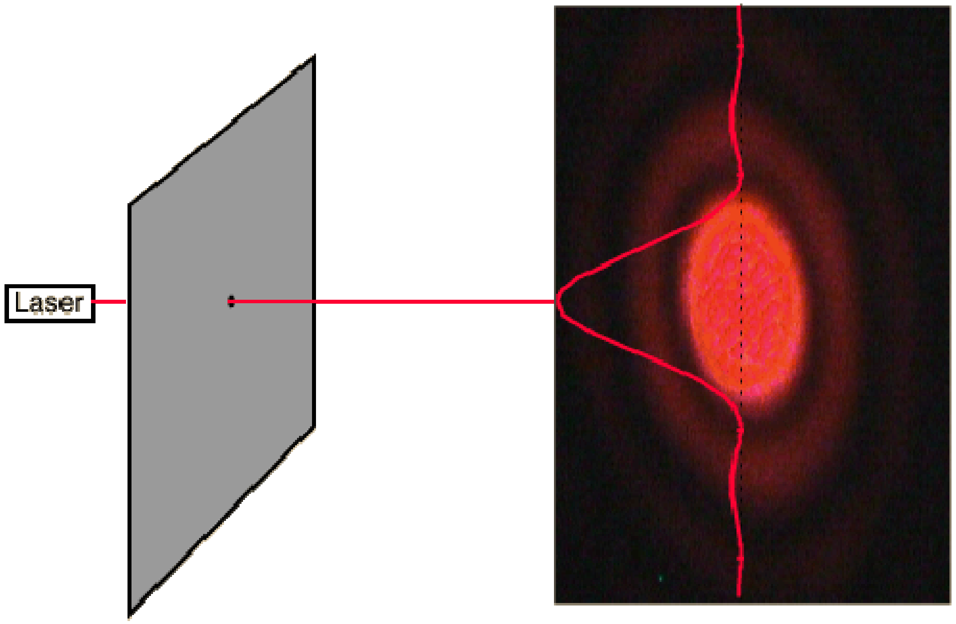
Il processo di emissione della luce da una sorgente non è un fenomeno coerente. Fenomeni di interferenza si ottengono solo scindendo in due uno stesso raggio luminoso.



Modificando la distanza di uno dei due specchi si ottiene uno spostamento dei massimi e minimi di luce osservati nell'oculare (*detector*) dovuti alla ricombinazione dei due treni d'onda .

Diffrazione:

capacità di una onda di aggirare gli ostacoli che incontra nel suo moto, cioè abbandono della propagazione rettilinea.
Un onda luminosa può curvare in corrispondenza di un bordo ma solo in regioni dell'ordine della lunghezza d'onda.



Polarizzazione:
asimmetria rispetto alla direzione di propagazione del raggio.
Proprietà di onde trasversali. Onde longitudinale sempre simmetriche.

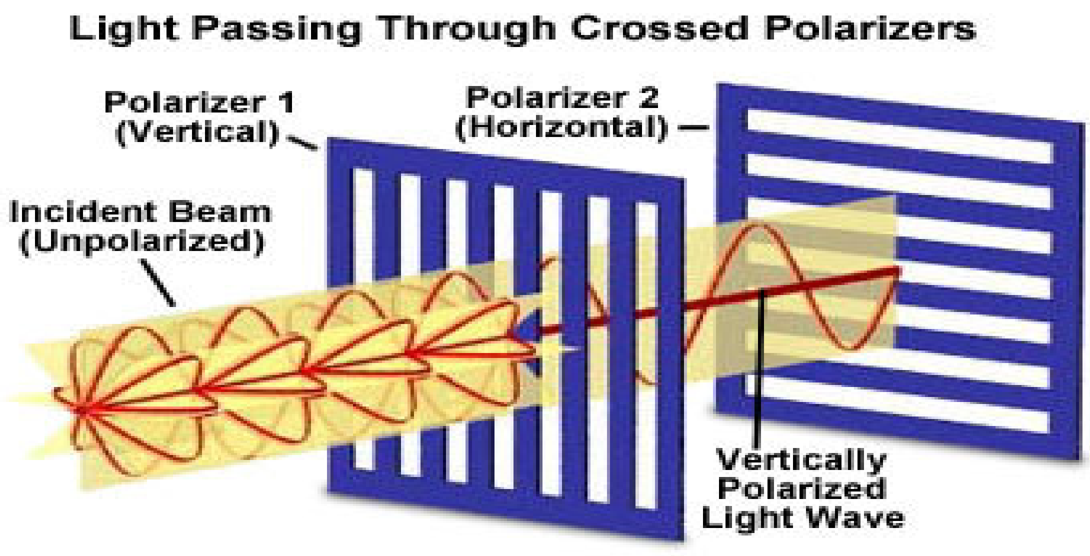
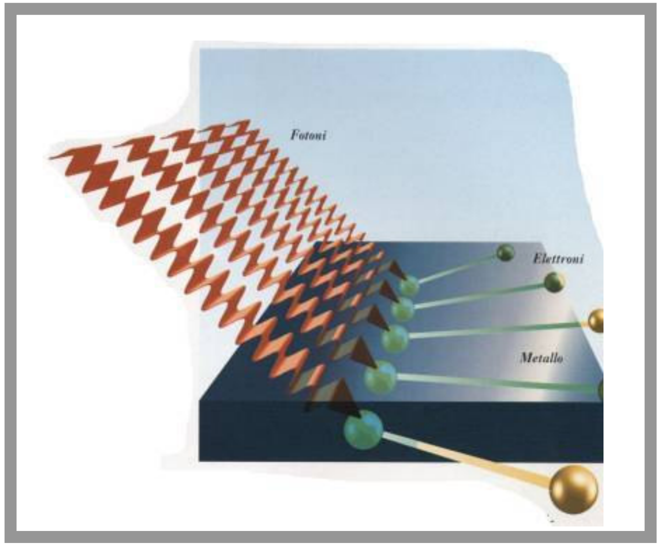


Figure 1

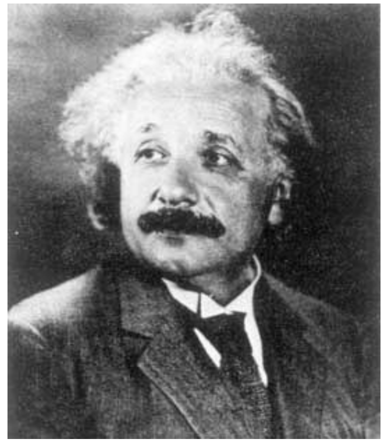
Le vibrazioni luminose avvengono perpendicolarmente alla direzione di propagazione, cioè nel piano d'onda.
Un cristallo birifrangente trasmette le vibrazioni con velocità differenti in direzioni perpendicolari, dando luogo, per Huygens, a due raggi separati polarizzati in piani perpendicolari.

XX secolo: di nuova la teoria corpuscolare

effetto fotoelettrico



Scoperta: Hertz 1887



Teoria: Einstein 1905

- Effetto a soglia: $\omega > \omega_S$
- $N_{elettr.}$ ~ intensità dell' onda
- $E_{elettr.}$ ~ frequenza ν dell'onda

FOTONI

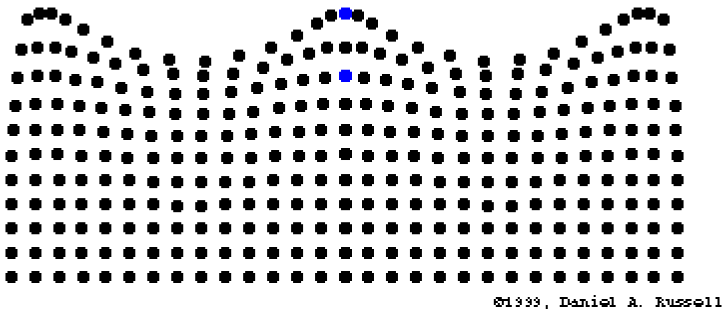
$$1/2\, mv^2 = \hbar\omega - W$$

XIX secolo: la natura ondulatoria con vibrazioni trasversali della luce è universalmente accettata

La misura della velocità in mezzi densi elimina la spiegazione di Newton della rifrazione.

Per analogia con i fenomeni ondulatori conosciuti viene introdotta l'idea dell' etere quale mezzo di trasmissione delle onde luminose, "sostanza" che permea tutto lo spazio ed i corpi.

- Onda: perturbazione che si propaga trasportando energia, non materia.



Quali sono la natura e le proprietà dell'etere ?

Molte ipotesi senza possibilità di ottenere un quadro coerente

Esempio: un solido dotato di proprietà elastiche trasmette onde trasversali → etere solido elastico?.
In un solido si hanno anche vibrazioni longitudinali.

Qualsiasi essa sia abbiamo due possibilità:

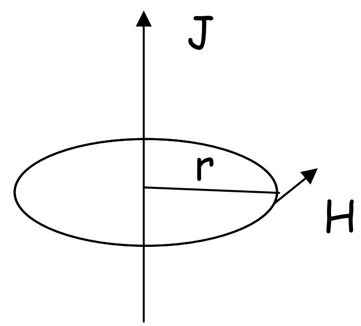
a) I fenomeni ottici dipendono solo dal moto relativo tra i corpi;
b) In un fenomeno ottico è possibile evidenziare lo stato di moto di un corpo rispetto all'etere.

allora

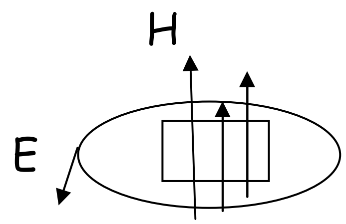
a) Vale un principio di relatività. Il moto della terra non influenza il risultato di esperimenti puramente terrestri. Il concetto di etere è superfluo.
b) Esiste un sistema di riferimento assoluto, quello in cui l'etere è a riposo.

La teoria elettromagnetica di Maxwell

Legge di Biot-Savart:
Una corrente elettrica è circondata da un campo magnetico la cui intensità è direttamente proporzionale a J ed alla lunghezza del filo ed inversamente proporzionale a r. La costante di proporzionalità è collegata alla velocità della luce.



Legge di Faraday:
Una corrente di induzione magnetica è circondata da un campo elettrico con verso opposto. La proporzionalità tra I ed E è collegata a c.
Corrente di induzione magnetica: variazione del flusso di H nell'unità di tempo



flusso di un vettore attraverso un superficie:
prodotto del vettore per la proiezione dell'area normale al vettore

Leggi dell'elettromagnetismo prima di Maxwell

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = 4\pi\rho$$ Coulomb

$$\mathrm{div}\ \vec{H} = 0$$ assenza di poli magnetici

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$ Faraday

$$\mathrm{rot}\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$ Biot-Savart

Se ridefinisco:
$H \rightarrow H/c$
$J \rightarrow J/c^2$

la costante c scompare da queste equazioni.

Modifica di Maxwell alla legge di B.S.:

nella legge di B.S. la corrente non è solo quella di conduzione, J, ma vi è anche la corrente di spostamento dovuta alla variazione del flusso di E nell'unità di tempo

Equazioni di Maxwell:

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\mathrm{div}\ \vec{H} = 0$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Non esiste nessuna ridefinizione di E, H, ρ, J che mi possa far scomparire c.

Motivazione:
senza il nuovo termine le equazioni non soddisfano l'equazione di continuità della corrente, cioè il fatto che il flusso di una corrente attraverso una superficie chiusa deve essere uguale alla variazione della carica all'interno del volume.

Ma

a causa del nuovo termine le equazioni di Maxwell non sono invarianti nel passaggio tra sistemi di riferimento inerziali diversi. La costante c ha le dimensioni di una velocità:

$\vec{J} = \rho\, \vec{v}$;

$[\mathrm{rot}H] = [4\pi J/c] = [4\pi\rho][v/c] = [\mathrm{div}E][v/c]$; $\quad [\mathrm{div}E] = [\mathrm{rot}E]$

$[\mathrm{rot}H] = [\mathrm{rot}E][v/c] = [H/ct][v/c] = [H/vt][v/c]^2$; $\quad [\mathrm{rot}] = [1/L] = [1/vt]$

$[c] = [v]$

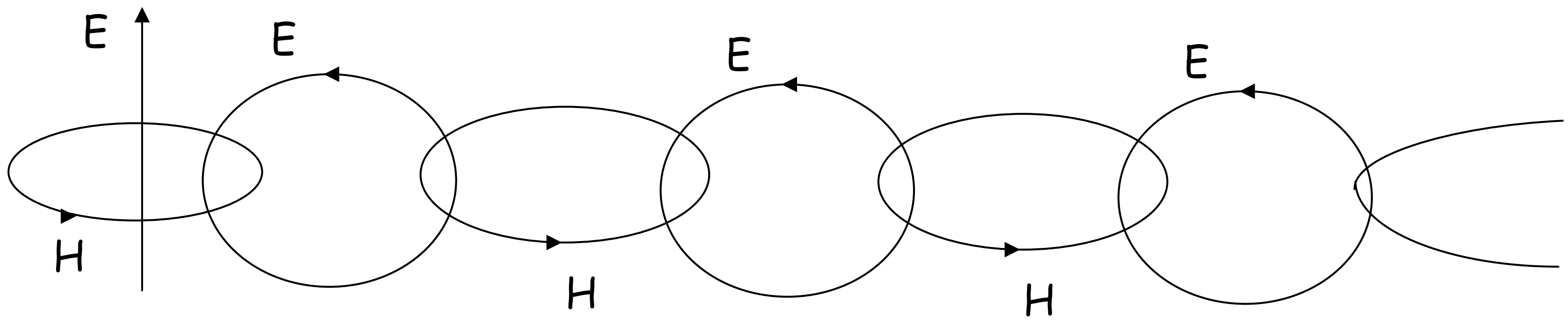
Nel passaggio tra due sistemi di riferimento una velocità cambia valore.

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0\, t$ $\qquad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$

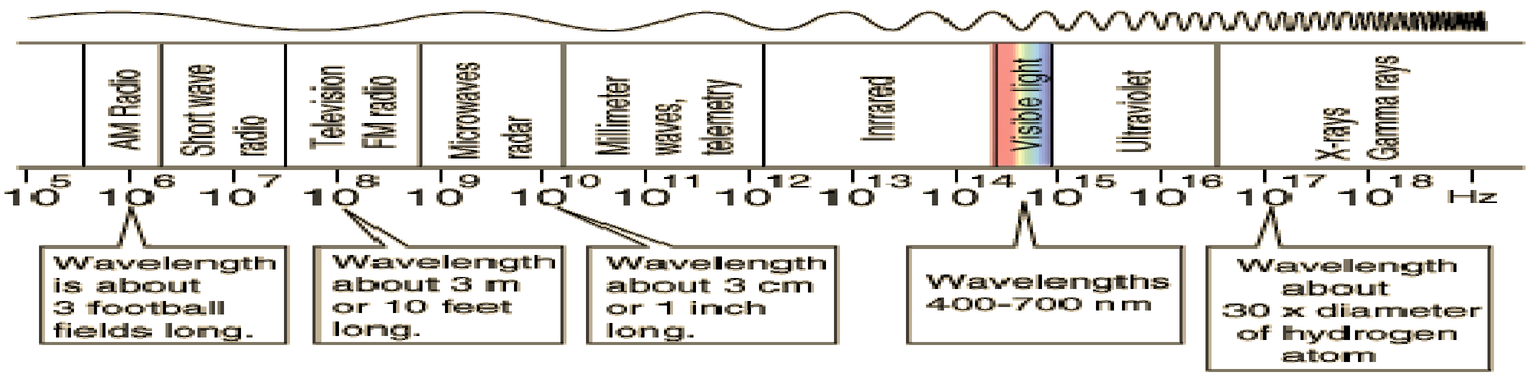
$t' = t$

Effetto del nuovo termine:

onde elettromagnetiche trasversali che si propagano con velocità c, finita, uguale alla velocità della luce.



Le onde luminose sono onde elettromagnetica di particolare frequenza



Sintesi del XIX secolo:

Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazione tra sistemi di riferimento inerziali, ma esiste un sistema privilegiato quello dell'etere, sostanza a riposo che permea tutto lo spazio e che funziona da mezzo di trasmissione delle onde, nel quale le equazioni di Maxwell sono esattamente vere ed in cui la propagazione della luce è isotropa con velocità c.

Conseguenza:

In un sistema di riferimento diverso dall'etere la misura della velocità della luce deve dipendere dalla velocità del riferimento rispetto all'etere e, per una data velocità, dalla direzione lungo cui la si misuri.

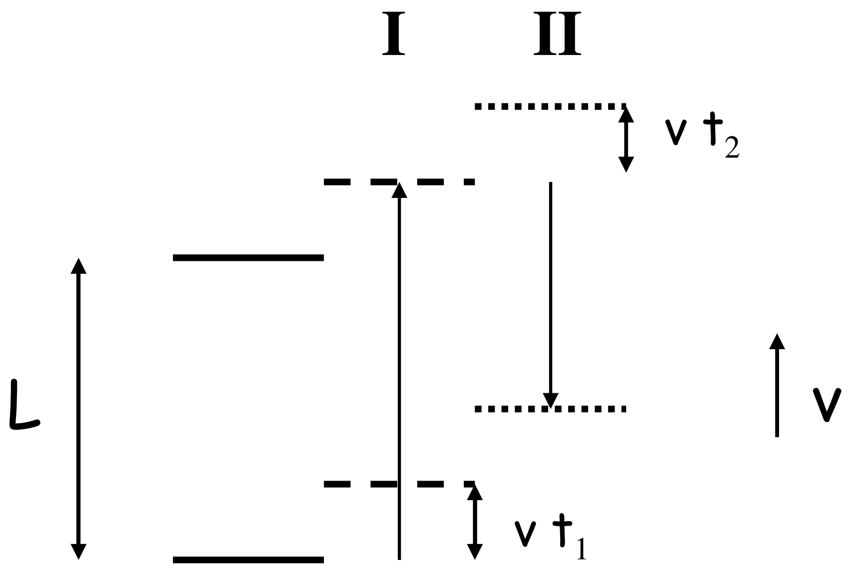
L'esperimento di Michelson e Morley

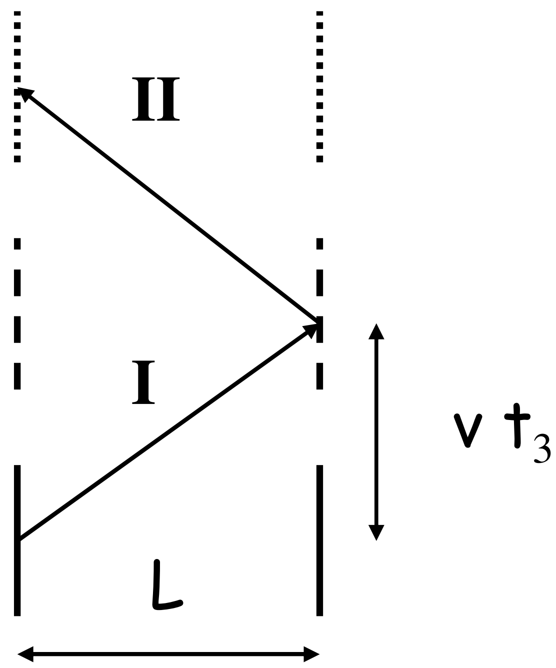
- Obiettivo:
  misurare la velocità della terra rispetto all'etere.

- Idea alla base:
  sulla terra il moto della luce è la composizione del movimento proprio, con velocità c lungo la direzione di emissione, con quello dell'etere.

- Conseguenza:
  La luce impiega tempi differenti per percorrere uguali distanze lungo direzioni perpendicolari. La misura dei tempi di andata e ritorno lungo queste direzioni ci permette di ottenere, v, la velocità della terra rispetto all'etere.

Direzione: parallela — perpendicolare





I) $c\,t_1 = L + vt_1$

II) $ct_2 = L - vt_2$

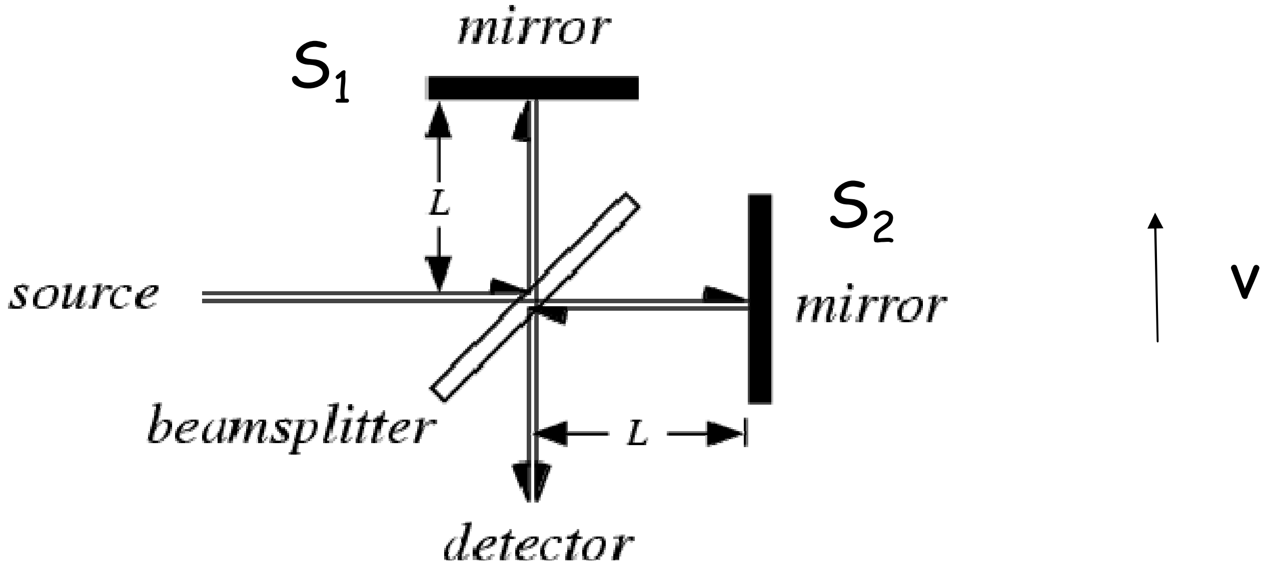
$$t_1 + t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

I) $(ct_3)^2 = L^2 + (vt_3)^2$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = 2\,t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$\Delta t = t_1 + t_2 - 2\,t_3 = \frac{2L}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \cong \frac{L}{c}\beta^2 \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

Interferometro di Michelson (L = 11 m)



Sfasamento S_1-S_2: Δt

Rotazione di 90° : sfasamento S_2-S_1: $-\Delta t$:
Tra prima e dopo la rotazione le frange di interferenza si devono spostare di $2\Delta t = 2(L/c)\,\beta^2$

$$\frac{2\,L}{\lambda}\,\beta^2 = \frac{2 \times 1{,}1 \times 10^3 \times 10^{-8}}{5{,}9 \times 10^{-5}} = 0{,}37$$

La spiegazione di Lorentz

• vento d'etere accorcia le lunghezze e ritarda gli orologi $\longrightarrow$ trasformazioni di Lorentz.

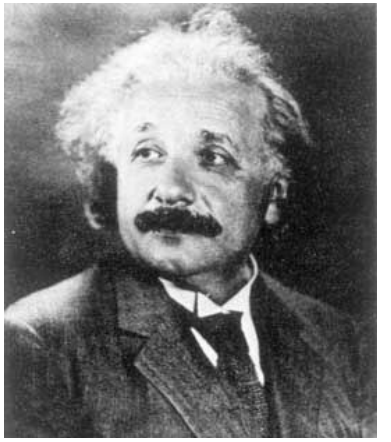
M.&M. :

$$T_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad T_{/\!/} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

se in $T_{/\!/}$ $\quad L \rightarrow \dfrac{L\sqrt{c^2 - v^2}}{c} \quad \Rightarrow \quad T_{\perp} = T_{/\!/}$

• Le proprietà dell'etere non possono essere evidenziate sperimentalmente! Ogni stato di movimento rispetto all'etere simula uno stato di immobilità rispetto all'etere!

La “rivoluzione” di Einstein



Punti di partenza:

• etere non osservabile $\longrightarrow$ etere non esiste!

• la velocità della luce è una costante, indipendente dallo stato di moto dell’osservatore.

• il concetto di moto è sempre relativo; vale un principio di relatività.

Conseguenze:

• il principio di relatività galileiano va modificato.

• non esiste un tempo ed una simultaneità assoluti.

•il teorema di addizione delle velocità va modificato.

PRG vs PRE

Galileo — postulati di base — Einstein

Galileo

1) Lo spazio è omogeneo ed isotropo. Il tempo è omogeneo.

2) Intervalli di tempo e distanze spaziali sono gli stessi in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo ed uniforme uno rispetto all'altro.

3) PRG: le leggi della <u>meccanica</u> hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Valgono le trasformazioni di Galileo.

(non si applica all'EM dove esiste un sistema privilegiato, l'etere)

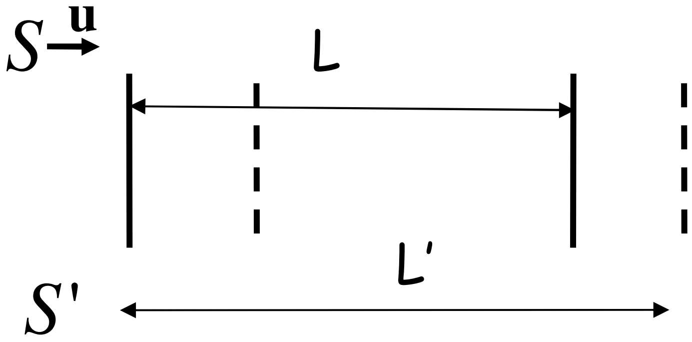
Einstein

1) Lo spazio è omogeneo ed isotropo. Il tempo è omogeneo.

2) La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali (e in tutte le direzioni).

3) PRE: <u>tutte le leggi della fisica</u> hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Valgono le trasformazioni di Lorentz.

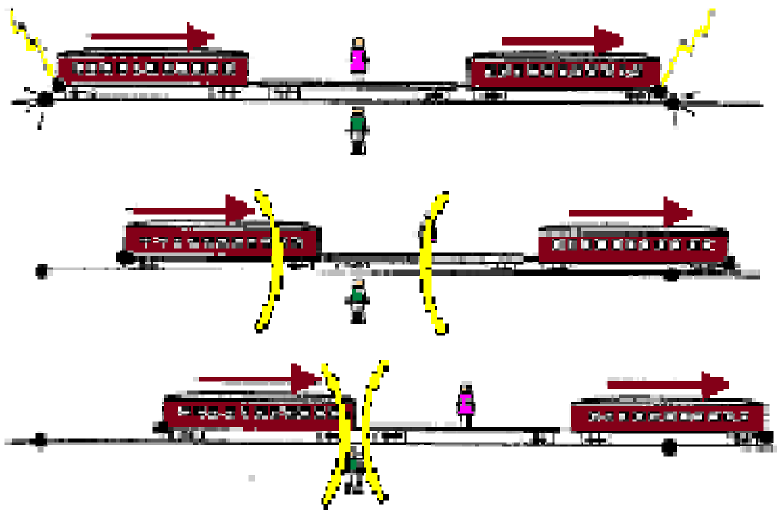
(le leggi della meccanica dovranno essere modificate) c è la stessa in tutti i sistemi di riferimento



$$c=\frac{L}{\underset{\substack{\uparrow\\ S}}{\Delta t}}=\frac{L'}{\underset{\substack{\uparrow\\ S'}}{\Delta t'}}$$

$$L\neq L'$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta t\neq\Delta t'$$

Come decidere se due eventi sono simultanei? Se la luce da essi emessa raggiunge nello stesso istante un punto equidistante dai due eventi



Per l'osservatore sulla terra sono simultanei, per quello sul treno no. Chi ha ragione ? Entrambi, la simultaneità è relativa!

Perché non esiste una simultaneità assoluta

- Le interazioni si propagano con velocità finita.

- Se voglio sincronizzare due orologi che si trovano in posti differenti devo tenere in conto del ritardo che si ingenera nello scambio della informazione tra i due orologi dovuto al fatto il trasferimento di informazione non è istantaneo ma viaggia a velocità finita.

- Se i due orologi sono fermi uno rispetto all'altro posso correggere per il ritardo se conosco il valore della velocità della luce.

- Se i due orologi sono in moto uno rispetto all'altro, l'orologio ricevente sta allontanandosi o sta andando incontro all'onda luminosa. Per correggere questo tipo di ritardo dovrei conoscere la velocità assoluta della luce rispetto all'etere, quantità che non è possibile misurare.

Analogia: suono → luce, aria → etere

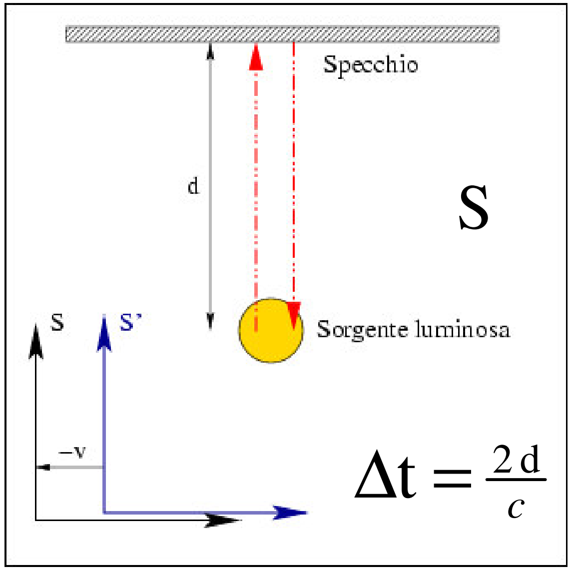
La dilatazione dei tempi

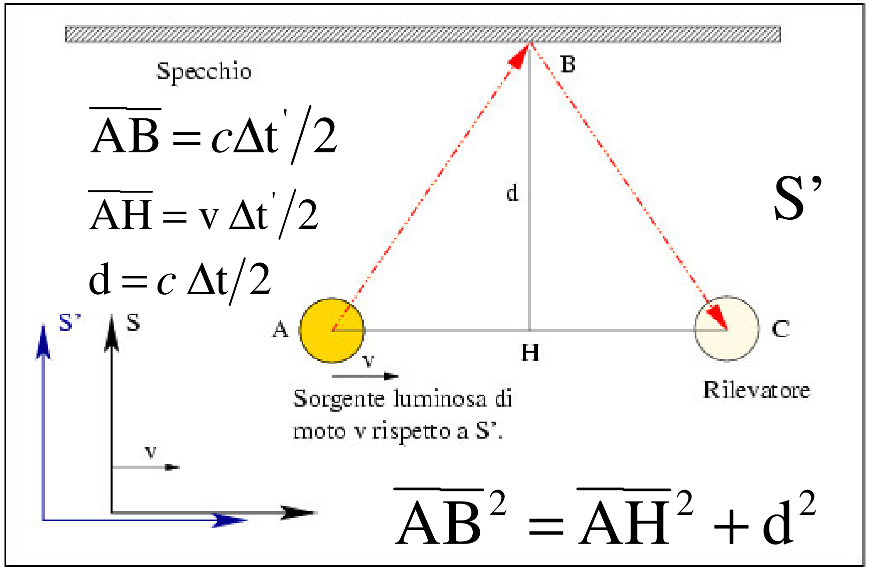
Come misuro il tempo di un atleta nella gara dei cento metri?

Simultaneamente allo start premo il cronometro e lo premo ancora simultaneamente al taglio del traguardo.

La simultaneità è relativa

Un intervallo di tempo è relativo!





$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad\qquad \Delta t' > \Delta t$$

S legge Δ t =1 s, S' legge Δ t =1.2 s; per S' l'orologio in S (che per S' è in movimento) ritarda.

La durata di un fenomeno è minima se misurata nel sistema solidale (proprio) con esso
(evento avviene nello stesso punto) ;

l'orologio in movimento ritarda rispetto a quello in quiete
(il tempo scorre più lentamente)

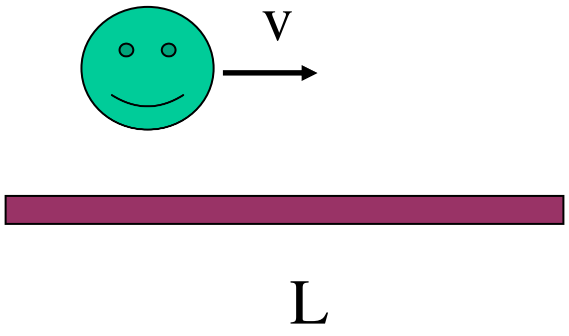
La contrazione delle lunghezze

Come misuro la lunghezza di una asta se questa è in movimento?

Devo simultaneamente determinare la posizione del punto iniziale e del punto finale dell'asta

La simultaneità è relativa

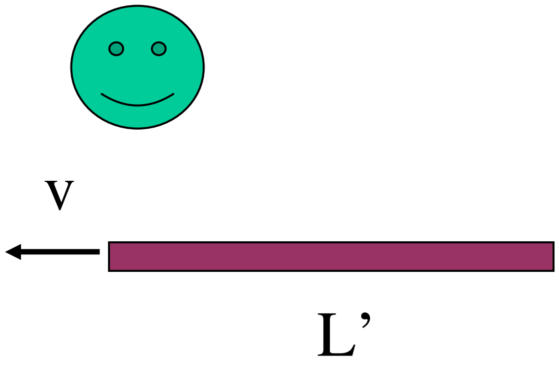
Una lunghezza è relativa!



Sistema asta ferma

smile impiega un tempo t = L/v per

andare da un estremo all'altro dell'asta.



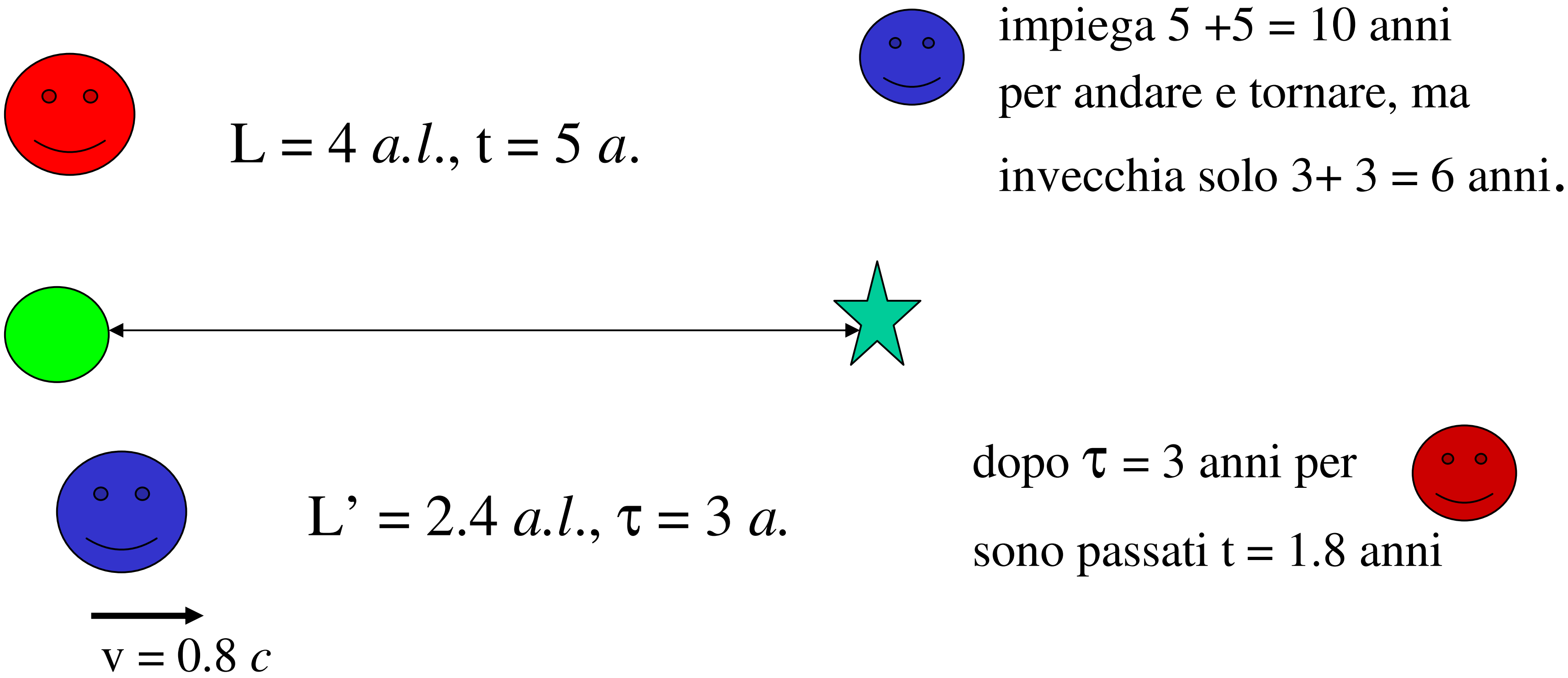
Sistema smile fermo

smile legge sul suo orologio un tempo τ tra il passaggio dei due estremi dell'asta. Per smile l'asta è lunga L'

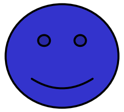
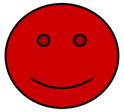
$$L' = v\,\tau = v\,t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \cancel{v}\,\frac{L}{\cancel{v}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Un oggetto in moto si contrae lungo la direzione del moto rispetto ad uno identico a riposo

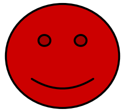
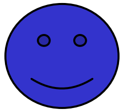
Il paradosso dei gemelli

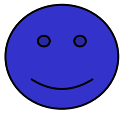


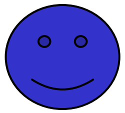
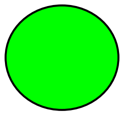
Premessa:

se  viaggia sempre con velocità $\xrightarrow[v = 0.8\,c]{}$ si può incontrare una volta sola con  ; un secondo confronto deve avvenire a distanza *nello stesso istante* .

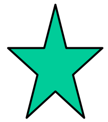
Spiegazione:

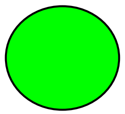
 e  non sono osservatori equivalenti. Non vi è una simmetria di ruoli tra loro.

 deve invertire la direzione per tornare indietro.

Per  l'evento simultaneo su 

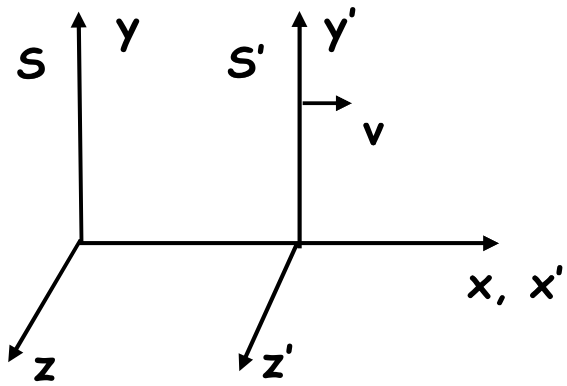
al suo arrivo su
alla sua partenza da

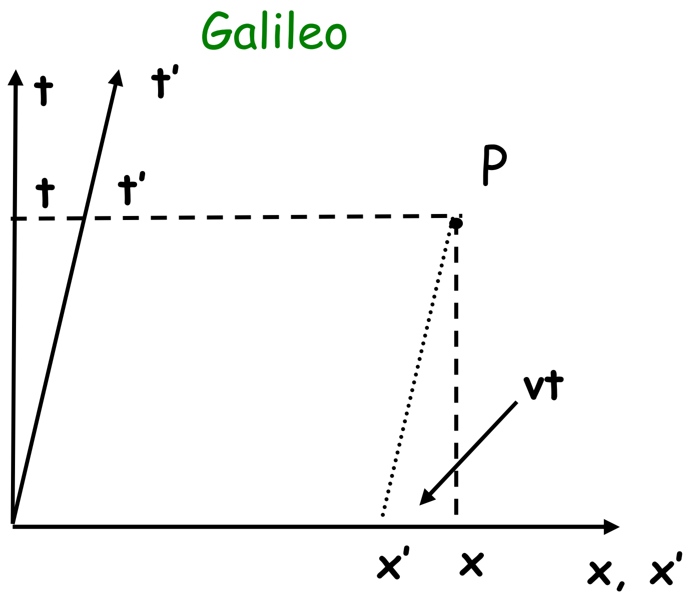


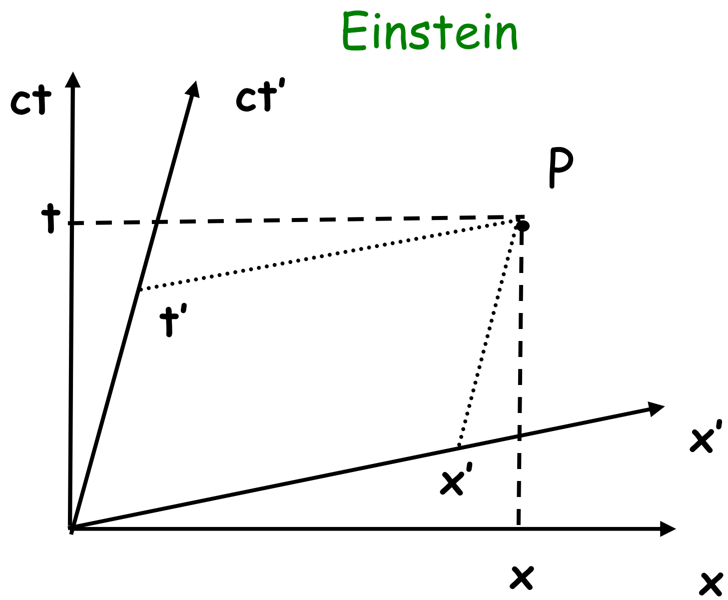
è qualcosa che avviene su  a t=1.8 anni

dopo la sua partenza.
prima del suo ritorno.

Piano di Minkowski





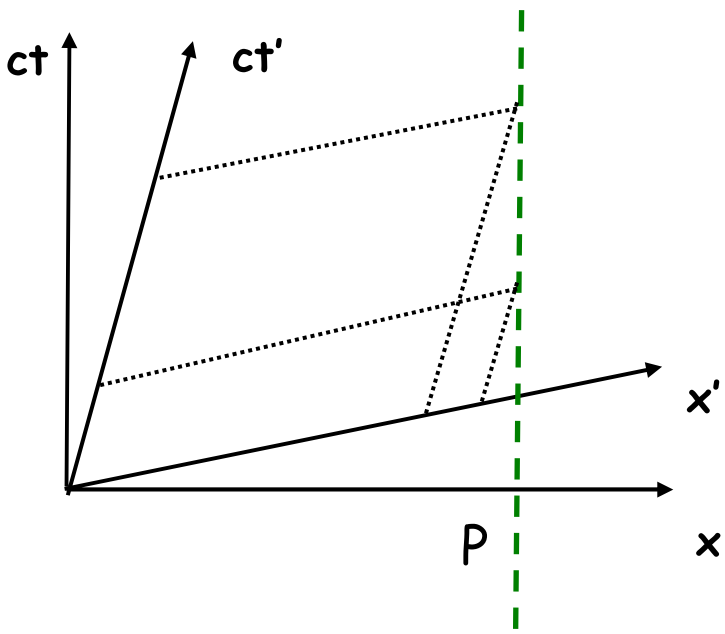


Evento: qualcosa che succede nel punto geometrico P all'istante t.

t' = t → unità differenti sugli assi t, t'

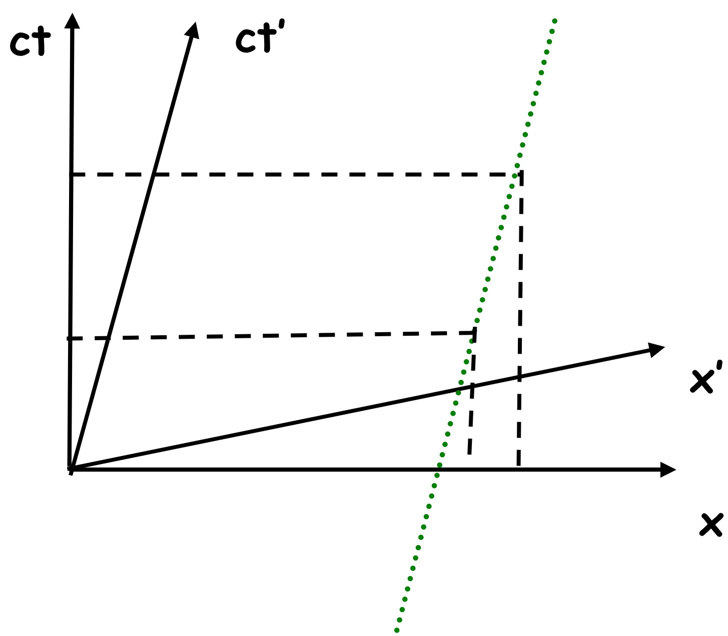
Linea di universo:
linea che descrive l'evoluzione temporale di un oggetto.

Punto fermo in S



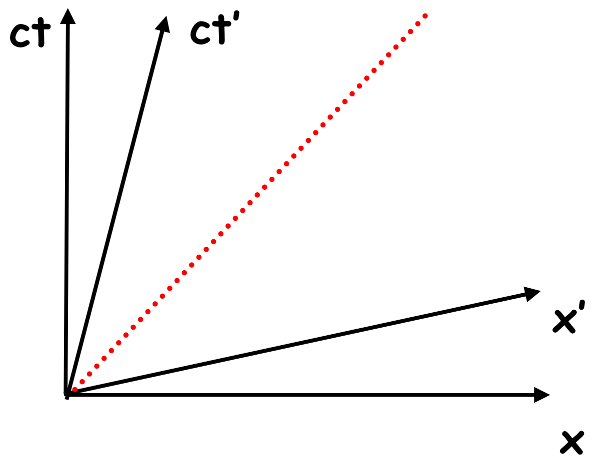
retta parallela all'asse ct

Punto fermo in S'



retta parallela all'asse ct'

linea di universo di un raggio di luce:
retta inclinata a 45°
$x = ct$, $x' = ct'$

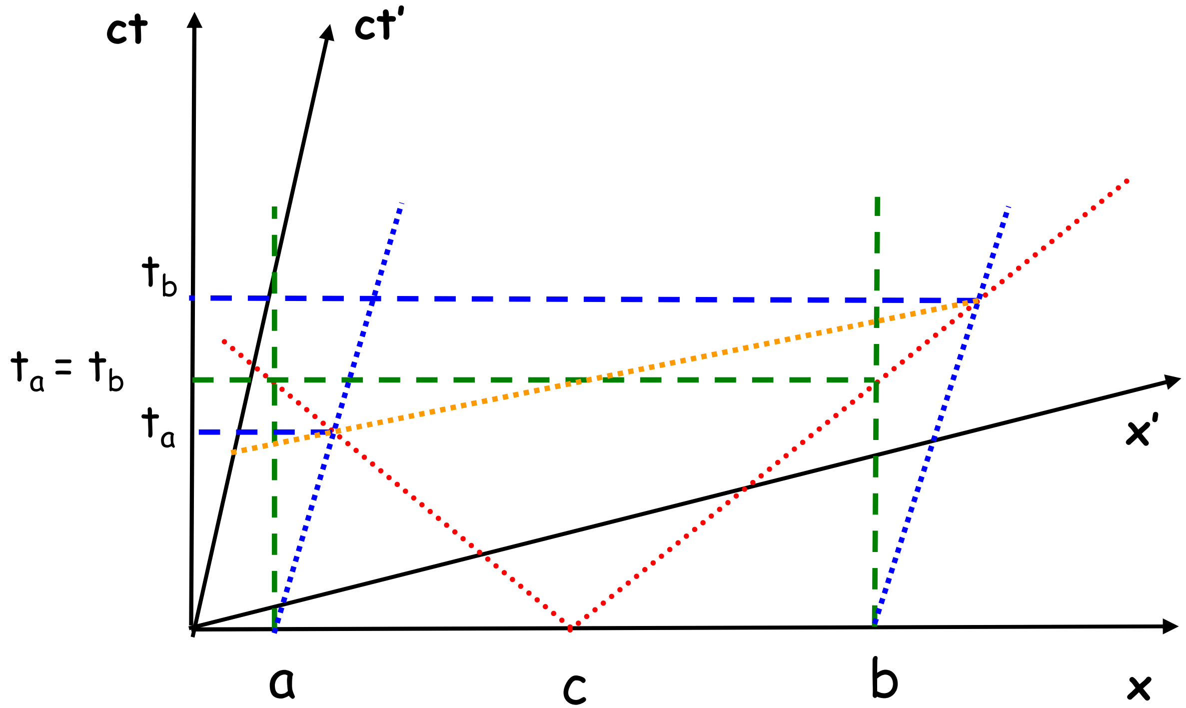


Relatività della simultaneità

fermi in S

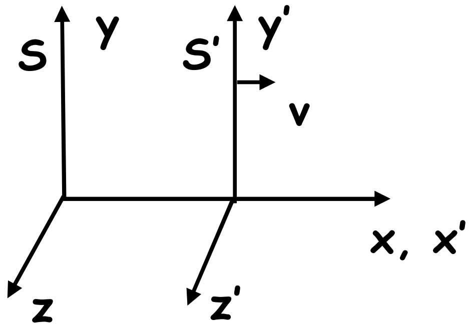
fermi in S'

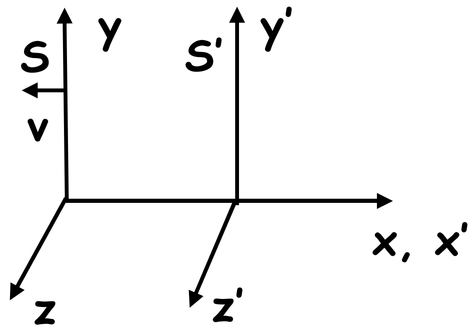
raggio di luce



Trasformazioni di Lorentz

relatività
del moto





linea di universo dell'origine di S': retta $x = vt$ in S, $x' = 0$ in S'

$\rightarrow x' = \gamma(x - v\,t)$

linea di universo dell'origine di S: retta $x = 0$ in S $x' = -vt'$ in S'

$\rightarrow x = \gamma(x' + v\,t')$

raggio di luce: $x = ct$, $x' = ct'$

$$ct' = \gamma(ct - vt) \rightarrow t' = \gamma(1-\beta)t$$

$$ct = \gamma(ct' + vt') \rightarrow t = \gamma(1+\beta)t'$$

$$t' = \gamma(1-\beta)\gamma(1+\beta)t' = \gamma^2(1-\beta^2)t'$$

$$\Rightarrow \gamma^2(1-\beta^2) = 1;$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

Noto γ possiamo risolvere x’, t’ in funzione di x,t

$$x' = \gamma(x - v\,t)$$

$$x = \gamma(x' + v\,t')$$

$$x = \gamma(\gamma(x - v\,t) + v\,t') \rightarrow \gamma\,v\,t' = x\,(1 - \gamma^2) + \gamma^2\,v\,t$$

$$t' = \gamma\,(t + \frac{x}{\gamma^2 v}(1 - \gamma^2)) = \gamma\,(t - \frac{v}{c^2}\,x)$$

infatti

$$\frac{1}{\gamma^2 v}(1 - \gamma^2) = \frac{1}{v}(\frac{1}{\gamma^2} - 1) = \frac{1}{v}(1 - \beta^2 - 1) = -\frac{v^2}{c^2\,v} = -\frac{v}{c^2}$$

Lungo direzioni perpendicolari alla direzione del moto relativo tra i due sistemi le coordinate non variano: $z' = z$, $y' = y$.

trasformazioni di Lorentz:

$$x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}\, ct\right) \qquad x = \gamma\left(x' + \frac{v}{c}\, ct'\right)$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}\, x\right) \qquad ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}\, x'\right)$$

se c fosse infinita le trasformazioni di Lorentz coinciderebbero con quelle di Galileo. La differenza tra i due tipi di trasformazione è un effetto che va come v^2/c^2.

Le trasformazioni di Lorentz ci danno la relazione numerica tra le unità dei due sistemi di riferimento.

unità di lunghezza in S': segmento di coordinate

$(x'=0, ct'=0)$ -- $(x'=1, ct'=0)$

in S:

$$x = \gamma\,(1 + v\,0) = \gamma$$

$$ct = \gamma\,(0 + \frac{v}{c}1) = \gamma\,\frac{v}{c}$$

$$(x = 0, ct = 0) - - (x = \gamma, ct = \gamma\frac{v}{c})$$

unità di tempo in S': segmento di coordinate

$(x'=0, ct'=0)$ -- $(x'=0, ct'=1)$

in S:

$$x = \gamma(0 + \frac{v}{c}1) = \gamma\frac{v}{c}$$

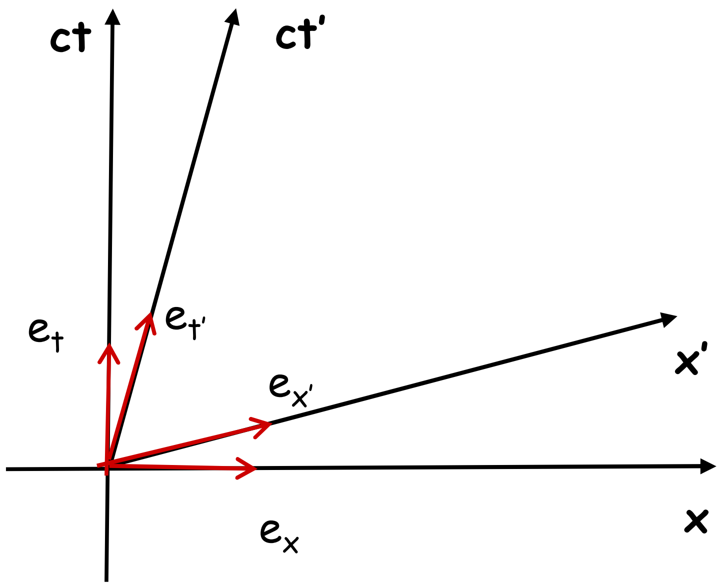
$$(x = 0, ct = 0) - - (x = \gamma\frac{v}{c}, ct = \gamma)$$

$$ct = \gamma(1 + \frac{v}{c}0) = \gamma$$

usando il sistema di coordinate S:

Unità di lunghezze: $e_x = (1,0)$ $e_{x'} = (\gamma, \gamma\beta)$

Unità di tempi: $e_t = (0,1)$ $e_{t'} = (\gamma\beta, \gamma)$



$$\frac{\overline{e}_{x'}}{\overline{e}_x} = \frac{\overline{e}_{t'}}{\overline{e}_t} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \gamma^2\beta^2}}{1} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$$

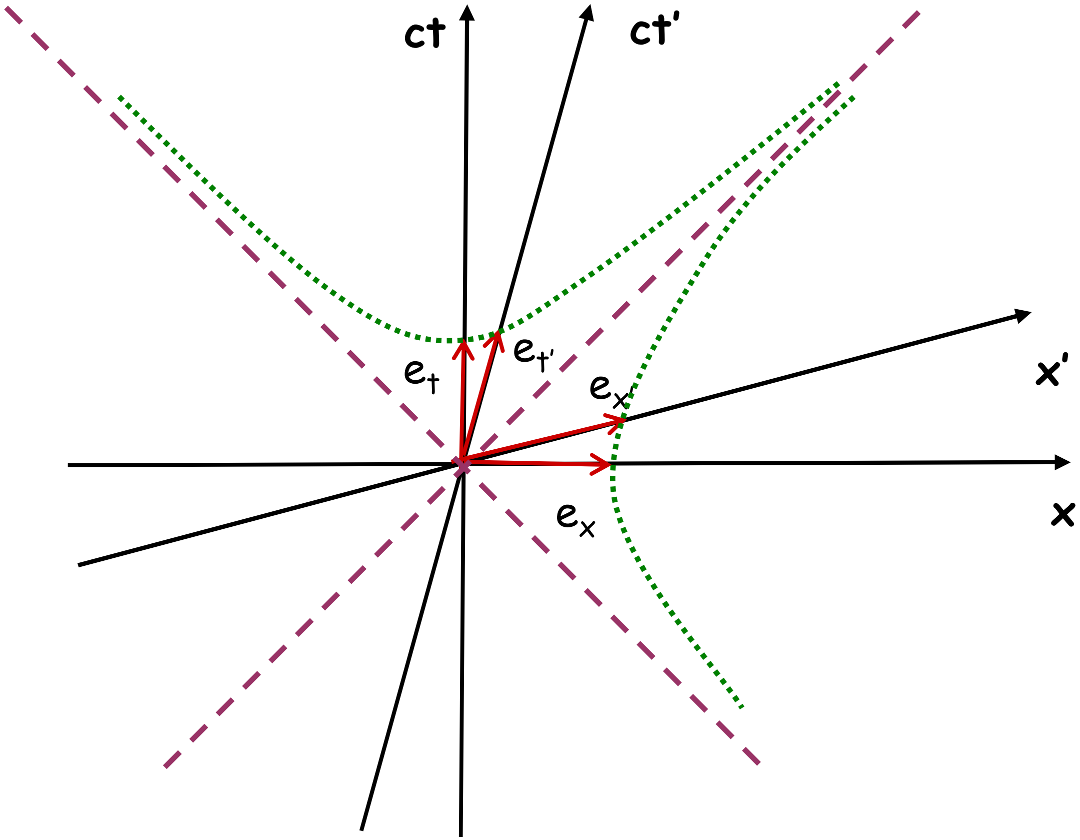
Le coordinate dell' estremo di $e_{x'}$ al variare di β descrivono una iperbole di equazione $x^2 - (ct)^2 = 1$ con asintoti $x=ct$, $x = - ct$.

$$e_{x'} = (x = \gamma, ct = \gamma\beta) \to \beta = \frac{ct}{\gamma} \quad , \quad \gamma = x$$

$$(\overline{e}_{x'})^2 = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1+\frac{(ct)^2}{\gamma^2}}{1-\frac{(ct)^2}{\gamma^2}} = \frac{\gamma^2+(ct)^2}{\gamma^2-(ct)^2} = \frac{x^2+(ct)^2}{x^2-(ct)^2}$$

ma $$(\overline{e}_{x'})^2 = x^2 + (ct)^2 \to x^2 - (ct)^2 = 1$$

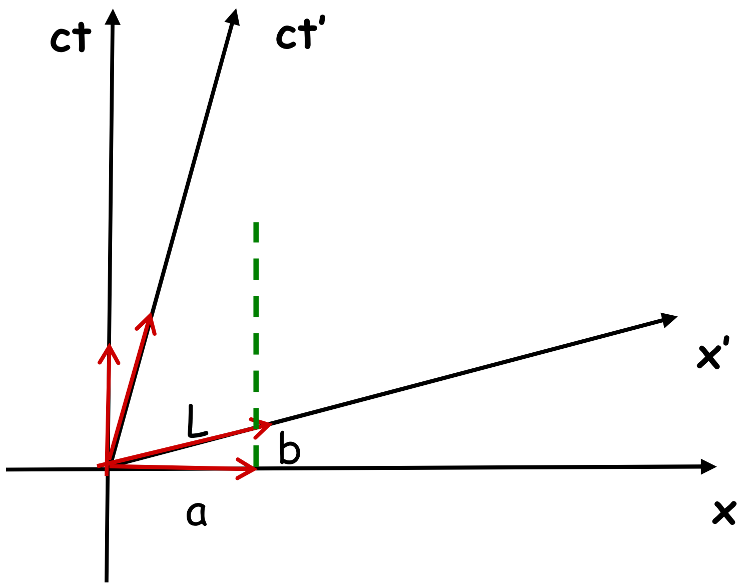
Le coordinate dell' estremo di $e_{t'}$ al variare di β descrivono una iperbole di equazione $x^2 - (ct)^2 = -1$ con asintoti $x=ct$, $x = - ct$.



Più aumenta β più le unità di lunghezza e tempo del sistema in moto si allungano.

Contrazione delle lunghezze

Sbarra unitaria ferma in S: linea di universo retta parallela all'asse ct.
Per misurare la lunghezza della sbarra in S' devo valutare la distanza tra gli estremi allo stesso istante in S'.



in S' la sbarra è più corta del segmento unitario

$L^2 = a^2 + b^2 = 1 + b^2$ misurata in S. Per sapere quanto vale questa distanza misurata nelle unità di S' devo dividere per il fattore

$$\frac{\bar{e}_{x'}}{\bar{e}_x} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

che mi dice quante volte il segmento L (di cui so il valore in unità e_x) sta dentro il segmento unitario di S', cioè $e_{x'}$.
Per trovare b uso similitudine dei triangoli: $1 : b = \gamma : \gamma\beta \rightarrow b = \beta$

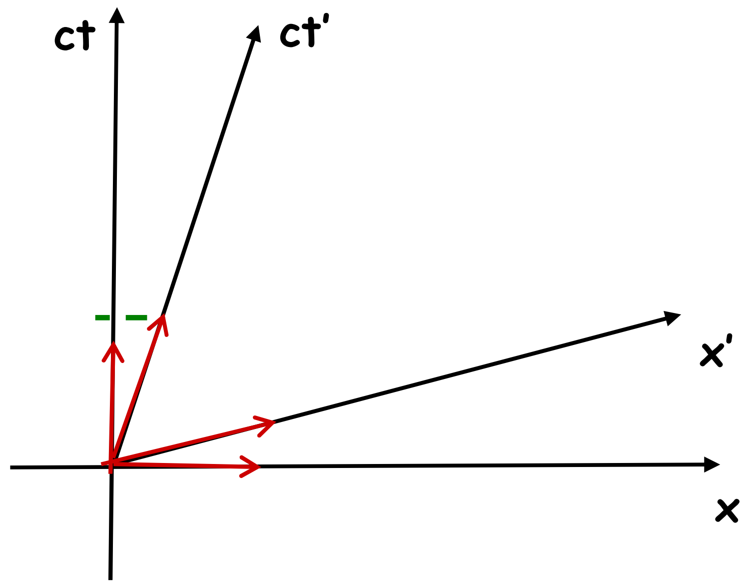
$$\frac{L}{e_{x'} / e_x} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \sqrt{1-\beta^2}$$

Fattore di contrazione:

Dilatazione dei tempi

Orologio fermo nell'origine di S': intervallo di tempo unitario in S' è descritto dal segmento $e_{t'}$. Lo stesso intervallo visto in S è maggiore di e_t.

coordinate in S: $e_{t'} = (\gamma\beta, \gamma)$



L'interavallo di tempo misurato in S è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Fattore di dilatazione

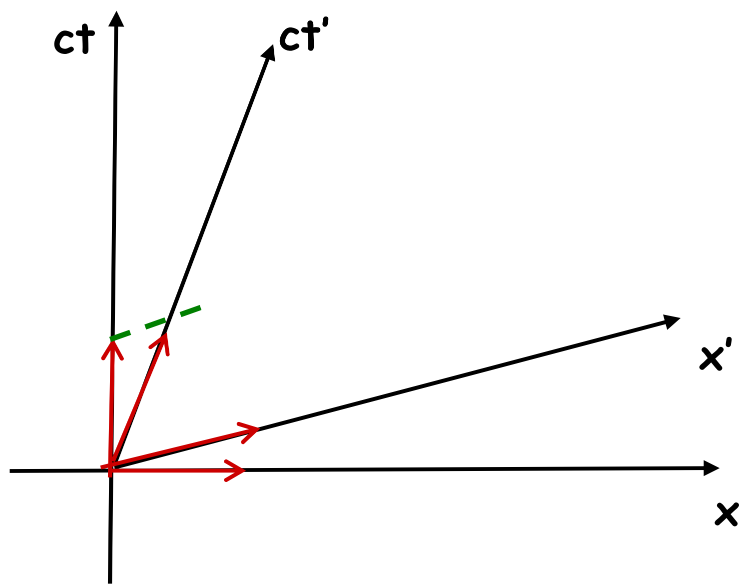
Per un osservatore fisso gli orologi dei sistemi in movimento ritardano rispetto a quelli del suo sistema. Per l'osservatore fisso il tempo scorre più lentamente nei sistemi in movimento. Per un osservatore fisso, in un sistema che viaggia a c il tempo è fermo, $e_{t'}$ diventa infinito.

Relatività del moto

Per un osservatore solidale con S è il sistema S' che si muove con velocità v, ma per un osservatore solidale con S' è S che si muove con velocità –v. Per questo osservatore è l'orologio di S che deve ritardare.
Orologio fermo in S: intervallo unitario e_t. L'intervallo corrispondente in S' è dato dalla proiezione parallela a x'.

L'interavallo misurato in S' è maggiore di $e_{t'}$.

L'orologio in S ritarda rispetto agli orologi in S'.



Addizione delle velocità

Galileo:

$$\Delta\vec{r}\,' = \Delta\vec{r} - \vec{v}\,\Delta t \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{V}' = \frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t'} = \frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t}$$

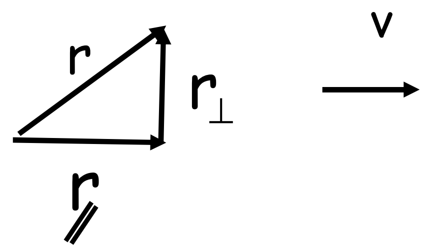
$$\Delta t' = \Delta t \qquad\qquad \vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}$$

Lorentz:

$$\Delta r_{\parallel}' = \gamma(\Delta r_{\parallel} - v\,\Delta t)$$

$$\Delta\vec{r}_{\perp}\,' = \Delta\vec{r}_{\perp}$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\,\Delta r_{\parallel}}{c^2}\right)$$



dobbiamo distinguere tra direzione parallela e perpendicolare al moto relativo dei due sistemi.

$$V'_{/\!/} = \frac{\Delta r'_{/\!/}}{\Delta t'} = \frac{\gamma\,(\Delta r_{/\!/} - v\,\Delta t)}{\gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta r_{/\!/})} = \frac{V_{/\!/} - v}{1 - \frac{v\,V_{/\!/}}{c^2}}$$

$$\vec{V}_{\perp}' = \frac{\Delta \vec{r}_{\perp}'}{\Delta t'} = \frac{\Delta \vec{r}_{\perp}}{\gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta r_{/\!/})} = \frac{\vec{V}_{\perp}}{\gamma(1 - \frac{v\,V_{/\!/}}{c^2})}$$

Se c fosse infinita ritroveremmo la legge di addizione delle velocità di Galileo. Il fatto che le componenti parallele e perpendicolari della velocità varino differentemente nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro implica che la direzione del vettore velocità varia nel passaggio tra sistemi di riferimento.

La velocità della luce non può essere superata.

Luce che viaggia lungo una direzione fissata.
Quale è la velocità della luce in un sistema che si muove:

lungo la stessa direzione con velocità v

$$c' = \frac{c - v}{1 - \frac{v\,c}{c^2}} = \frac{c - v}{\frac{1}{c}(c - v)} = c$$

lungo una direzione perpendicolare con velocità v

$$c'_{/\!/} = -v\,; \quad c_{\perp}' = \frac{c}{\gamma}$$

$$c' = \sqrt{(c'_{/\!/})^2 + (c_{\perp}')^2} = \sqrt{v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2}} = \sqrt{v^2 + c^2\,(1 - \frac{v^2}{c^2})} = c$$

Aberrazione della luce

La luce viene emessa lungo una certa direzione dalla stella ma viene osservata sulla terra che si sta muovendo rispetto alla stella con velocità v_T.
Assumiamo che la stella emetta lungo una direzione perpendicolare al piano dell'orbita terrestre. Sulla terra sarà osservata non ha 90° perché ha acquistato una componente parallela al piano dell'orbita.

$$c_{/\!/}^{\,T} = v_T \; ; \quad c_{\perp}^{\,T} = \frac{c}{\gamma}$$

$$\frac{c_{/\!/}^{\,T}}{c_{\perp}^{\,T}} = \gamma \frac{v_T}{c} \cong \frac{v_T}{c}$$

Luce in un mezzo in movimento (legge di Fizeau)

La velocità della luce in un mezzo è c/n.

Legge di Fizeau: se si invia della luce in una corrente di acqua che fluisce con velocità v, la velocità della luce risulta:

$$\frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \leftarrow \text{coefficiente di trascinamento di Fresnel}$$

Notare che se assumiamo che l'etere sia stazionario la velocità dovrebbe essere c/n mentre se l'acqua trasportasse l'etere per Galileo avremmo c/n – v.

$$V'_{/\!/} = \frac{\frac{c}{n} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{c}{n}} \cong \left(\frac{c}{n} - v\right)\left(1 + \frac{v}{c\,n}\right) \cong \left(\frac{c}{n} - v + \frac{v}{n^2}\right)$$

Separazione tra due eventi

La separazione spaziale o temporale tra due eventi è un concetto relativo.
Una quantità invariante, cioè che ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento è l'intervallo definito come la radice quadrata della distanza spaziale al quadrato tra i due eventi meno la distanza temporale al quadrato tra gli stessi.

$$\Delta s = \sqrt{\Delta r^2 - c^2 \Delta t^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2}$$

se chiamo w = i ct

$$\Delta s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}$$

Δs scritto in termini di un tempo immaginario ha proprio la forma di una di distanza geometrica (euclidea).

Verifica:

$$\Delta s'^2 = \Delta r_{/\!/}'^2 + \Delta \vec{r}_\perp{}'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

$$= \gamma^2 \left(\Delta r_{/\!/} - v\,\Delta t \right)^2 + \Delta \vec{r}_\perp{}^2 - c^2 \gamma^2 \left(\Delta t - \frac{v\,\Delta r_{/\!/}}{c^2} \right)^2$$

$$= \gamma^2 \Delta r_{/\!/}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \Delta \vec{r}_\perp{}^2 - c^2 \gamma^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \Delta r_{/\!/}^2 + \Delta \vec{r}_\perp{}^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta s^2$$

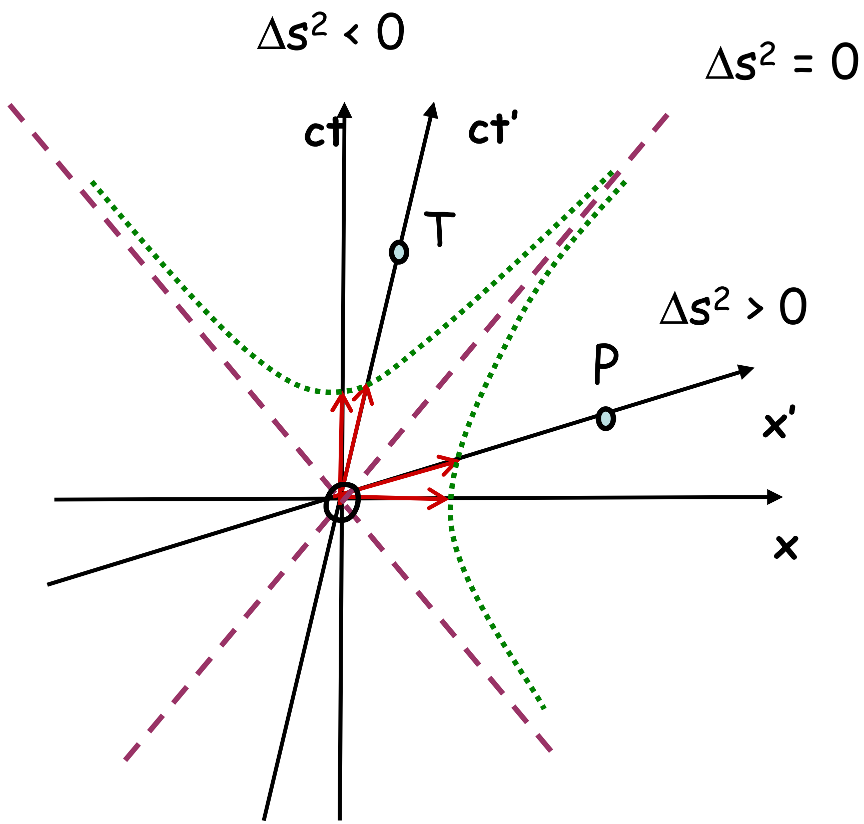
L'intervallo, inteso come una distanza nello spazio tempo, non ha un segno definito, mentre una distanza geometrica è sempre positiva.

Classificazione degli intervalli:

$\Delta s^2 > 0$ eventi di tipo spazio
esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi O, P sono coincidenti

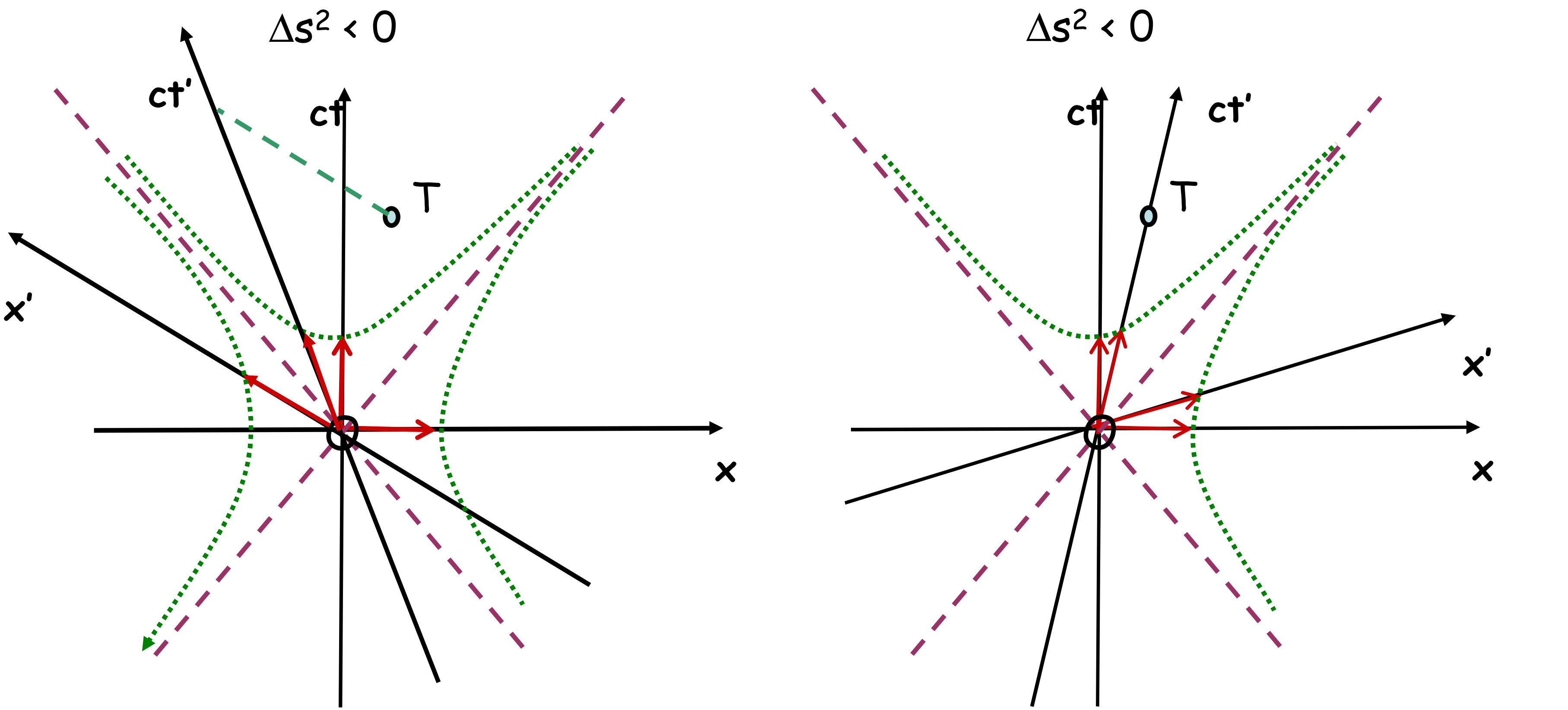
$\Delta s^2 = 0$ eventi di tipo luce

$\Delta s^2 < 0$ eventi di tipo tempo
esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi O, T sono simultanei



Ordinamento temporale

$\Delta s^2 < 0$

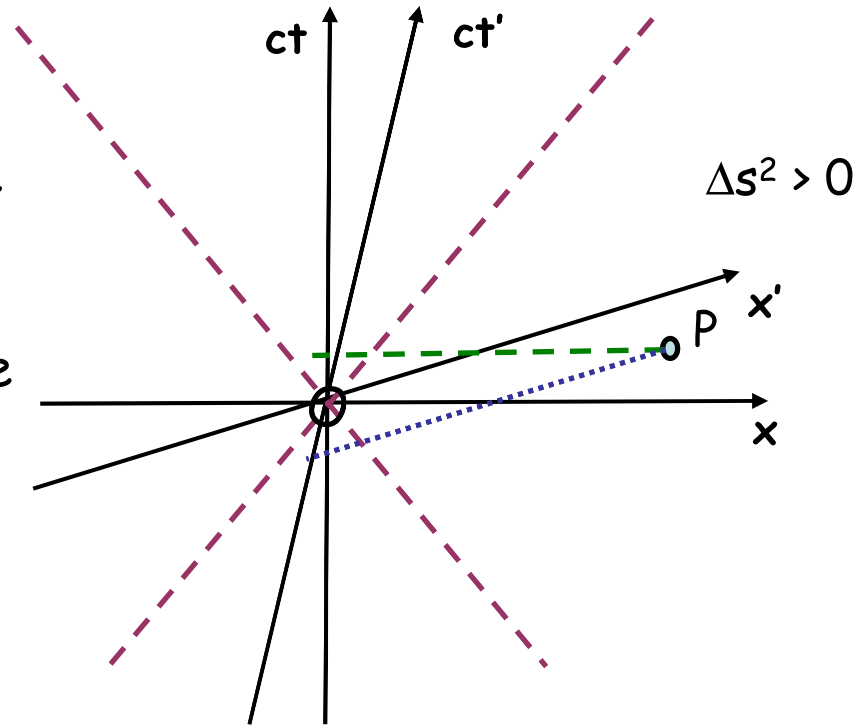


In qualsiasi sistema di riferimento l'evento in T avviene dopo quello in O

$\Delta s^2 > 0$

Nel sistema S l'evento in P avviene dopo l'evento in O.

Nel sistema S' l'evento in P avviene prima dell'evento in O.



Non vi può essere una relazione di causalità tra gli eventi P ed O.
Ma poiché $\Delta s^2 > 0 \rightarrow \Delta x^2 > \Delta t^2$, un raggio di luce inviato da O non potrà raggiungere P quindi i due eventi sono totalmente disconnessi