Elementi di Meccanica Statistica
I appello I sessione A.A. 2008-2009
26 gennaio

Esercizio n.1

Si consideri un gas perfetto classico di N particelle contenute all'interno di un cilindro di altezza h e raggio di base R. In un sistema di coordinate cartesiane in cui l'asse z coincide con l'asse del cilindro, le particelle sono soggette ad un campo di forza

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\omega(x^2+y^2).$$

Si chiede di determinare: i) l'energia libera nell'ensemble canonico; ii) la pressione esercitata dal gas sulla parete laterale del cilindro; iii) l'energia interna. Si chiede inoltre di calcolare il valore limite cui tende l'energia interna quando il raggio R tende all'infinito e di commentare il risultato ottenuto.

Esercizio n.2

Si consideri un gas di N fermioni, a $T=0$, vincolati su un quadrato di lato L. I fermioni hanno spin $1/2$ e relazione di dispersione

$$E(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \alpha p,$$

dove $\alpha > 0$ è una costante con le dimensioni fisiche di una velocità e $p = |\mathbf{p}|$. Si chiede di determinare: i) la densità degli stati; ii) l'energia di Fermi in funzione della densità superficiale, N/L^2; iii) l'energia dello stato fondamentale.

Soluzione esercizio n. 1

i) Se usiamo coordinate cilindriche, la funzione di partizione di singola particella si ottiene nel modo seguente:

$$Z_1 = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr\, r\, e^{-\beta\omega r^2/2} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} 2\pi h \frac{1-e^{-\beta\omega R^2/2}}{\beta\omega} \tag{1}$$

e quindi l'energia libera è

$$F = -NkT \ln\left[\frac{(2\pi mkT)^{3/2} e 2\pi h(1-e^{-\beta\omega R^2/2})}{(2\pi\hbar)^3 N\beta\omega}\right]. \tag{2}$$

ii) La pressione esercitata sulla parete laterale del cilindro determina una variazione di volume $dV = 2\pi hRdR$ da cui

$$P = -\frac{1}{2\pi hR}\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{N\omega}{2\pi h}\frac{1}{e^{\beta\omega R^2/2}-1}. \tag{3}$$

iii) L'energia interna si ottiene dalla formula

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial\beta} N \ln\left[\frac{(2\pi mkT)^{3/2} e 2\pi h(1-e^{-\beta\omega R^2/2})}{(2\pi\hbar)^3 N\beta\omega}\right] \tag{4}$$

da cui

$$U = \frac{5}{2}NkT - N\frac{\omega R^2}{2}\frac{1}{e^{\beta\omega R^2/2}-1}. \tag{5}$$

Quando $R \to \infty$

$$U = \frac{5}{2}NkT. \tag{6}$$

Tale risultato è quello atteso considerando il teorem di equipartizione: $(1/2)kT$ per ogni asse coordinato dovuto all'energia cinetica (tre contributi) ed $(1/2)kT$ per gli assi x ed y dovuto all'energia potenziale per un totale di $(5/2)kT$ per particella.

Soluzione esercizio n. 2

i) La densità degli stati è definita da

$$\nu(E) = 2 \sum_{\mathbf{p}} \delta(E - E(\mathbf{p})). \tag{7}$$

Se definiamo la nuova variabile

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \alpha p, \tag{8}$$

risolvendo una semplice equazione di secondo grado e scegliendo la soluzione col segno positivo, si ottiene

$$p = \sqrt{2m\epsilon + \alpha^2 m^2} - \alpha m. \tag{9}$$

Nella (7) passiamo in coordinate polari e facciamo il cambio di variabile (8)

$$\nu(E) = 2\frac{L^2}{(2\pi\hbar)^2} 2\pi \int_0^\infty m \left[1 - \frac{\alpha m}{\sqrt{2m\epsilon + \alpha^2 m^2}}\right] \delta(E - \epsilon) = \frac{L^2 m}{\pi\hbar^2}\left[1 - \frac{\alpha m}{\sqrt{2mE + \alpha^2 m^2}}\right]. \tag{10}$$

ii) Per calcolare l'energia di Fermi usiamo la formula

$$N = \int_0^{E_F} dE\ \nu(E) \tag{11}$$

e si ottiene

$$N = \frac{L^2 m}{\pi\hbar^2}\left[E_F - \alpha\left(\sqrt{2mE_F + \alpha^2 m^2} - \alpha m\right)\right]. \tag{12}$$

È conveniente definire l'energia di Fermi per $\alpha = 0$,

$$E_F^0 = \frac{N}{L^2}\frac{\pi\hbar^2}{m} \tag{13}$$

in modo che la (12) diventa

$$E_F^0 = E_F - \alpha\left(\sqrt{2mE_F + \alpha^2 m^2} - \alpha m\right). \tag{14}$$

Esplicitando rispetto a E_F

$$E_F = E_F^0 + \sqrt{2\alpha^2 m E_F^0} \tag{15}$$

ed usando la (13) si ottiene l'energia di Fermi in funzione della densità superficiale.

iii) Per il calcolo dell'energia dello stato fondamentale si può usare la formula

$$U = \int_0^{E_F} dE\ \nu(E)\ E. \tag{16}$$

Si ottiene

$$U = \frac{L^2 m}{\pi \hbar^2} \left\{ \frac{E_F^2}{2} - \frac{\alpha}{6m} \left[(2mE_F + \alpha^2 m^2)^{3/2} - \alpha^3 m^3 \right] - \frac{\alpha^3 m}{2} \left(\sqrt{2mE_F + \alpha^2 m^2} - \alpha m \right) \right\}. \tag{17}$$