Elementi di Meccanica Statistica
I appello III sessione A.A. 2008-2009
7 settembre 2009

Esercizio n.1

Si consideri un gas ideale di N particelle, ciascuna soggetta ad una dinamica classica governata dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \alpha\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

dove α è una costante reale positiva. Il gas è contenuto in una sfera di raggio R con centro nell'origine degli assi. Si chiede di determinare l'equazione di stato.

Esercizio n.2

Si consideri un gas di N fermioni in due dimensioni ed in presenza di accoppiamento Zeeman con un campo magnetico esterno, **B**, diretto lungo l'asse delle z positive. La hamiltoniana ha la forma

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B},$$

dove il momento magnetico associato ad ogni fermione è $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \boldsymbol{\sigma}$ con $\boldsymbol{\sigma}$ il vettore che ha per componenti le matrici di Pauli. Si chiede di determinare:

1. l'andamento del livello di Fermi in funzione del campo magnetico;
2. la suscettività magnetica a temperatura nulla;
3. (FACOLTATIVO) la suscettività magnetica in funzione della temperatura.

Soluzione esercizio n.1

Ponendo per comodità $a = \beta\alpha$, l'energia libera risulta

$$F = -kTN \ln \left[(2\pi mkT)^{3/2} 4\pi \left(\frac{2}{a^3}(1 - e^{-aR}) - \frac{2R}{a^2} e^{-aR} - \frac{R^2}{a} e^{-aR} \right) \right] + kT \ln N!$$

dove si è usato che

$$\int_0^R \mathrm{d}r r^2 e^{-ar} = \left(\frac{2}{a^3}(1 - e^{-aR}) - \frac{2R}{a^2} e^{-aR} - \frac{R^2}{a} e^{-aR} \right).$$

Se usiamo il fatto che

$$\frac{\partial}{\partial V} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial}{\partial R}$$

otteniamo la pressione

$$P = NkT \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{a^3}(e^{aR} - 1) - \frac{2R}{a^2} - \frac{R^2}{a} \right)^{-1}.$$

Nel limite $\alpha = 0$, si ha

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{2}{a^3}(e^{aR} - 1) - \frac{2R}{a^2} - \frac{R^2}{a} \right) = \frac{R^3}{3},$$

e in tale limite si riottiene l'equazione standard del gas perfetto. Nel caso presente, esprimendo R in funzione di V e riinserendo $a = \alpha\beta$ nell'espressione per la pressione si ottiene l'equazione di stato cercata.

Soluzione esercizio n. 2

Per comodità poniamo $\epsilon_Z = \mu_0 B$. Scegliendo l'asse delle z come asse di quantizzazione per lo spin, i fermioni con spin su e giù hanno energia $\epsilon_{\mp,\mathbf{p}} = p^2/2m \mp \epsilon_Z$. Il numero di fermioni con spin su e giù è dato da

$$N_\mp = SN_0(\epsilon_F \pm \epsilon_Z),$$

dove ϵ_F è il livello di Fermi in presenza del campo magnetico, N_0 la densità degli stati per unità di superficie ed S l'area che racchiude il gas. A campo magnetico nullo, il livello di Fermi è dato dal numero totale di Fermioni

$$N = 2SN_0\epsilon_F^0,$$

dove ϵ_F^0 indica il livello di Fermi a campo nullo. La presenza di un campo magnetico determina uno sbilanciamento tra le popolazioni con spin opposto. Poiché l'energia dei fermioni con spin su è maggiore di quella dei fermioni con spin giù, avremo $N_- > N_+$. Inoltre deve essere

$$N = N_- + N_+$$

che si può riscrivere

$$2\epsilon_F^0 = \epsilon_F + \epsilon_Z + \epsilon_F - \epsilon_Z.$$

Allora segue che $\epsilon_F^0 = \epsilon_F$, cioè il livello di Fermi rimane costante accendendo un campo magnetico. Ciò però è vero fintanto che ϵ_Z rimane minore di ϵ_F^0. Quando $\epsilon_Z = \epsilon_F^0$, la popolazione di fermioni con spin giù si annulla e il gas di Fermi è completamente spin polarizzato. A questo punto, si deve avere

$$N = N_-$$

o anche

$$2\epsilon_F^0 = \epsilon_F + \epsilon_Z.$$

Possiamo quindi riassumere che

$$\epsilon_F = \begin{array}{ll} \epsilon_F^0, & 0 < \epsilon_Z < \epsilon_F^0 \\ 2\epsilon_F^0 - \epsilon_Z, & \epsilon_F^0 < \epsilon_Z. \end{array}$$

Per determinare la suscettività, definiamo la magnetizzazione per unità di superficie

$$m = \frac{1}{S}\mu_0(N_- - N_+).$$

Si ottiene quindi

$$m = \mu N_0 2\epsilon_z$$

che determina la suscettività χ

$$\chi = \mu_0^2 2N_0.$$

A temperatura non nulla si ha

$$N_{\mp} = SN_0 kT \, \mathsf{ln}(1 + e^{\beta(\mu \pm \epsilon_Z)}),$$

dove μ è il potenziale chimico. Se assumiamo che anche a temperatura non nulla per piccoli valori del campo μ non dipende dal campo, allora la suscettività diventa

$$\chi = \mu_0^2 2N_0 \frac{1}{1 + e^{-\beta\mu}}$$

che nel limite di temperatura nulla ($\beta \to \infty$) riproduce il precedente risultato. A temperatura non nulla, dobbiamo introdurre la dipendenza del potenziale chimico dalla temperatura. Questa si ottiene dalla condizione

$$\epsilon_F^0 = kT \, \mathsf{ln}(1 + e^{\beta\mu})$$

da cui

$$\mu = KT \, \mathsf{ln}(e^{\beta\epsilon_F^0} - 1).$$

L'espressione per la suscettività diventa quindi

$$\chi = \mu_0^2 2N_0 (1 - e^{-\beta\epsilon_F^0}).$$