Elementi di Meccanica Statistica
II appello I sessione A.A. 2008-2009
9 febbraio

Esercizio n.1

Un cilindro di altezza h e area di base S è diviso in due parti da un setto mobile che può muoversi lungo l'asse longitudinale del cilindro. L'asse del cilindro coincide con l'asse z. La parte superiore del cilindro è riempita con un gas perfetto di N_1 particelle di massa m_1, mentre quella inferiore con N_2 particelle di massa m_2. Il cilindro è immerso in un campo di gravità, per modo che la funzione hamiltoniana ha la forma

$$H = \frac{p^2}{2m_i} + m_i g z, \ i = 1, 2.$$

L'origine dell'asse z coincide con la posizione della base del cilindro. Nell'ipotesi che i due gas si trovino in equilibrio termico, e avendo indicato con h_e l'altezza cui si trova il setto separatore, determinare la condizione di equilibrio meccanico tra i due gas. Verificare inoltre che nel caso di gas uguali ($m_1 = m_2 = m$) e di $h_e = h/2$, si ha

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\beta m g h/2}.$$

Esercizio n.2

Un gas di bosoni contenuto in un ipercubo di lato L in d dimensioni ha relazione di dispersione

$$E(\mathbf{p}) = a p^n, a > 0$$

con n intero positivo. Si chiede di determinare: i) la densità degli stati; ii) i valori di d ed n per i quali esiste la condensazione di Bose-Einstein; iii) la temperatura di condensazione. Si consiglia di esprimere il risultato finale in termini delle funzioni Gamma di Eulero e Zeta di Riemann, definite da

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t^{z-1} e^{-t}; \ \ \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

e si ricorda che l'angolo solido d-dimensionale è $\Omega_d = (2\pi^{d/2})/\Gamma(d/2)$.

Soluzione esercizio n.1

Per determinare la condizione di equilibrio meccanico bisogna calcolare la pressione che ciascun gas esercita sul setto separatore. Allora la condizione di equilibrio è $P_1 + P_2 = 0$, dove P_1 è la pressione che il gas nella parte superiore del cilindro esercita sulla faccia superiore del setto, mentre P_2 è la pressione esercitata sulla faccia inferiore dal gas contenuto nella parte inferiore del cilindro. L'energia libera del gas che si trova nella parte superiore è

$$F_1 = -kT \ln \left[\frac{(2\pi m_1 kT)^{3N_1/2}}{N_1!} S_1^N \left(\frac{e^{-\beta m_1 g h_e} - e^{-\beta m_1 g h}}{\beta m_1 g} \right)^{N_1} \right] \tag{1}$$

per modo che

$$P_1 = -\frac{1}{S}\frac{\partial F_1}{\partial h_e} = -\frac{N_1 m_1 g}{S} \frac{1}{1 - e^{-\beta m_1 g (h - h_e)}} \tag{2}$$

e notiamo che tale pressione è negativa esprimendo il fatto che viene esercitata verso il basso.

In modo analogo si trova per il gas nella parte inferiore

$$F_2 = -kT \ln \left[\frac{(2\pi m_2 kT)^{3N_2/2}}{N_2!} S_2^N \left(\frac{1 - e^{-\beta m_2 g h_e}}{\beta m_2 g} \right)^{N_2} \right] \tag{3}$$

da cui si ottiene la pressione

$$P_2 = -\frac{1}{S}\frac{\partial F_2}{\partial h_e} = \frac{N_2 m_2 g}{S} \frac{1}{e^{\beta m_2 h_e} - 1}. \tag{4}$$

La condizione di equilibrio $P_1 + P_2 = 0$ diventa quindi

$$N_1 m_1 \frac{1}{1 - e^{-\beta m_1 g (h - h_e)}} = N_2 m_2 \frac{1}{e^{\beta m_2 h_e} - 1}. \tag{5}$$

Se $m_1 = m_2 = m$ e $h_e = h/2$, si ottiene facilmente

$$N_1 = N_2 e^{-\beta m g h/2}. \tag{6}$$

Soluzione esercizio n. 2

i) La densità degli stati è

$$\nu(E) = \frac{L^d}{(2\pi\hbar)^d} \int d^d p \delta(E - ap^n) = \frac{L^d}{(2\pi\hbar)^d} \Omega_d \int_0^\infty dp\, p^{d-1} \delta(E - ap^n). \quad (7)$$

Mediante il cambio di variabile $\epsilon = ap^n$ nella (7) si ottiene

$$\nu(E) = \frac{L^d}{(2\pi\hbar)^d} \Omega_d a^{-d/n} E^{d/n-1}. \quad (8)$$

ii) Affinchè si abbia la condensazione di Bose-Einstein deve convergere l'integrale seguente

$$N = \int_0^\infty d\, E \frac{\nu(E)}{e^{\beta E} - 1} \quad (9)$$

e ciò richiede che, per $E \to 0$, la funzione integranda vada come E^x con $x > -1$. È facile vedere che nel caso presente, per $E \to 0$, la funzione integranda si comporta come

$$E^{d/n-2}$$

che implica

$$d > n. \quad (10)$$

iii) La temperatura di condensazione risulta quindi

$$T_0 = \frac{a}{k} \left[N \frac{(2\pi\hbar)^d \Gamma(d/2)}{L^d 2\pi^{d/2} \zeta(d/n) \Gamma(d/n)} \right]^{n/d}. \quad (11)$$