Elementi di Meccanica Statistica
II appello II sessione A.A. 2008-2009
10 luglio 2009

Esercizio n.1

Si consideri un gas classico di particelle di massa m, soggetto, nel semispazio $z > 0$, ad un potenziale

$$U(z) = mgz + \frac{1}{2}\gamma z^2,$$

dove g è l'usuale accelerazione di gravità e γ una costante elastica. Si determini l'altezza h tale che la pressione del gas a tale altezza sia ridotta di un fattore e rispetto alla pressione ad altezza nulla ($z = 0$).

Esercizio n.2

Si consideri un gas unidimensionale di N fermioni senza spin con hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Si determini l'energia di Fermi e l'energia dello stato fondamentale in funzione di N. Si consideri successivamente lo stesso gas ma con fermioni di spin $1/2$ e si determini nuovamente l'energia di Fermi e l'energia dello stato fondamentale, discutendo le eventuali differenze tra il caso in cui N è pari e quello in cui è dispari. Si ricorda che

$$\sum_{n=1}^{M} n = \frac{M(M+1)}{2}.$$

Soluzione esercizio n.1

Consideriamo una colonna di altezza infinita e area di base S e sia N il numero di particelle contenute in tale colonna. Dividiamo la colonna in due parti. La prima parte corrisponde ad una colonna di altezza h, mentre la seconda è la parte restante. Sia n il numero di particelle nella prima parte e $N-n$ quello nella seconda parte. L'energia libera delle due parti risulta

$$F_{sup} = -kT \ln\left[\frac{(2\pi mkT)^{3(N-n)/2}}{(N-n)!} S^{N-n}\left(\int_h^\infty \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}\right)^{N-n}\right] \tag{1}$$

$$F_{inf} = -kT \ln\left[\frac{(2\pi mkT)^{3n/2}}{(n)!} S^{n}\left(\int_0^h \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}\right)^{n}\right]. \tag{2}$$

In equilibrio, la pressione esercitata dalla parte superiore deve compensare quella della parte inferiore, che corrisponde alla condizione di equilibrio meccanico

$$P_{inf} + P_{sup} = 0. \tag{3}$$

Le pressioni delle due parti sono date da

$$P_{inf} = -\frac{1}{S}\frac{\partial F_{inf}}{\partial h} = \frac{kT}{S} n \frac{e^{-\beta U(h)}}{\int_0^h \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}} \tag{4}$$

$$P_{sup} = -\frac{1}{S}\frac{\partial F_{sup}}{\partial h} = -\frac{kT}{S}(N-n)\frac{e^{-\beta U(h)}}{\int_h^\infty \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}} \tag{5}$$

e la condizione di equilibrio diventa

$$(N-n)\frac{e^{-\beta U(h)}}{\int_h^\infty \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}} = n\frac{e^{-\beta U(h)}}{\int_0^h \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}} \tag{6}$$

da cui si ottiene l'espressione per n

$$n = N\frac{\int_0^h \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}}{\int_0^\infty \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}}. \tag{7}$$

Sostituendo l'espressione trovata per n nell'espressione per la pressione, ad esempio quella per P_{inf}, si ottiene la pressione ad altezza h

$$P(h) = \frac{kTN}{S}\frac{e^{-\beta U(h)}}{\int_0^\infty \mathsf{d}z e^{-\beta U(z)}}. \tag{8}$$

Imponendo che il rapporto $P(h)/P(0) = 1/e$, si ottiene

$$h = \frac{\sqrt{(mg)^2 + 2\gamma kT} - mg}{\gamma}. \tag{9}$$

Soluzione esercizio n. 2

I livelli energetici sono quelli di un oscillatore armonico

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2). \tag{10}$$

Le particelle sono fermioni senza spin, quindi posso metterne una soltanto per livello energetico. Allora il numero di particelle N determina il valore massiomo di n, che indichiamo con N_F. Si ha

$$N = \sum_{n=0}^{N_F} 1 = N_F + 1. \tag{11}$$

L'energia di Fermi corrisponde al potenziale chimico a temperatura nulla. Per determinare il potenziale chimico a $T = 0$ usiamo la formula

$$E_F \equiv \mu(T = 0) = \frac{\partial E_T}{\partial N} \tag{12}$$

dove E_T è l'energia totale. L'energia totale è

$$E_T = \hbar\omega \sum_{n=0}^{N_F} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(\frac{N_F(N_F + 1)}{2} + \frac{1}{2}(N_F + 1)\right) = \hbar\omega\frac{1}{2}(N_F+1)^2 = \hbar\omega\frac{1}{2}N^2 \tag{13}$$

da cui si ottiene

$$E_F = \hbar\omega N = \hbar\omega(N_F + 1). \tag{14}$$

Tale risultato esprime il fatto che in uno spettro discreto, il livello di Fermi si situa a metà tra l'ultimo livello occupato ($E = \hbar\omega(N_F + 1/2)$) ed il primo vuoto ($E = \hbar\omega(N_F + 3/2)$). Passiamo ora a considerare il caso di fermioni con spin. Ciò che cambia è la possibilità di accomodare due particelle per livello energetico. A seconda se il numero totale è pari o dispari, l'ultimo livello occupato conterrà due o una particella.

Esaminiamo il caso di N pari. Il numero di particelle determina N_F

$$N = 2\sum_{n=0}^{N_F} 1 = 2(N_F + 1). \tag{15}$$

Poiché l'ultimo livello è completamente pieno, l'energia di Fermi si situa a metà tra tale livello e il primo livello vuoto

$$E_F = \hbar\omega(N_F + 1) = \hbar\omega\frac{N}{2}. \tag{16}$$

L'energia totale risulta

$$E_T = 2\hbar\omega \sum_{n=0}^{N_F} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\frac{N}{2} \right)^2 . \tag{17}$$

Nel caso di N dispari, N_F è determinato da

$$N = 2 \sum_{n=0}^{N_F - 1} 1 + 1 = 2N_F + 1, \tag{18}$$

dove la degenerazione 2 è stata considerata solo per livelli sino al penultimo occupato. L'energia di Fermi si colloca esattamente all'ultimo livello parzialmente occupato

$$E_F = \hbar\omega \left(N_F + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \frac{N}{2}. \tag{19}$$

L'energia totale si ottiene in modo analogo

$$E_T = 2 \sum_{n=0}^{N_F - 1} \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(N_F + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\frac{N^2 + 1}{4} \right) . \tag{20}$$