Elementi di Meccanica Statistica
II appello sessione estiva A.A. 2010-2011
11 luglio 2011

Esercizio n. 1

Un gas classico ultrarelativistico di N particelle è contenuto in un cilindro di area di base A ed altezza h. La funzione hamiltoniana per ogni particella è data da

$$H = cp + \alpha z, \ c > 0, \ \alpha > 0,$$

dove p è il modulo dell'impulso e l'asse z è stato scelto parallelo all'asse del cilindro ed il valore $z = 0$ indica la base del cilindro. Si determini l'energia interna e l'entropia del gas alla temperatura T.

Esercizio n. 2

Un gas ultrarelativistico di N bosoni di spin zero con dispersione $E = cp = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ è confinato in un quadrato di lato L. Discutere la possibilità della condensazione di Bose-Einstein e determinare il valore della temperatura critica, T_c, in funzione della densità superficiale di particelle N/L^2 e della velocità c. Calcolare il calore specifico per temperature $T < T_c$. Si ricorda che $\zeta_R(2) = \pi^2/6$ e $\zeta_R(3) \approx 1,202$, dove $\zeta_R(z)$ è la funzione zeta di Riemann data da

$$\zeta_R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Soluzione esercizio n.1

La funzione di partizione di singola particella è

$$Z_1 = \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{d}^3 p \; e^{-\beta c p} A \int_0^h \mathrm{d}z \; e^{-\beta \alpha z} = \frac{8\pi}{(\beta c)^3} A \frac{1}{\beta \alpha} \left(1 - e^{-\beta \alpha h}\right)$$

e la funzione di partizione del sistema

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}.$$

Per l'energia interna usiamo la formula

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

da cui

$$U = N \left(4kT - \frac{\alpha h}{e^{\beta \alpha h} - 1}\right).$$

Nel limite $h \to \infty$, $U = 4NkT$ come ci si attende dal teorema di equipartizione: $3NkT$ dall'energia cinetica e NkT da quella potenziale. Per calcolare l'entropia usiamo le formule

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \; F = -kT \ln Z.$$

Otteniamo

$$S = Nk \left[\ln \left(\frac{8\pi e A (kT)^4}{c^3 \alpha N} \left(1 - e^{-\beta \alpha h}\right) \right) + 4 - \frac{\beta \alpha h}{e^{\beta \alpha h} - 1} \right].$$

Soluzione esercizio n.2

Per determinare la temperatura critica per la condensazione di Bose-Einstein bisogna imporre la condizione di annullamento del potenziale chimico nella formula per il numero di particelle

$$N = L^2 \int \frac{\mathrm{d}^2 p}{h^2} \frac{1}{e^{\beta_c c p} - 1}, \quad \beta_c = \frac{1}{kT_c}.$$

Operando il cambio di variabile $x = \beta_c c p$ e dopo aver integrato sull'angolo, si ottiene

$$N = L^2 \frac{2\pi}{h^2 c^2} (kT_c)^2 \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x}{e^x - 1}.$$

Notiamo che la singolarità per $x = 0$ del denominatore è compensata dal numeratore e quindi l'integrale è convergente segnalando la possibilità di una condensazione di Bose-Einstein. L'integrale può essere svolto nel modo seguente

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \mathrm{d}x \, x e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \Gamma(2) = \zeta_R(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Otteniamo quindi

$$kT_c = \frac{\sqrt{3}}{\pi^{3/2}} ch \sqrt{\frac{N}{L^2}}.$$

Per $T < T_c$, l'espressione dell'energia è

$$U = L^2 \int \frac{\mathrm{d}^2 p}{h^2} \frac{cp}{e^{\beta c p} - 1}.$$

Operando lo stesso tipo di cambio di variabile, otteniamo

$$U = L^2 \frac{2\pi}{h^2 c^2} (kT)^3 \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x^2}{e^x - 1} = L^2 \frac{2\pi}{h^2 c^2} (kT)^3 \zeta_R(3) \Gamma(3)$$

avendo applicato all'integrale su x lo stesso procedimento usato sopra. Il calore specifico a volume costante, per $T < T_c$, risulta quindi

$$c_V = \frac{3\zeta_R(3)\Gamma(3)}{\zeta_R(2)} Nk \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \approx 4,3844 Nk \left(\frac{T}{T_c}\right)^2.$$